Texto Guía para el Curso de Electrotecnia
Plan Común de Ingeniería

Enrique Fuentes H.
Ildefonso Harnisch V.
Juan Luis Espinoza V.

COPIA PRELIMINAR REVISADA
(DIDO Nº 018/2004)
CONCURSO DE PROYECTOS
DE CREACION INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD
(D.E. Nº 00.858/2002)

Universidad de Tarapacá
Facultad de Ingeniería
Departamento de Electrónica

ARICA
2004

	Indice de Materias	
	CONTENIDO	Pág.
I.-	APUNTES DE CLASES	
	Capítulo 1: Electrostática	
1.1.-	Conceptos básicos	1
1.1.1.-	Estructura del átomo	1
1.1.2.-	Principio de conservación de la carga eléctrica	2
1.2.-	Electrostática	2
1.2.1.-	Cargas en reposo	2
1.2.2.-	Fuerza entre cargas	2
1.2.3.-	Campo eléctrico	4
1.3.-	Trabajo, energía	5
1.4.-	Potencial, diferencia de potencial	6
1.4.1.-	Potencial eléctrico	7
1.4.2.-	Potencial en un punto	7
1.4.3.-	Diferencia de potencial	7
1.5.-	Corriente eléctrica	7
1.5.1.-	Corriente en un conductor metálico	7
1.5.2.-	Efecto Joule	8
1.5.3.-	Múltiplos y submúltiplos de corriente	8
1.5.4	Intensidad de corriente	9
1.5.5.-	Densidad de corriente	9
1.5.6.-	Sentido de la corriente	12
1.6.-	Energía, trabajo y potencia	12
1.6.1.-	Conservación de energía	13
1.6.2.-	Potencia eléctrica	14
1.6.3.-	Potencia suministrada y absorbida	15
	Capítulo 2: Circuitos	
2.1.-	Definiciones	16
2.2.-	Circuito eléctrico elemental	17
2.3.-	Componentes de un circuito elemental	19
2.4.-	Fuentes de energía	20
2.4.1.-	Fuerza electromotriz	20
2.4.2.-	Tensión y caída de tensión	20
2.4.3.-	Fuentes de tensión y fuentes de corriente	21
2.5.-	Fuentes ideales	22
2.6.-	Fuentes independientes y fuentes dependientes	23
2.7.-	Potencia suministrada / absorbida	24

	CONTENIDO	Pág.
	Capítulo 3: Leyes Aplicadas a Circuitos	

	CONTENIDO	Pág.

CAPÍTULO 1

ELECTROSTATICA

1.1.- Algunos Conceptos de Electrostática

1.1.1.- Estructura del Atomo

La materia no se puede particionar infinitas veces. Se llega a una estructura elemental que es indivisible, ya que al dividirla pierde las propiedades que la caracterizaban. El elemento indivisible se llama átomo.

- Para nuestros propósitos, es suficiente considerar el modelo acostumbrado para el átomo, aceptando que está constituido por:

  - Núcleo → Protones, Neutrones
  - Electrones (nube)

- La nube de electrones que rodea al núcleo esta formado por distintas órbitas; los electrones que ocupan la órbita más exterior son capaces de abandonarla y se denominan electrones libres.
- La carga eléctrica es una propiedad de la materia, con la que se pueden explicar todos los fenómenos eléctricos.
- Los electrones y protones tienen la misma cantidad de carga eléctrica.
- Un átomo normal tiene la misma cantidad de protones que de electrones, su carga eléctrica neta es cero.
- La unidad de carga eléctrica es el Coulomb [C]
- Se emplea **q** o **Q** para nombrar variables de carga eléctrica

		Carga Eléctrica
Protón		$+ 1.602 \cdot 10^{-19}$ [C]
Neutrón		0 [C]
Electrón	e^-	$- 1.602 \cdot 10^{-19}$ [C]

A cada cuerpo se la asocia una carga eléctrica "Neta" $Q_N = \Sigma\,(q^+ + q^-)$

Sí $Q_N = 0$: Cuerpo eléctricamente neutro

Sí $Q_N > 0$: Cuerpo cargado positivamente

Sí $Q_N < 0$: Cuerpo cargado negativamente

1.1.2.- Principio de conservación de la carga eléctrica:

"No se puede crear carga eléctrica - sólo se pueden separar las cargas positivas de las negativas".

- Universo posee $Q_N = 0$
- Cuerpo aislado : la carga eléctrica neta se conserva

1.1.3.- Concepto de Carga Puntual

Es la carga contenida en un cuerpo de dimensiones muy pequeñas en comparación con las dimensiones de los otros cuerpos y distancias consideradas en un problema dado.

1.2.- Electrostática

Se estudian problemas en que sólo se consideran fuerzas actuando sobre cargas en reposo y campos eléctricos independientes del tiempo (constantes).

1.2.1.- Carga en reposo: Cuerpo cargado, fijo con respecto al observador. (En el cuerpo los electrones están en movimiento, pero no existe movimiento en alguna dirección preferencial).

1.2.2.- Se comprueba experimentalmente que la fuerza entre dos pequeños cuerpos, cargados eléctricamente y separados una gran distancia, tiene la siguiente característica:

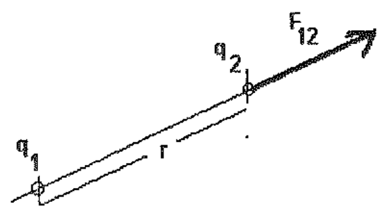
a) Varía en razón directa con cada una de las cargas.
b) Varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia entre ellas.
c) Se dirige a lo largo de la línea de unión de las cargas.
d) Es de atracción si las cargas son opuestas y de repulsión si los cuerpos poseen el mismo tipo de carga.

Lo anterior se expresa analíticamente:

$$\left|\vec{F}\right| \;\alpha\; \frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r_1} - \vec{r_2}\right|^2}$$

La fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas eléctricas se puede cuantificar mediante la ley de Coulomb.

Fig. 1.1.- Cargas separadas una distancia r



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \, \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

$\hat{r}_{12}$:vector unitario en la dirección de q_1 a q_2

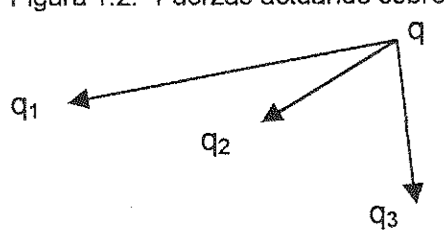
ε : permitividad del medio

ε_0 : permitividad del vacío $\cong 8.85 * 10^{-12}$ (F/m)

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9*10^9 \left[\frac{N.m^2}{C^2}\right]$$

Ejemplo: Determinar la fuerza con que q_1, q_2 y q_3 actúan sobre q

Figura 1.2.- Fuerzas actuando sobre q



$$\vec{F}_T = k\frac{q_1 q}{r_1^2}\hat{r}_1 + k\frac{q_2 q}{r_2^2}\hat{r}_2 + k\frac{q_3 q}{r_3^2}\hat{r}_3$$

1.2.3.- Campo Eléctrico

Se dice que existe un campo eléctrico en un punto del espacio, si sobre una carga de prueba colocada en dicho punto activa una fuerza de origen eléctrico y se define por:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} \text{ intensidad de campo eléctrico}$$

$q \rightarrow 0$; solo puede tender a $\bar{e}$ (para no alternar la distribución de carga)

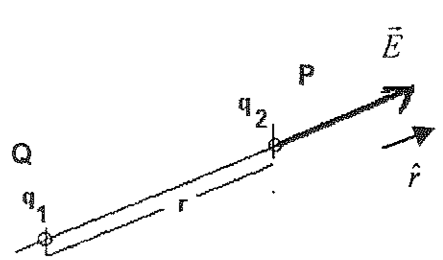
$\vec{E}$: intensidad de campo eléctrico, usualmente se habla de campo eléctrico.

$$\vec{E} = \text{lím}_{q\rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad q\rangle 0$$

$q \rightarrow 0$ se introduce con el fin de que la carga de prueba no influya sobre el comportamiento de las fuentes que producen el campo.

1. Las fuentes, como son cuerpos con carga eléctrica, producen un campo eléctrico.
2. Todo el comportamiento del sistema queda descrito por el campo eléctrico.
3. Para saber qué ocurre sobre un punto de espacio, en cuanto al comportamiento electrostático se refiere, se investiga averiguando cómo es el campo eléctrico en dicho punto.

Fig. 1.3.- Campo eléctrico originado por una carga puntual q_1 en un punto P



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\frac{Qq}{r^2}\hat{r}/q \quad [\text{N/C}]$$

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}\,[\text{N/C} = \text{V/m}]$$

Para varias cargas puntuales

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \ldots. + \vec{E}_n$$

$$\vec{E} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Línea de fuerza: Línea imaginaria que en cada punto tiene por tangente la dirección del campo eléctrico y se orienta en el sentido del campo. (Para visualizar la estructura del $\vec{E}$).

1.3.- Teorema del trabajo y la energía:

"El trabajo hecho por la fuerza resultante de trasladar q desde A $\rightarrow$ B es igual al incremento total de energía cinética adquirida por la carga".

$$\int_A^B \vec{F}_R \cdot d_l = \Delta Ec = \frac{1}{2}m \cdot (v_B^2 - v_A^2)$$

Las cargas se mueven lentamente y con una velocidad promedio constante $\Rightarrow v_A = v_B \Rightarrow \Delta E_c = 0$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\Delta\text{q} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{\text{AB}} = \Delta\text{q}\ \text{V}_{\text{BA}}$$

1.4.- Potencial y diferencia de potencial.

Supongamos que tenemos una distribución de cargas localizada en una cierta región finita del espacio. Traslademos una carga de prueba, de un valor muy pequeño Δq, desde un punto muy distante (∞) a algún punto "P". El trabajo hecho por el agente externo se transforma en un incremento adicional de energía potencial dentro del sistema y es:

$$\Delta W\Big|_{\infty}^{P} = -\Delta q \int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

1.4.1.- Se define V_p como el potencial eléctrico en el punto P

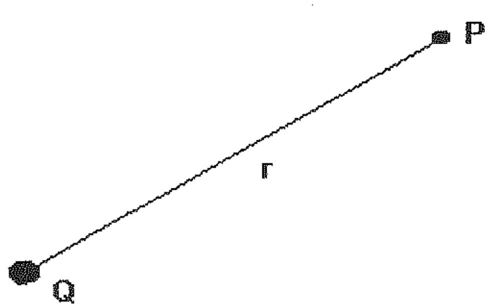
$$V_p = \frac{\Delta W}{\Delta q} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\,\vec{l} \qquad \left[\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = Voltio\right]$$

El potencial eléctrico en un punto P, es el trabajo por unidad de carga que debe desarrollar un agente exterior para mover la unidad de carga desde el infinito al punto P.

$$V_P = \int_{P}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Se puede apreciar que el potencial eléctrico en el punto P, no depende de la carga de prueba q.

Figura 1.4.- Potencial eléctrico en un punto P debido a una carga puntual Q.



$$V_p = k\frac{Q}{r}$$

1.4.2.- Potencial en un punto "P" respecto a un punto de referencia "R".

$$V_P = -\int_R^P \vec{E} \cdot d\bar{l} = \int_P^R \vec{E} \cdot d\bar{l}$$

Es el trabajo por unidad de carga realizado por un agente exterior, al mover esta unidad desde el punto R al punto P.

1.4.3.- Diferencia de Potencial entre un Punto "A" respecto a un Punto "B"

$$V_A = -\int_R^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad ; V_B = -\int_R^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\begin{aligned} V_A - V_B = V_{AB} &= -\int_R^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_R^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= -\int_R^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^R \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}. \end{aligned}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La diferencia de potencial es independiente del punto de referencia elegido.

1.5.- Corriente Eléctrica

En general, la corriente eléctrica es el flujo de cargas eléctricas a través de un medio (conductores metálicos, semiconductores, electrolitos, gases).

Corriente eléctrica = Flujo de portadores de carga

Para mantener una corriente eléctrica a través de un medio, se debe mantener en éste un campo eléctrico.

1.5.1.- Corriente por un conductor metálico.

En circunstancias normales los electrones libres se mueven en forma aleatoria de un átomo a otro dentro del metal, no existiendo ningún movimiento en alguna dirección definida.

Sin embargo, la aplicación de un campo eléctrico al medio conductor produce un movimiento de electrones en una dirección definida, lo que se conoce como corriente eléctrica.

Los electrones son acelerados por el campo eléctrico, los cuales chocan con los átomos, es decir, los electrones transfieren una parte de su energía cinética a los átomos. Esto se manifiesta en una vibración de los átomos, produciendo disipación de energía del medio conductor en forma térmica. Es decir, la corriente eléctrica en cualquier conductor es necesariamente acompañada por generación de calor. Esto se conoce como ***efecto Joule***.

1.5.2.- Para definir claramente la corriente eléctrica son necesarios tres conceptos.

1.- La intensidad de la corriente es la cantidad de electricidad (carga eléctrica) que pasa por una sección en cada segundo.

$$\text{Intensidad} \quad I = \frac{\text{Cantidad de carga}}{\text{tiempo}} = \frac{Q}{t}$$

2.- Como unidad de intensidad de corriente se ha establecido el amperio (A) (André Marie Ampère, físico francés, 1775 - 1836).

1 (A) equivale a 6.242 x 10^{18} electrones por segundo.

3.- El sentido de la corriente convencional (signo positivo) es OPUESTO al movimiento de los electrones.

1.5.3.- Múltiplos y submúltiplos de corriente eléctrica (Ver Apéndice 1)

1μA	= 10^{-6} (A)	= 1 microampere
1mA	= 10^{-3} (A)	= 1 miliampere
1kA	= 10^{3} (A)	= 1 kiloampere

Ejemplos de rangos aproximados de intensidades de corriente:

Hornos de fusión	10 a 100 kA
Máquinas de soldar	1 a 10 kA
Motores eléctricos	1 a 1000 A
Lámparas de incandescencia	100 a 1000 mA
Teléfono	algunos mA
Calculadora de bolsillo	algunos uA

1.5.4.- Intensidad de corriente eléctrica

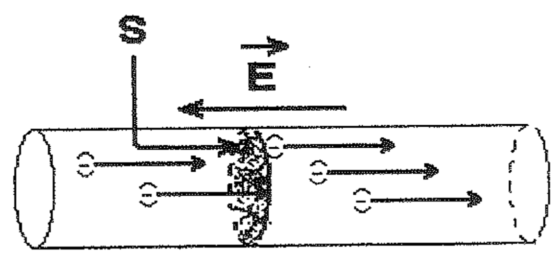
Es la cantidad de carga *neta* que atraviesa una sección del conductor por unidad de tiempo.

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad [\mathrm{C/seg}] = [Amperes]$$

Δq: Cantidad de carga neta eléctrica que atraviesa la sección S en un tiempo Δt muy pequeña

$$i = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{q}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{dq}{dt} [Amperes]$$

Figura 1.5.- Intensidad y densidad de corriente



1.5.5.- Densidad de Corriente Eléctrica

La densidad de corriente caracteriza la relación entre la intensidad de corriente y la sección del conductor.

Densidad de corriente J = Intensidad de corriente I / Sección del conductor A

Consideremos un medio conductor que tiene sólo un tipo de portador de cargas idénticas, cada una de carga q:

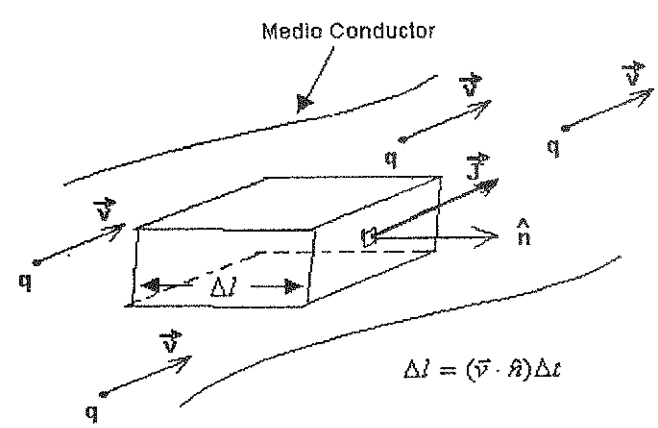
Sea:

N : [cantidad de cargas/m^3]

$\vec{v}$: valor medio de la velocidad de las cargas

$\hat{n}$: vector dirección normal a ds

Fig. 1.6.- Densidad de Corriente



Durante Δt cada carga se mueve una distancia $\Delta l = \vec{v} \cdot \hat{n} \Delta t$ en dirección $\hat{n}$

Δq = cantidad de carga que atraviesa la superficie ds en el tiempo Δt.

ΔQ = Nq x Volumen = Nq ds $\Delta \ell$ = Nq$(\vec{v} \cdot \hat{n} \cdot \Delta t)ds$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\,\vec{v}\,d\,\vec{s}$$

$$di = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\,\vec{v}\,d\,\vec{s}$$

di : intensidad de corriente que pasa a través del elemento ds.

Se define una función vectorial en el punto llamada densidad de corriente.

$$\vec{J} = Nq\,\vec{v}$$

$$di = \vec{J} \cdot d\,\vec{s}$$

La intensidad de corriente eléctrica que pasa a través de una superficie S cualesquiera contenida en el medio es:

$$i = \int_S \vec{J}\,d\,\vec{s} = JS$$

De acuerdo a la definición de $\vec{J}$, el vector densidad de corriente debido a cargas negativas (-Q) con velocidades medias $(-\vec{v})$, es igual al vector densidad de corriente de cargas positivas (+Q) con velocidades medias $(+\vec{v})$

$$\vec{J}_{-Q} = N(-Q)(-\vec{v}) = NQ\,\vec{v} = \vec{J}_{+Q}$$

Figura 1.7.- Vector Densidad de Corriente

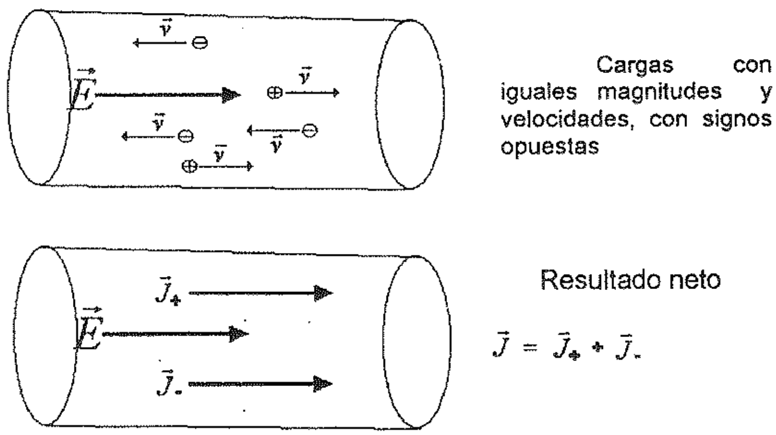
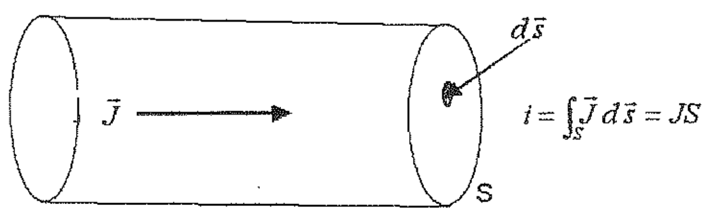


Figura 1.8.- Corriente en función de Densidad de Corriente y Sección



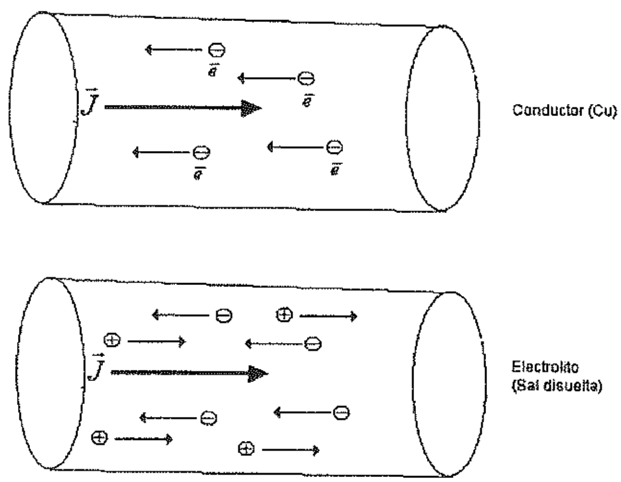
$$i = \int_S J\,\hat{i} \cdot \hat{i}\, ds = \mathrm{J} \int_S ds = JS$$

$$Jo = \frac{i}{S}\left[A/m^2 \text{ o } \mathrm{A/mm}^2\right]$$

1.5.6.- Sentido de la corriente eléctrica.

La intensidad de corriente eléctrica es un escalar, no obstante se acostumbra hablar de la "dirección" de la corriente, para asignar un sentido al movimiento de las cargas.
El sentido convencional de la corriente es el mismo que la del vector $\vec{J}$, es decir, se asume que el movimiento es solamente el de las cargas positivas.

Fig. 1.9.- Sentido convencional de corriente



1.6.- Energía, Trabajo y Potencia

El trabajo hecho por la fuerza de un campo eléctrico $\vec{E}$ para mover una carga "*dq*" desde "A" hasta "B" es igual a la energía potencial cedida por la carga.

El trabajo resultante hecho por una fuerza al trasladar una carga *dq* desde A $\rightarrow$ B es igual al incremento total de energía cinética adquirida por la carga.

$$\int_A^B \vec{F}_R \cdot d\vec{l} = \Delta Ec = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2)$$

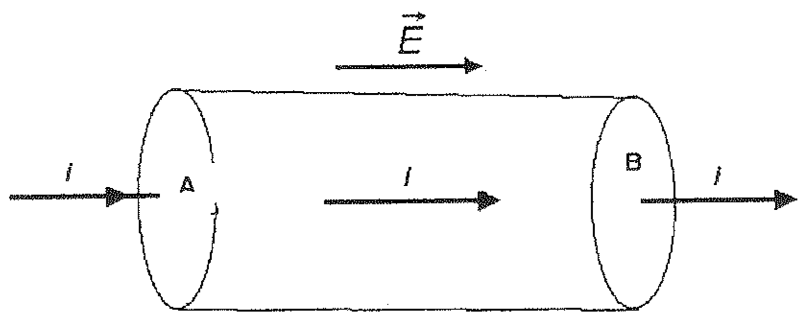
$$\vec{F}_R = \vec{Fex} + \vec{Fe} + \vec{F} \qquad \text{gravedad despreciable}$$

Si las cargas se mueven lentamente y con una velocidad promedio constante $v_A = v_B$, entonces $\Delta E_c = 0$

$$\int_A^B \vec{Fex} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{Fe} \cdot d\vec{l} = -\Delta q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{AB} = \Delta q \cdot V_{BA}$$

Fig. 1.10.- Trabajo y Energía



dq: cantidad de carga positiva que entra por "A" en un intervalo de tiempo *dt*, la misma cantidad sale por "B" en igual tiempo. Se ha desplazado *dq* desde "A" hasta "B" en un tiempo *dt*

1.6.1.- El principio de conservación de la energía nos dice que esta energía se transforma dentro del dispositivo, de energía potencial eléctrica a alguna otra forma, dependiendo el dispositivo.

Así la energía "*dw*" transformada en el dispositivo será:

$$dw = dq \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$

$$dw = dq V_{ab} \;;\; i = \frac{dq}{dt} \;; dq = idt$$

$$dw = V_{ab} \cdot i\, dt \; [\text{joule}]$$

1.6.2.- Potencia

Tasa a la cual la energía se utiliza, almacena o transporta.

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = Vab \cdot i \ [\text{Watt}]$$

$$w = \int_0^t p(t)dt \quad , \quad \textit{energía transformada} \text{ durante un tiempo } "t"$$

Si i = constante = I y V_{ab} = constante:

$$W = I \cdot V_{ab}\, t \quad [\text{Joule}]$$

$$P = I \cdot V_{ab} \quad [\text{Watts}]$$

- Si el dispositivo es un motor, la energía aparece casi toda como trabajo mecánico.
- Si el dispositivo es una batería que se está cargando, la energía aparece casi toda como energía química.
- Si el dispositivo es una resistencia (plancha eléctrica, conductor), la energía se transforma en calor.

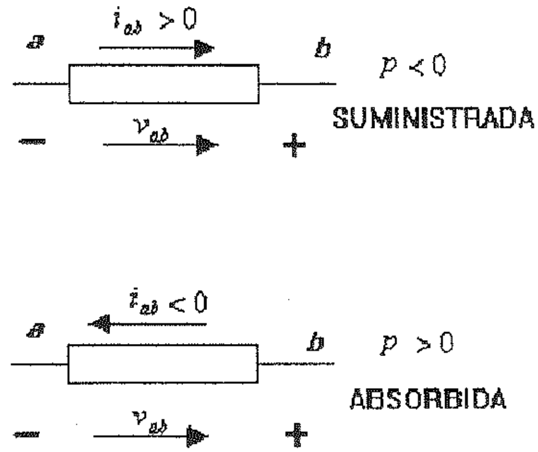
En el caso de una resistencia los electrones no ganan energía cinética (velocidad de arrastre constante), por lo tanto, la energía potencial eléctrica que pierden se transmite a la resistencia como calor por **efecto joule**.

Potencia absorbida o entregada por un elemento

Fig.1.11.- Potencia absorbida y suministrada

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

$$p_{ab} = v_{ab} \cdot i_{ab}$$



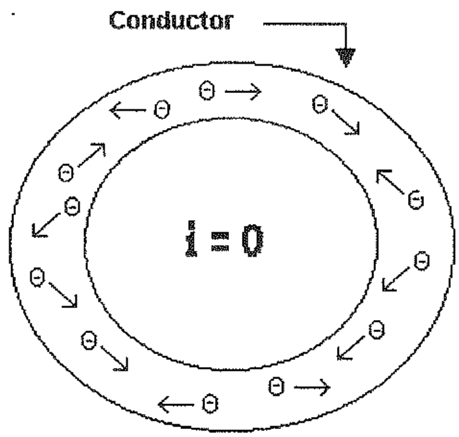
CAPITULO 2

CIRCUITOS

2.1.- Definiciones

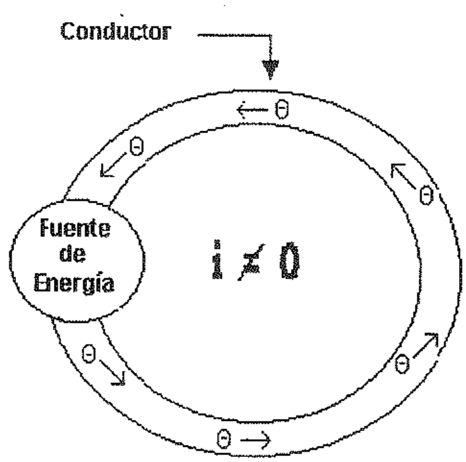
Un circuito eléctrico es un conjunto de elementos conductores que forman un camino cerrado, por el cual puede circular una corriente eléctrica.

Figura 2.1.- Camino cerrado para la corriente



En la Fig. 2.1 se muestra un camino cerrado, sin desplazamiento *neto* de electrones libres, debido a que no existe una fuerza eléctrica que mueva las cargas. Para que en un circuito fluya una corriente eléctrica, se requiere de una fuente de energía para que las cargas se puedan desplazar.

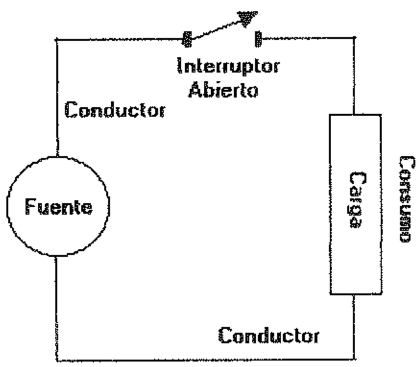
Figura 2.2.- Camino cerrado con fuente de energía



Circuito Abierto:

No existe un camino cerrado para la circulación de la corriente (existe interrupción).

Fig.2.5.- Modelo circuital de circuito abierto

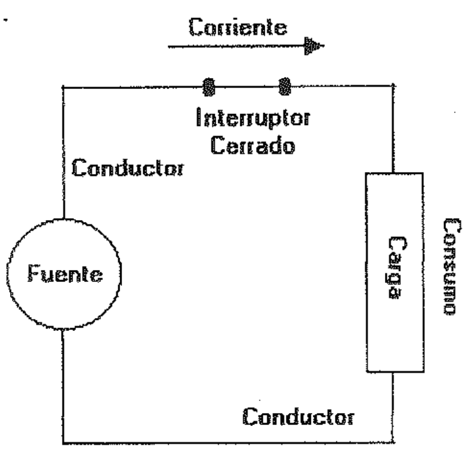


Se incorpora un elemento interruptor, que puede ser accionado externamente

Circuito Cerrado:

No hay interrupción, existe camino cerrado.

Fig.2.6.- Circuito cerrado



El *interruptor* se muestra cerrado o en "cortocircuito"

2.3.- Componentes de un circuito elemental

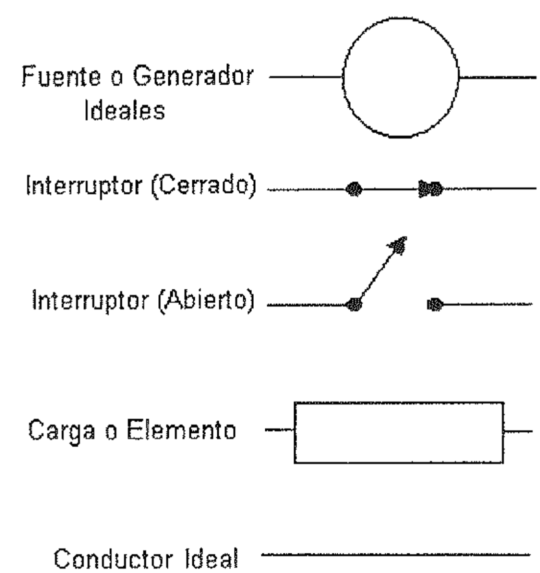
1. Generador o fuente de energía: Suministra la energía a las cargas para que la corriente eléctrica circule por el circuito.

2. Interruptor: Sirve para abrir o cerrar el circuito, puede ser manual o automático

3. Carga: Puede ser cualquier tipo de aparato eléctrico.

4. Conductores de unión: Sirven para interconectar los distintos elementos del circuito, permitiendo la circulación de corriente y así transportar la energía desde el generador hasta las cargas.

Fig.2.7.- Símbolos de elementos de circuitos



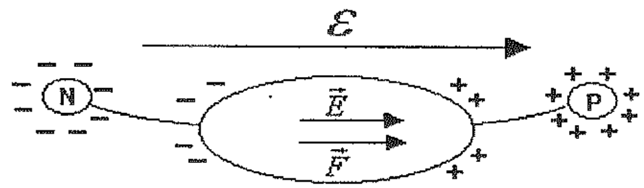
Observación:

Se emplea el término "IDEAL" para indicar que se trata de componentes o elementos de circuito sin pérdidas.

2.4.- Fuentes de Energía (Generadores de Fuerza Electromotriz)

Para que exista una corriente se requiere de una fuente de energía. Al interior de cada fuente se generan fuerzas de origen no eléctrico, que actúan sobre cargas positivas o negativas, empujándolas en sus respectivas direcciones. Por ejemplo: Batería, fuerza de origen químico; Alternador, fuerza de origen magnético.

Figura 2.8.-Concepto de f.e.m. en un generador



$\vec{F}$ = Fuerza de origen no eléctrico $= Q \cdot \vec{E}$

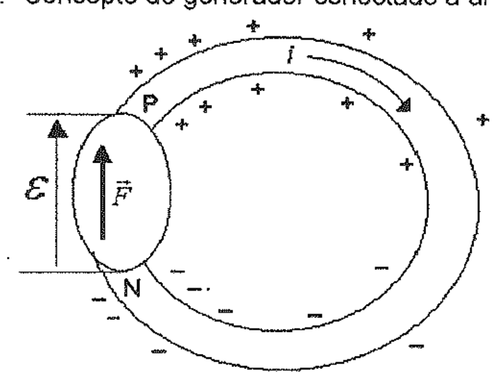
$\vec{E}$ = Campo eléctrico interno

$\mathcal{E}$ = Fuerza electromotriz $= \dfrac{1}{\Delta q}\int_N^P \vec{F}\cdot d\vec{l}$ [Volt]

La fuerza electromotriz ε, se define como el trabajo por unidad de carga, realizado por la fuerza de <u>origen no eléctrico</u> (fuerza motriz = F), para llevar la unidad de carga desde el borne N al borne P.

Observe que el nombre f.e.m para ε no es del todo apropiado, dado que ε es un escalar, no un vector. Es solo una asociación, ya que F es una fuerza motriz.
La unidad de la f.e.m es el volt.

Figura 2.9.- Concepto de generador conectado a un circuito

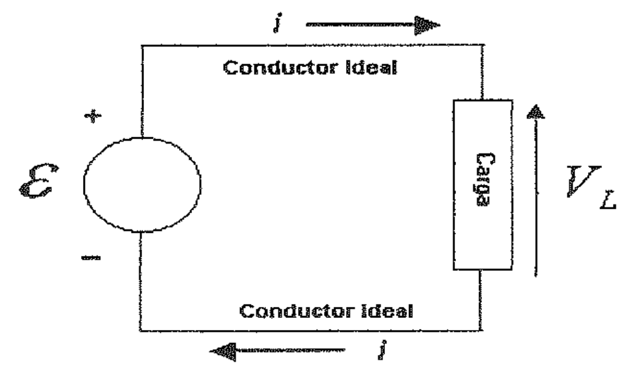


$$\mathcal{E} = \frac{1}{\Delta q}\int_N^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_N^P \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_{PN} \text{ [V]}$$

El generador empuja las cargas libres dentro de él y crea una distribución de cargas a través del circuito.

- La carga neta por unidad de volumen es cero, las cargas se mueven a través de cada elemento de volumen, pero existe un flujo uniforme.
- Toda la carga neta reside en la superficie del material conductor.
- Es función del generador suministrar las cargas por un extremo del conductor y removerlas desde el otro extremo.
- El campo interno es producido por las cargas que están en la superficie.

Figura 2.10.- Circuito elemental



$$V_L = \mathcal{E}$$

En el circuito elemental de la Fig. 2.10 se tiene:

ε : Tensión, Voltaje o Diferencia de Potencial en los terminales (bornes) de la fuente.

V_L: Diferencia de potencial, voltaje o caída de tensión que existe en los bornes de la carga.(Se emplea subíndice L del inglés "load")

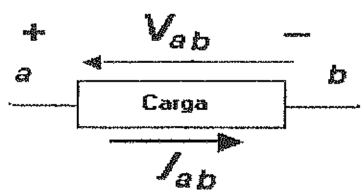
- Representa una caída de potencial dado que las cargas pierden energía potencial a medida que se desplazan de un extremo a otro.
- Por donde ingresa la corriente, las cargas poseen una energía potencial mayor, razón por la cual a este extremo se le asigna un signo (+). (indicando punto de mayor potencial).
- Por donde sale la corriente, las cargas poseen una energía potencial menor respecto al otro extremo. Por eso, a este extremo se le asigna un signo (-).(indicando punto de menor potencial)
- Por esta razón a V_L también se le denomina caída de potencial, caída de voltaje, caída de tensión.

La fuente suministra energía a las cargas, entonces el extremo por donde sale la corriente es un punto de mayor potencial (+) y el otro uno de menor potencial (-). También, los signos (+) y (-) se pueden asociar a la concentración de cargas (polaridad) de cada extremo.

Como las cargas son empujadas desde un punto de menor potencial a uno de mayor potencial, es costumbre usar una flecha para indicar este sentido, y se dice que es el sentido de la f.e.m (en velocidad es asociada al sentido de la fuerza motriz Fi).

Así, si recorremos un elemento (carga) desde un punto de mayor a uno de menor potencial, desde *a* hacia *b* en la Fig. 2.11, se tiene una caída de potencial en una carga.

Figura 2.11.- Concepto de caída de potencial ($V_a > V_b$)



Si lo recorremos, en sentido inverso, se tiene un aumento de potencial ($V_a > V_b$).

En resumen, se denomina Fuente de Energía a todo elemento activo, de dos terminales, capaz de suministrar energía a un sistema.
En sistemas eléctricos, las fuentes de energía pueden suministrarla a partir de una tensión entre sus terminales (generador de tensión) o a partir de una corriente que debe fluir por sus terminales (generador de corriente).
Para efectos del análisis de sistemas eléctricos, los generadores reales (físicos) se representan mediante modelos construídos en base a elementos ideales.

2.5.- Fuentes Ideales.

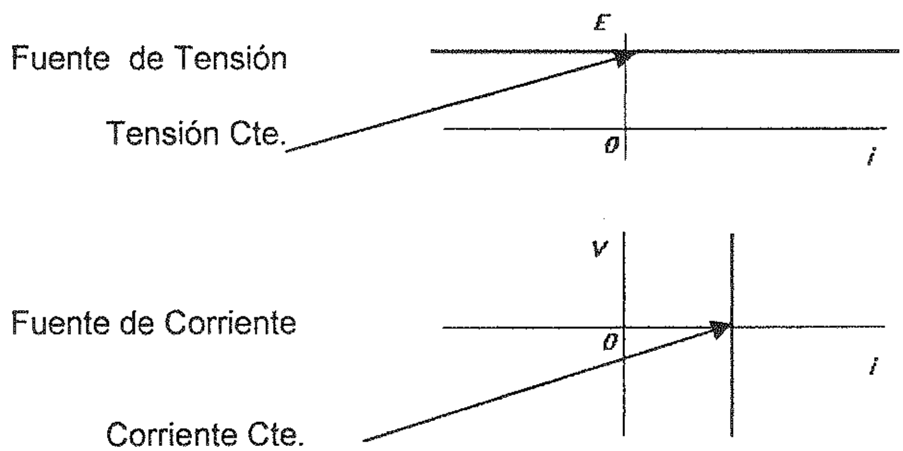
Las fuentes de tensión ideales son capaces de mantener la diferencia de potencial entre sus terminales, en forma independiente de la corriente que absorban o suministren.
E_{ab} representa la tensión de la fuente, independiente de su corriente, cuyos terminales son *a,b* .

Obsérvese que para indicar una fuente de tensión se emplea la variable E ó $\mathcal{E}$.
Las fuentes de corriente ideales son atravesadas por una corriente independiente de la tensión entre sus terminales.
I_{ab} representa la corriente de la fuente, independiente de su tensión, cuyos terminales son *a,b*.

En un elemento, para representar la diferencia de potencial entre sus terminales (o caída de tensión) se emplea la variable *V*.

En la Fig. 2.12 se presenta el comportamiento de fuentes ideales en un gráfico de Tensión *(V)* versus Corriente *(I)*

Fig.2.12.- Fuentes Ideales de Tensión y Corriente



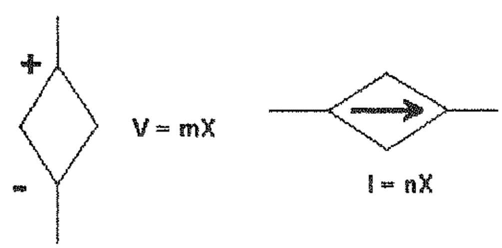
2.6.- Fuentes Independientes y Dependientes

Una fuente independiente es un generador de tensión o corriente cuya función de salida no depende de otros elementos o variables de un sistema eléctrico.

Una fuente controlada es un generador de tensión o corriente cuya función de salida depende de una o más variables de un sistema eléctrico.

Una fuente dependiente es un generador de tensión o corriente cuya función de salida depende de otros elementos o variables de un sistema eléctrico.

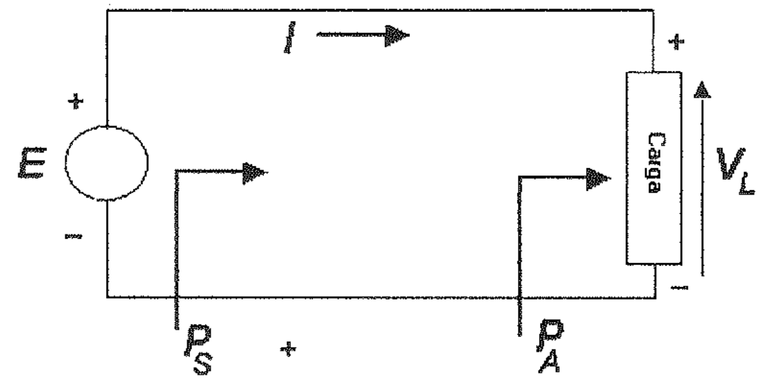
Fig.2.13.- Fuentes controladas



m,n: parámetros de control
X : variable de control
V,I : variables controladas

2.7.- Potencia: suministrada por la fuente / absorbida por la carga

Fig.2.14.- Concepto de potencia suministrada y potencia absorbida



Potencia Suministrada $P_S = E \cdot I$ Potencia Absorbida $P_A = V_L \cdot I$

Si los conductores de unión son ideales, entonces,

$$P_S = P_A$$

La energía potencial cedida por las cargas en el consumo, se puede transformar, almacenar o disipar, o puede suceder una combinación de ellas.

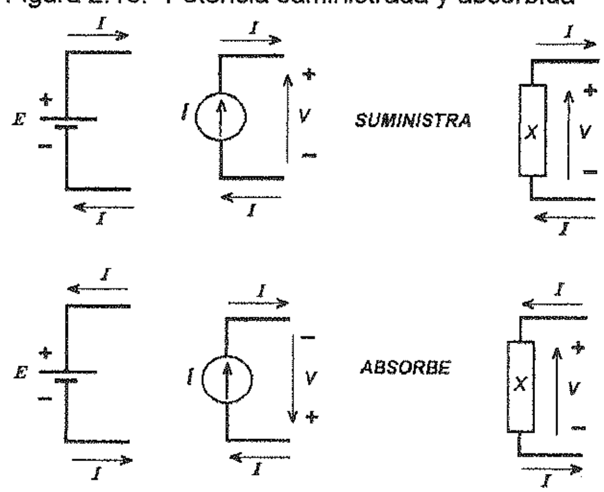
La energía adquirida por las cargas al interior de la fuente, es la energía que entrega la fuente.

En la Figura 2.15, la tensión *E*, la corriente *I* y la caída de tensión *V* tienen valores *reales* positivos en todas los casos.

El elemento *X* representa el caso general:

"Si la corriente *real* entra por el terminal positivo *real*, el elemento *absorbe*, en caso contrario, suministra potencia"

Figura 2.15.- Potencia suministrada y absorbida



CAPITULO 3

LEYES APLICADAS A CIRCUITOS

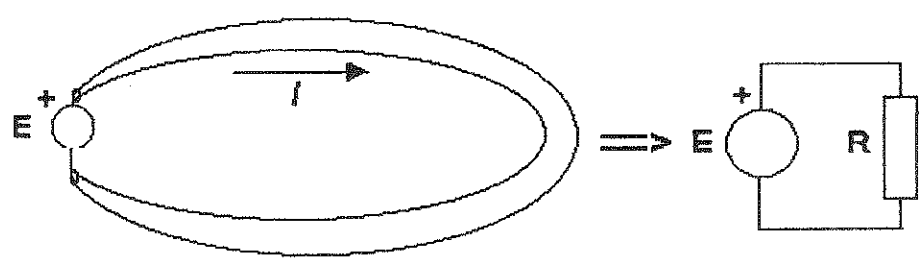
3.1.- Ley de Ohm en Corriente Continua

Georg Simon Ohm en 1826 determinó cuantitativamente la relación tensión/corriente en un elemento y se denomina **LEY DE OHM**.

"La relación que existe entre la tensión aplicada a dos puntos de un elemento conductor y la corriente que circula entre las mismas, es una constante que llamaremos resistencia eléctrica".

Resistencia Eléctrica de un Conductor es la oposición que ofrece el conductor al desplazamiento de los electrones.

Figura 3.1 Concepto de Resistencia Eléctrica



Enunciado mas conocido de la Ley de Ohm:

"La corriente eléctrica que circula por un conductor es directamente proporcional a la tensión *E* aplicada entre sus extremos e inversamente proporcional a la resistencia *R* que ofrece entre los mismos".

$$I = \frac{E}{R}$$

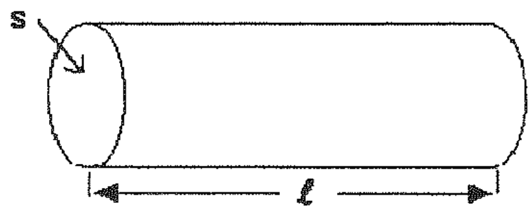
Ejemplo: Calcular la resistencia que ofrece un conductor por el que circula una corriente de 10 mA cuando se le aplica una tensión de 100 [V].

$$R = \frac{E}{I} = \frac{100}{10 \cdot 10^{-3}} = 10000 = 10 \quad k\Omega$$

3.1.1.- Resistencia Eléctrica de Conductores Homogéneos.

Conductores homogéneos, pueden ser metálicos o no metálicos, simples o compuestos.

Figura 3.2.- Resistencia de elemento conductor homogéneo



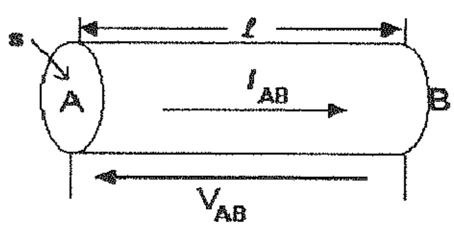
$$R = \frac{\rho \cdot \ell}{s}$$

ρ: resistividad propia del *material* conductor, característica del material homogéneo del cual está compuesto el elemento de circuito.

R: Resistencia, parámetro eléctrico, propio de cada *elemento de circuito*, que indica la oposición que ofrece al paso de la corriente eléctrica.

La resistividad ρ del material que constituye un conductor homogéneo, cuya longitud es ℓ y su sección constante es s , se determina mediante la inyección de una corriente (I_{AB} en la Fig. 3.3) y midiendo la caída de tensión V_{AB} entre sus extremos, para calcular R_{AB} y obtener ρ .

Figura 3.3 Determinación de Resistividad del material en un conductor homogéneo de sección constante.



$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} \qquad \rho = \frac{R_{AB} \cdot s}{\ell}$$

DIMENSION DE ρ $\left[\frac{\Omega \cdot m^2}{m}\right] = [\Omega \cdot m]$

3.1.2.- Conductancia: Es la propiedad inversa a la resistencia y representa la facilidad que ofrecen los conductores al paso de la corriente eléctrica. Se simboliza con la letra *G*.

$$G = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\Omega}\right]$$

La conductancia de un conductor que tiene una resistencia eléctrica de 1Ω es de $1S$ (Siemens, unidad de conductancia en el S.I., antiguamente denominada *mho*)

3.1.3.- Conductividad: Es la inversa de la resistividad. Indica la facilidad que ofrece un tipo dado de material homogéneo al paso de la corriente eléctrica. Se simboliza con la letra griega σ (sigma).

$$\sigma = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\Omega \cdot m}\right] \; ó \left[\frac{S}{m}\right]$$

3.1.4.- Influencia de la temperatura en la resistividad

En algunos materiales, mientras aumenta la temperatura, ρ aumenta y al bajar la temperatura ρ disminuye. Estos se denominan materiales con característica de coeficiente de temperatura (α_T)positivo

$$\rho(t_2) = \rho(t_1)[1 + \alpha_T(t_2 - t_1)]$$

Modelo lineal, válido dentro del rango de temperaturas normales de operación de los conductores.

Por lo tanto:

$$R(t_2) = R(t_1)[1 + \alpha_T(t_2 - t_1)]$$

α_T : coeficiente de temperatura en torno a t_1 y t_2

α_0: coeficiente de temperatura a cero °C

$\alpha_0 > 0$ (ej.:metales) ; $\alpha_0 < 0$ (ej.:carbono, germanio)

3.1.5.- Superconductividad: ciertos conductores cuando son enfriados hasta temperaturas próximas al cero absoluto, la resistencia desaparece por completo, este fenómeno recibe el nombre de superconductividad y el elemento conductor se denomina superconductor.

3.1.6.- Ley de Joule en Corriente Continua.

Como se dijo anteriormente, el paso de una corriente por un conductor produce calor, fenómeno denominado ***efecto Joule***.

El calentamiento del conductor es mayor cuanto mayor es la corriente que circula y cuanto mayor es la oposición que encuentran los electrones a ser desplazados (resistencia).

Ley de Joule: La cantidad de calor *Qc* desprendida por unidad de tiempo en un conductor es proporcional al cuadrado de la intensidad *I* de la corriente y a la resistencia *R* del conductor:

Si *I* [A] ; *R* [Ω] ; *t* [s], la cantidad de *energía eléctrica transformada en calor* está dada por:

$$Qc = I^2 \cdot R \cdot t \text{ [joule]}$$

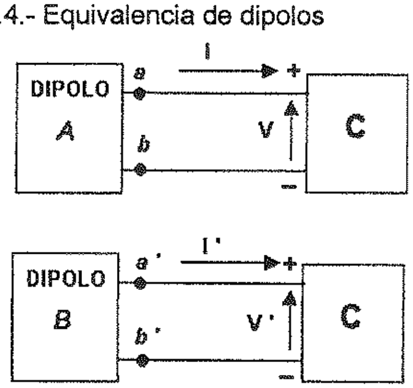
Frecuentemente, para energía eléctrica y térmica usan otras unidades.

1 joule = 0.239 cal. (calorías)
1 Mcal = 1.163 kWh (kilowatt-horas)
1 cal = 4.185 joule

3.2.- Equivalencia de dipolos

La equivalencia entre dos dipolos se define con respecto a sus terminales. Dos dipolos son equivalentes cuando, para las mismas condiciones de carga C, el voltaje entre y la corriente a través de los terminales, son respectivamente iguales en ambos dipolos.

Fig.3.4.- Equivalencia de dipolos



Ambos dipolos son equivalentes si se cumple que $V' = V$ y que $i' = i$

Fig. 3.5.- Fuentes de tensión en serie y fuentes de corriente en paralelo.

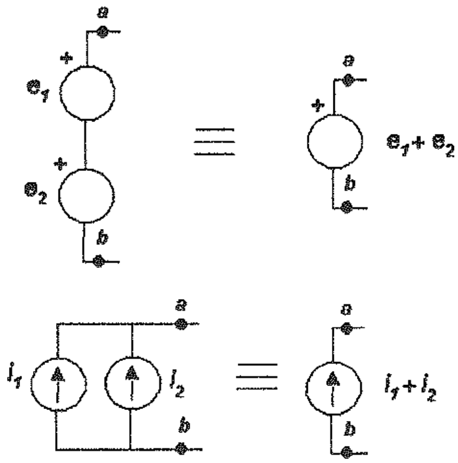
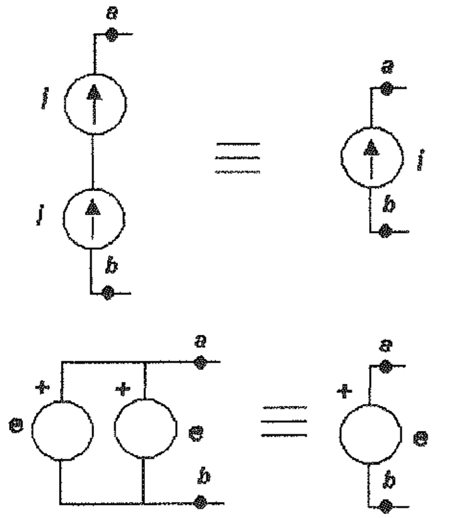
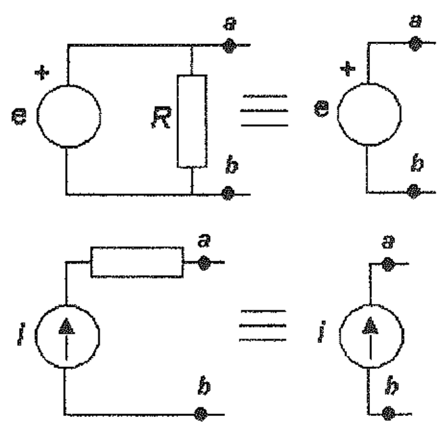


Fig.3.6.- Equivalencias válidas SOLO si las corrientes o tensiones son iguales



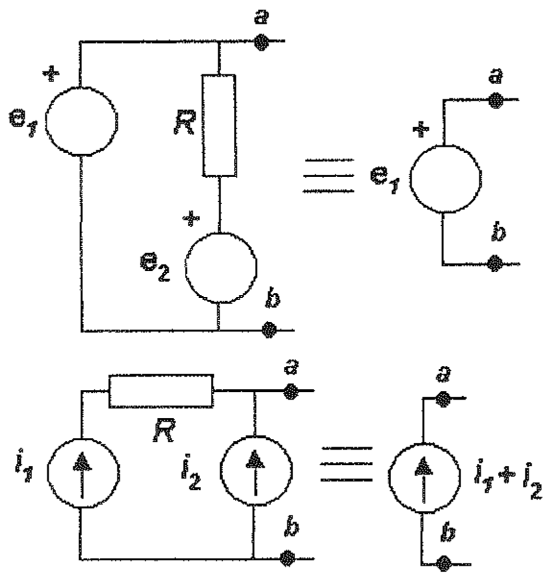
No es posible conectar en paralelo fuentes ideales de tensiones diferentes

Fig. 3.7.- Configuraciones en que la conexión de una resistencia no afecta la tensión o corriente de salida de una fuente, respectivamente.



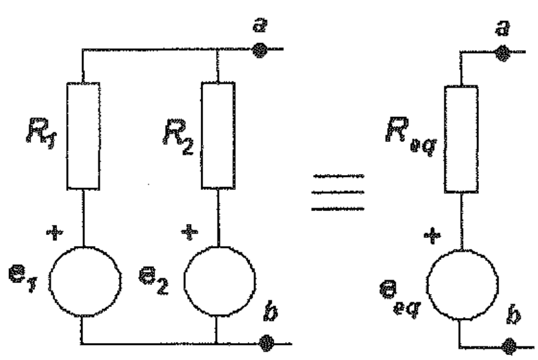
- La potencia suministrada por la fuente de tensión *SI* se afecta.
- La potencia suministrada por la fuente de corriente y la tensión entre terminales *a* y *b* *SI* se afecta

Fig.3.8.- Combinación de fuentes IDEALES con resistencias intercaladas



Observar que existe potencia disipada en R en ambos casos.

Fig. 3.9.- Equivalente de fuentes reales en paralelo



Se pueden conectar fuentes <u>reales</u> de voltaje en paralelo de valores diferentes.TENIENDO CUIDADO que permitan dicha conexión, con respecto a los niveles de tensión y potencias en juego.

3.2.1.- Transformacion de fuentes reales

Fig. 3.10.- Transformación de fuente real de corriente en fuente real de tensión

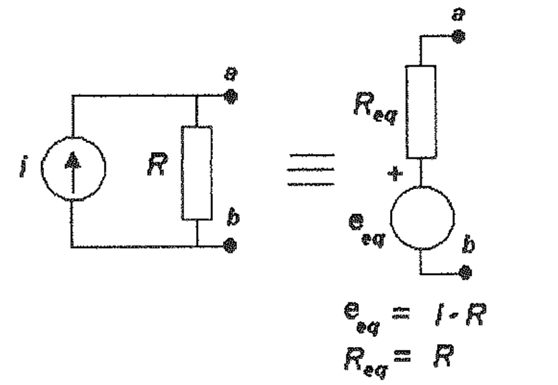
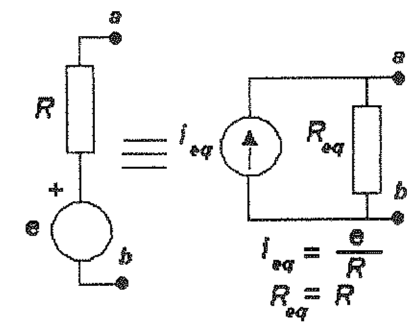


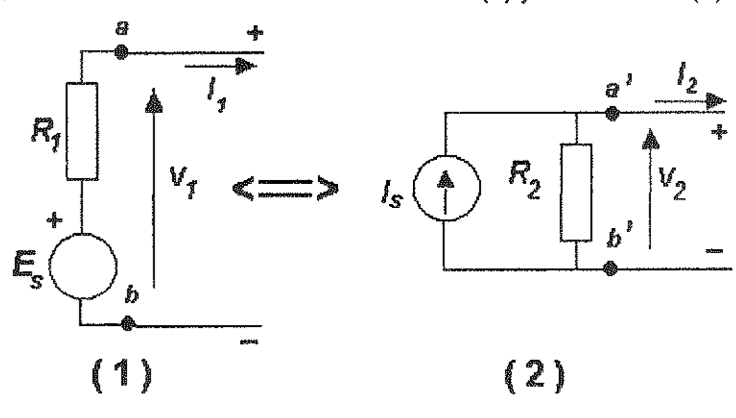
Fig. 3.11.- Transformación de fuente real de tensión en fuente real de corriente.



Desarrollo:

Para que ambas fuentes de la Fig. 3.12 sean equivalentes, se debe cumplir que desde sus terminales hacia el circuito que alimentan (para la misma condición de carga) las variables corriente y voltaje se conserven.

Fig. 3.12.- Modelos de fuentes reales de tensión (1) y de corriente (2).



Debe cumplirse entonces: $V_1 = V_2 = V_0$ "tensión de salida"
$I_1 = I_2 = I_0$ "corriente de salida"

En la fuente (1) $V_0 = E_s - R_1 \cdot I_0$

En la fuente (2) $I_0 = I_s - V_0/R_2 \Rightarrow V_0 = R_2 \cdot I_s - R_2 \cdot I_0$

Para que ambas ecuaciones sean iguales:

$$R_1 = R_2 = R_s$$

$$E_s = R_2\, I_s = R_s\, I_s$$

$$I_s = E_s/R_s$$

En los siguientes gráficos se observa la analogía (identidad) de comportamiento. Debido a que se trata de modelos lineales, basta que las condiciones se cumplan para dos situaciones extremas de salida: Circuito abierto (①) y cortocircuito (②).

Fig.3.13.- Característica V/I de fuente de Tensión E con R_i en serie. [Fig.2.22(1)]

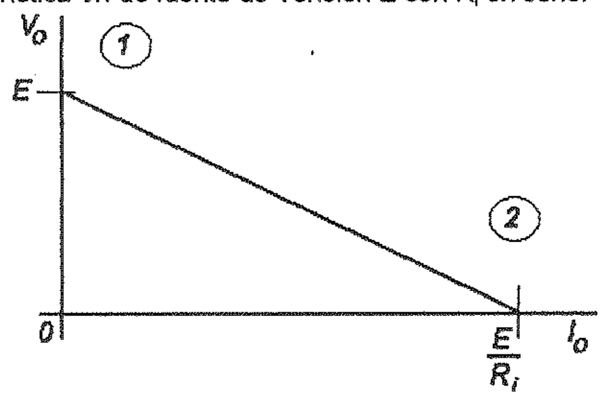
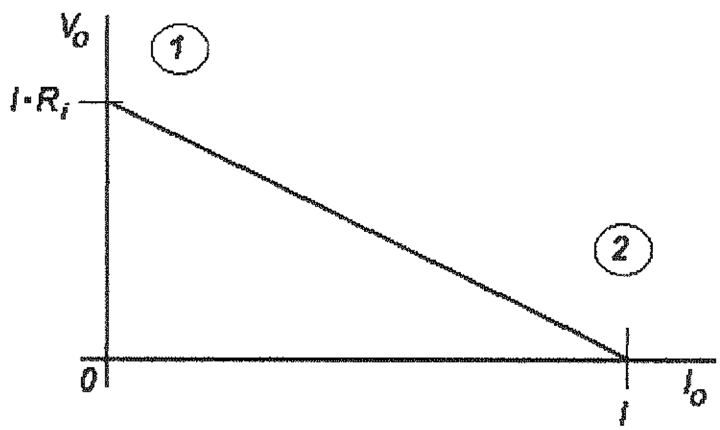


Fig. 3.14.- Característica V/I de fuente de corriente I con R_i en paralelo. [Fig. 2.22(2)]



NOTA: Las fuentes ideales no tienen equivalencia por transformaciones.

3.3.- Elementos de circuitos

3.3.1.- Componentes y Elementos.

Se denominan *"componentes"* a los dispositivos físicos individuales más pequeños que forman parte del circuito eléctrico sin los cuales no puede funcionar, excluidas las interconexiones.

Se denominan *"elementos"* a los componentes elementales de dos terminales, caracterizados por su parámetro concentrado, con una sola función.

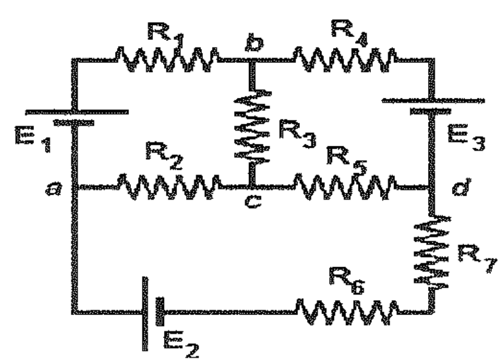
Los componentes (reales) se modelan mediante elementos ideales, para representar sus características de comportamiento eléctrico.

Los componentes, con sus características técnicas, se describen en manuales en los cuales se listan sus *características físicas* y sus *parámetros.*

Los parámetros se utilizan en los modelos matemáticos y representan las características eléctricas del elemento, datos necesarios para la resolución de los problemas de análisis y síntesis de sistemas eléctricos.

3.3.2.- Circuito eléctrico de corriente continua y elementos que lo componen.

Fig. 3.15.- Circuito de Corriente Continua, compuesto por fuentes y resistencias interconectadas.



En la Fig. 3.15.- se tiene:

Elementos : { E_1, E_2, E_3, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 } Nudos: { a, b, c, d }

Elementos y componentes *activos*: son elementos o componentes cuyo modelo contiene fuentes de tensión o de corriente, capaces de suministrar energía al circuito: $\{E_1, E_2, E_3\}$

Elementos *pasivos*: son aquellos que no contienen fuentes de tensión o de corriente: resistencias, bobinas y condensadores que transforman (absorben) o almacenan la energía suministrada por las fuentes: $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$

Nudo: punto de un circuito donde concurren dos o más conductores. Por simplicidad se considerarán puntos con tres o más conductores: {a, b, c, d}

Rama: conjunto de todos los elementos de un circuito comprendido entre dos nudos consecutivos. En el ejemplo hay 6 ramas: {ab, bd, bc, ad, dc, ac}

Malla: conjunto de ramas que forman un camino cerrado en un circuito y que no puede subdividirse en otros, ni pasar dos veces por la misma rama:
{abda, dbcd, adca}

Lazo: conjunto de todos los elementos que forman un camino cerrado (identificado por el recorrido de nudos adyacentes) de un circuito que, a su vez se puede subdividir en otros que llamamos malla: {abcda, abdca, bdacb, abca}

Parámetro: factor que caracteriza el comportamiento eléctrico de un elemento de la red, puede ser constante o variable.

Circuito lineal: aquél cuyo modelo matemático posee sólo variables en 1ª potencia.

3.4.- Leyes de Kirchhoff.

3.4.1.- Primera ley de Kirchhoff o Ley de las Corrientes

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

"La suma algebraica de todas las corrientes que concurren a un nudo es igual a cero, consideradas todas ellas en el mismo instante de tiempo".

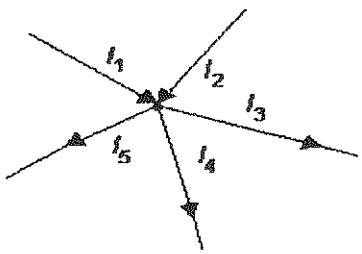
$$\sum_{Nudo} I = 0$$

Convenio: Considerar positivas (+) las corrientes que llegan al nudo y negativas (-) las que salen. Equivalentemente: $\Sigma\, I$ *(entran)* = $\Sigma\, I$ *(salen)*

Fig. 3.16.- 1ª Ley de Kirchhoff

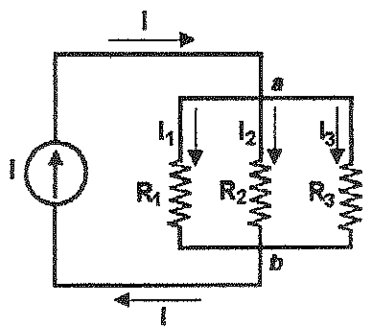
$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$ ← Suma algebraica

$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$ ← Suma de corrientes que llegan = Suma de corrientes que salen



En un nudo no se puede acumular carga eléctrica

Fig. 3.17.- Ejemplo de aplicación de la 1ª Ley de Kirchhoff



Para el nudo *a*: $I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$ o bien $I = I_1 + I_2 + I_3$

Para el nudo *b*: $I_1 + I_2 + I_3 - I = 0$ o bien $I_1 + I_2 + I_3 = I$

3.4.2.- Segunda Ley de Kirchhoff o Ley de Las Tensiones

"La suma algebraica de las tensiones alrededor de cualquier camino cerrado (malla o lazo) de una red es igual a cero es todo instante de tiempo". (Conservación de la energía).

$$\sum_{Lazo} V_k = 0$$

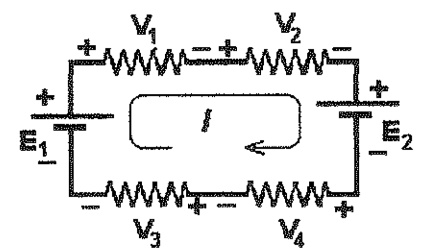
Consideraremos positivas las caídas de tensión de acuerdo a la convención normal, es decir, la corriente positiva llega al elemento por su terminal de potencial positivo.

En la Fig. 3.18 , las tensiones V_1, V_2, V_3, V_4, y E_2 son positivas, pero E_1 es negativa.

Por lo tanto la 2ª Ley de Kirchhoff, aplicada a la Fig. 3.18 se puede escribir:

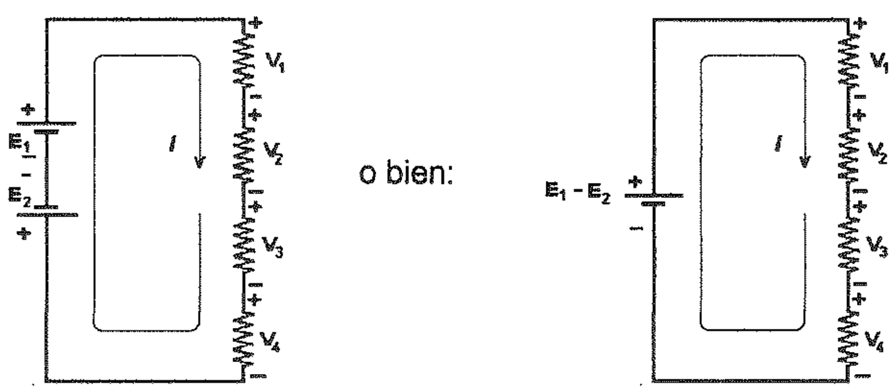
$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + E_2 - E_1 = 0$

Fig. 3.18.- 2ª Ley de Kirchhoff



Otra forma es sumar las caídas de tensión, las que deben ser igual a la suma algebraica de las tensiones aplicadas. En la Fig. 3.18.: $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = E_1 - E_2$ Esto se visualiza más facilmente en la Fig.3.19, en la cual se han agrupado las fuentes y las resistencias.

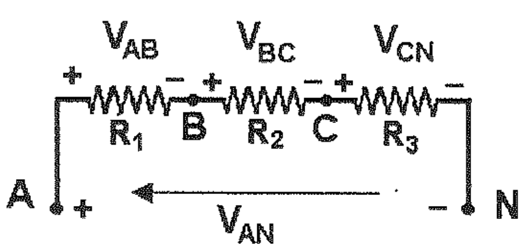
Fig.3.19.- Trasposición de elementos de la Fig. 3.18



3.5.- Conexiones usuales de Resistencias.

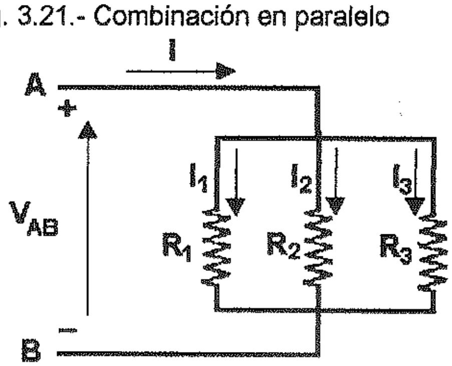
3.5.1.-Serie

Fig. 3.20.- Combinación en serie



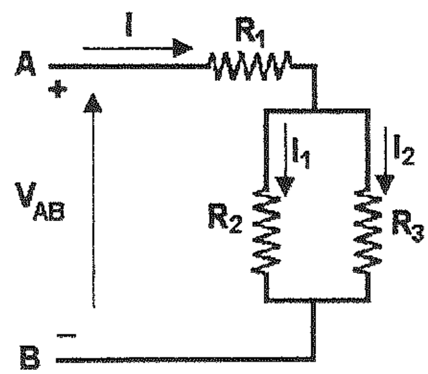
3.5.2.- Paralelo

Fig. 3.21.- Combinación en paralelo



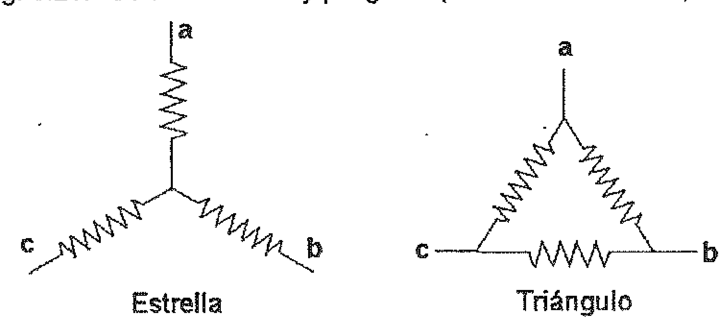
3.5.3.- Serie/Paralelo (Mixta)

Fig. 3.22.- Combinación mixta



3.5.4.- Estrella y Triángulo

Fig. 3.23.- Conexión radial y poligonal (Caso 3 resistencias)



3.5.5.- Definición de *resistencia equivalente* R_{eq}

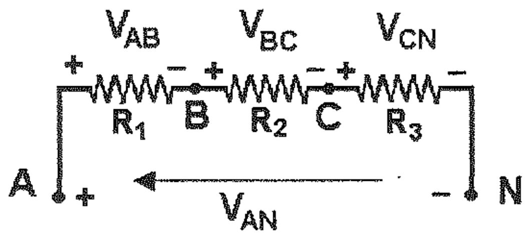
Es aquella que puesta al reemplazar una combinación de resistencias; produce los mismos efectos, es decir, absorbe la *misma corriente*.
Observar que no necesariamente la resistencia equivalente disipará la misma potencia que la combinación que reemplaza en una configuración dada.

3.6.- Análisis de conexiones de resistencias.

3.6.1.- Resistencias en serie

Las resistencias ofrecen un camino único entre los puntos A y N para el paso de la corriente.

Fig. 3.24.- Resistencias en serie



Empleando la 2ª Ley de Kirchhoff

V_{AN} = Voltaje aplicado

$V_{AN} + V_{AB} + V_{BC} + V_{CN} = 0$

$V_{AN} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CN}$

$V_{AB} = R_1\, I$

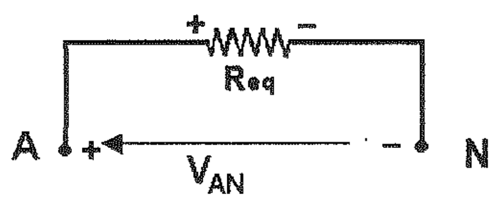
$V_{BC} = R_2\, I$

$V_{CN} = R_3\, I$

$V_{AN} = I\cdot(R_1 + R_2 + R_3) = I\cdot R_{eq}$

$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$

Fig. 3.25.- Resistencia equivalente



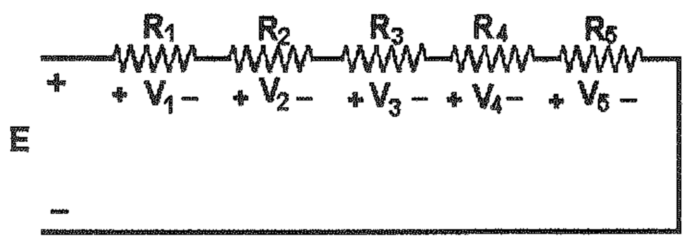
Para el caso de "n" resistencias en serie, la resistencia equivalente es $R_{eq} = \sum_{1}^{n} R_i$

Resistencia equivalente circuito serie es igual a la suma de todos las resistencias que intervienen.
Tensión total aplicada circuito serie: Es igual a la suma de todas las tensiones parciales (caídas de tensión)

Potencia total disipada en el circuito: Es igual a la suma de las potencias disipadas en cada resistencia.

Ejemplo: En la Fig.3.15, $R_1 = R_2 = 20\Omega$; $R_3 = R_4 = 30\Omega$; $R_5 = 10\Omega$ $E = 220V$

Fig.3.26.- Resistencias en serie



a) La resistencia equivalente es $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 110\ \Omega$

b) La caída de tensión en cada resistencia se obtiene a partir de $I = \dfrac{E}{R_{eq}}$

$V_1 = I \cdot R_1 = 20 \times 2 = 40V$
$V_2 = I \cdot R_2 = 20 \times 2 = 40V$
$V_3 = I \cdot R_3 = 30 \times 2 = 60V$
$V_4 = I \cdot R_4 = 30 \times 2 = 60V$
$V_5 = I \cdot R_5 = 10 \times 2 = 20V$

$E = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 220\ V$

c) La potencia disipada en cada resistencia se obtiene de $P_i = I^2 R_i$

$P_1 = 80W$
$P_2 = 80W$
$P_3 = 120W$
$P_4 = 120W$
$P_5 = 40\ W$

d) La potencia total <u>disipada</u> por las resistencias del circuito:

$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 440\ W$

e) Potencia total <u>suministrada</u> por el generador al circuito:

$P_S = E\ I = R_{eq}\ I^2 = 440\ W$

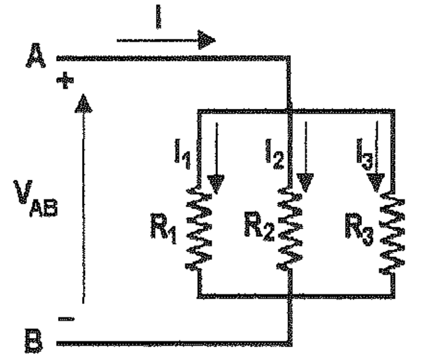
Observación:

La potencia total *suministrada* por la fuente del sistema es igual a la potencia total *disipada* en las resistencias.

3.6.2.- Análisis de conexión de resistencias en paralelo

El voltaje aplicado a cada resistencia es el mismo, ofreciendo cada resistencia un camino distinto para el paso de la corriente.

Fig. 3.27.- Resistencias en paralelo



$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} \quad I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}$

Aplicando la Ley de Corrientes de Kirchhoff

Entonces: $I = I_1 + I_2 + I_3$

Reemplazando: $I = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3}$

Por lo tanto: $\frac{I}{V_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Pero $\frac{I}{V_{AB}} = G_{AB}$, es decir la conductancia equivalente es igual a la suma de las conductancias de las resistencias conectadas en paralelo.

La resistencia equivalente es el recíproco de la conductancia equivalente:

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{AB}}$$

Para el caso de "n" resistencias en paralelo : $G_{eq} = \sum_{1}^{n} G_i$

El valor recíproco de la resistencia equivalente (conductancia equivalente), de un conjunto de "n" resistencias en paralelo, es igual a la suma de los recíprocos (conductancias) de las resistencias.

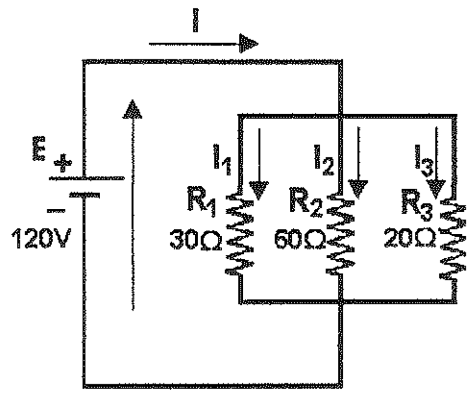
Observaciones:

Siempre $R_{eq} < \min(R_1, R_2, \ldots R_n)$

Para el caso particular de dos resistencias *R1* y *R2* conectadas en paralelo, su equivalente es: $R_{eq} = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$

Ejercicio: Resolver circuito de Fig. 3.17.

Fig.3.28.-Sistema de resistencias en paralelo



Solución:

a) Resistencia equivalente: $R_{eq} = \dfrac{1}{G_1 + G_2 + G_3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{20}} = \dfrac{1}{\dfrac{6}{60}} = 10\Omega$

b) Corrientes parciales

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{120}{30} = 4A \quad I_2 = \frac{E_1}{R_2} = \frac{120}{60} = 2A \quad I_3 = \frac{E_1}{R_3} = \frac{120}{20} = 6A$$

c) La potencia disipada por cada R_i: , $P_i = E \cdot I_i = R_i \cdot I_i^2$

$P_1 = 480$ W $P_2 = 240$ W $P_3 = 720$ W

d) Potencia total disipada

$P_D = P_i + P_2 + P_3 = 1440$ W

e) Potencia suministrada por el generador (fuerte)

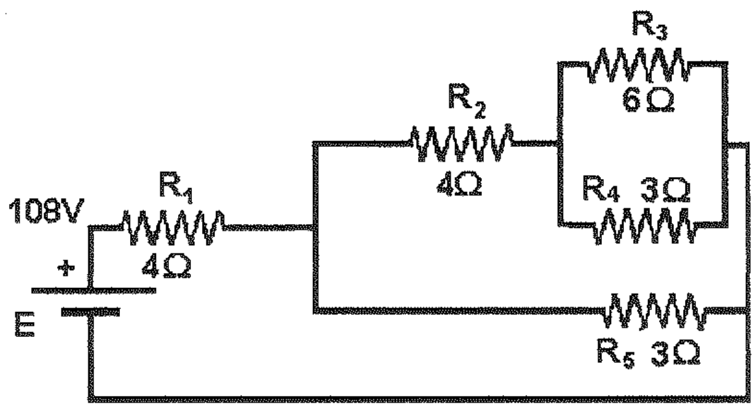
$P_G = E\ I = R_{eq} I^2 = 1440$ W

$P_D = P_G$

3.6.3.- Análisis de conexión de resistencias serie-paralelo (mixta)

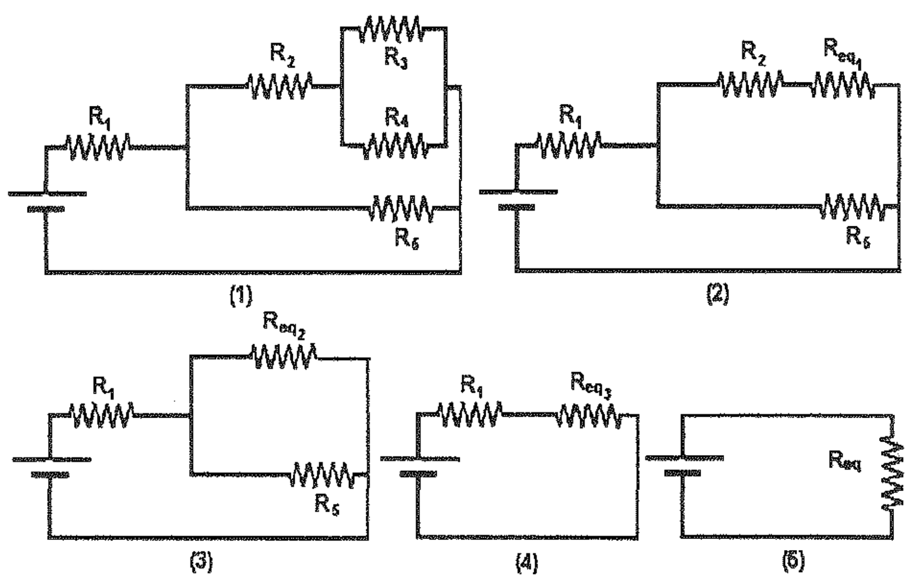
Ejemplo: Resolver el circuito de la Fig. 3.29.-

Fig. 3.29.- Sistema con combinaciones de resistencias.



Para encontrar R_{eq} se van seleccionando grupos de resistencias que estén conectados en serie o en paralelo y se simplifican, en pasos sucesivos, sustituyendo dichos grupos por sus respectivas resistencias equivalentes, como se muestra en la Fig.3.30.

Fig. 3.30.- Pasos sucesivos para resolver combinaciones de resistencias



CAPITULO 4

SOLUCION DE REDES

4.1.- Método de Mallas (lazos)

El circuito por analizar se supone compuesto por mallas o lazos, por cada uno de los cuales circula una corriente ficticia, independiente, denominada corriente de lazo.
Corriente de Malla (lazo): Es una corriente ficticia, arbitrariamente supuesta, que recorre cada malla (lazo) en un sentido dado.

Metodología:

1. Se dibujan todas las corrientes de malla (lazo), asignándoles un sentido arbitrario . La cantidad de corrientes de lazo es igual a la cantidad de lazos en el sistema.
2. Para cada malla (lazo) se plantea la ecuación de Kirchhoff de tensiones, recorriendo la malla (lazo) en el sentido de la corriente de malla (lazo).

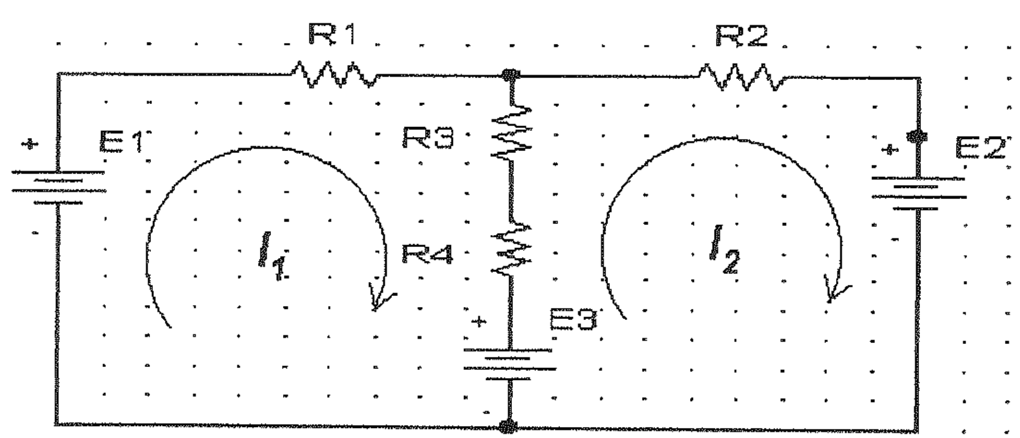
$$\sum_{k} V_e = 0 \quad ó \quad \sum E = \sum V$$

k : malla *k* (lazo *k*)
Ve, E, V: caída de voltaje de cada elemento de la malla *k* (lazo *k*) considerando el sentido de la corriente I_k para el signo correspondiente

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones.
4. Se obtienen las corrientes de rama a partir de las corrientes de malla (lazo).

Ejercicios de Ejemplo

Fig. 4.1.- Circuito con tres lazos – se escogen las dos mallas y se asignan todas las corrientes en el sentido de los punteros del reloj.



Malla 1:

$R_1I_1 + R_3I_1 + R_4I_1 - R_3I_2 - R_4I_2 + E_3 - E_1=0$ ó $R_1I_1+R_3I_1+R_4I_1-R_3I_2-R_4I_2= E_1 - E_3$

Malla 2:

$-R_4I_1-R_3I_1+R_4I_2+R_3I_2+R_2I_2+E_2-E_3=0$ ó $-R_4I_1- R_3I_1 +R_4I_2 +R_3I_2 +R_2I_2 = E_3 - E_2$

Ordenando:

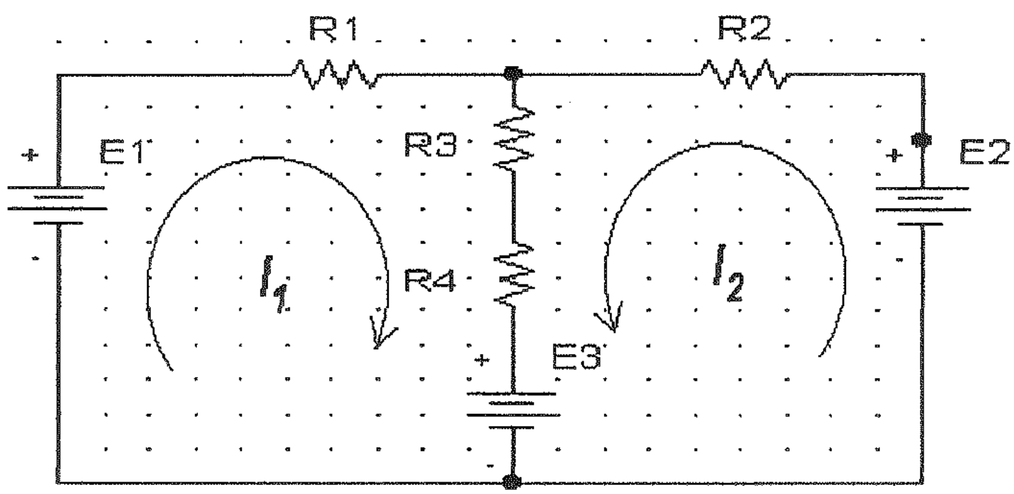
M1: $(R_1+R_3+R_4)I_1 \quad - \quad (R_3+R_4)I_2 \quad = \quad E_1 - E_3$

M2: $-(R_3+R_4)I_1 \quad + (R_2+R_3+R_4)I_2 \quad = \quad E_3 - E_2$

En esta etapa del desarrollo se tiene 2 ecuaciones (M1 y M2), con dos incógnitas (I_1 e I_2) que son las corrientes de lazo por determinar.

En el circuito de la Fig. 4.2 se ha cambiado el sentido (arbitrario) de I_2. Consecuentemente, se cambian las ecuaciones de malla.

Fig. 4.2.- Circuito con tres lazos – se escogen las dos mallas y se asignan todas las corrientes en el sentidos opuestos (se suman en R3, R4 y E3)



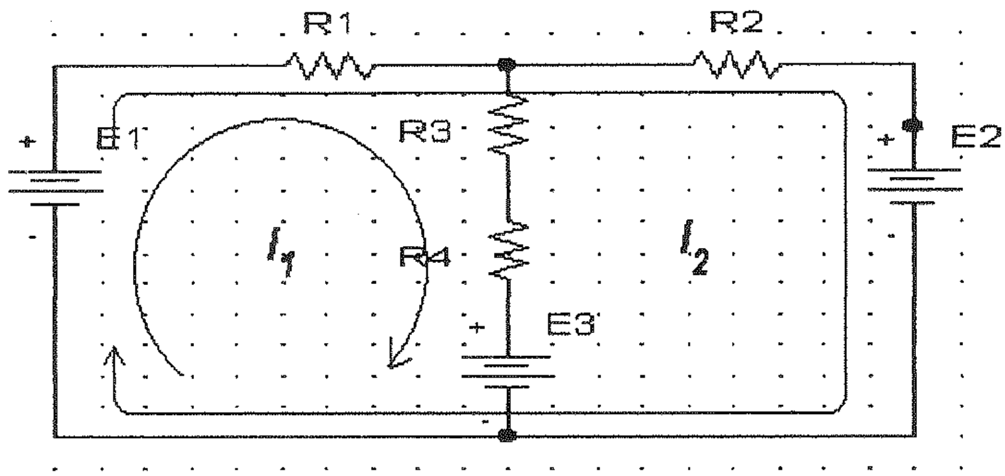
Las ecuaciones de malla son ahora:

M1: $(R_1+R_3+R_4)I_1 \quad + \quad (R_3+R_4)I_2 \quad = \quad E_1 - E_3$

M2: $(R_3+R_4)I_1 \quad + \quad (R_2+R_3+R_4)I_2 \quad = \quad E_2 - E_3$

En el circuito de la Fig. 4.3 se ha elegido otro camino posible y fijado un sentido (arbitrario) de I_2. Consecuentemente, se cambian las ecuaciones de malla.

Fig. 4.3.- Circuito con tres lazos – se escoge la malla (que contiene a E1) y el lazo exterior. Ambas corrientes se han supuesto en el sentido de los punteros del reloj.



Las ecuaciones de malla son ahora:

M1: $(R_1+R_3+R_4)I_1 + \quad R_1I_2 = E_1 - E_3$

M2: $\quad R_1I_1 + (R_1+R_2)I_2 = E_1 - E_2$

(Obsérvese que en M2 se trata de un lazo, que puede subdividirse en dos mallas)

Generalizando:

Para la malla (lazo) k, se tiene:

$$\sum_k V_e = 0$$

Que se puede expresar como:

$$\sum_k V_e pasivos = \sum_k V_e activos$$

En palabras:
Para cada malla (lazo) k, la suma de las caídas de voltaje, producidas por las corrientes de malla (lazo) en los elementos pasivos de la malla (lazo) k y medidas en el sentido de I_k es igual a la suma de los voltajes de fuentes encontradas en los elementos activos de la malla (lazo) k y medidas en el sentido de I_k.

Por lo tanto, para un sistema con m+1 lazos posibles, se tendrá, después de ordenar, un sistema con los siguientes elementos como máximo (uno o más elementos pueden ser 0):

$$
\begin{array}{llllllll}
+ R_{11}I_1 & \pm & R_{12}I_2 & +\ldots\ldots \pm & R_{1m}I_m & = & E_1 \\
R_{21}I_1 & + & R_{22}I_2 & \pm\ldots\ldots \pm & R_{2m}I_m & = & E_2 \\
\vdots & & & & & & \\
\pm R_{m1}I_1 & \pm & R_{m2}I_2 & +\ldots\ldots + & R_{mm}I_m & = & E_m
\end{array}
$$

Obsérvese que los elementos con subíndice repetido R_{kk} tienen siempre el signo positivo y corresponde a la resistencia total propia de la malla k.
Los elementos con subíndice no igual, R_{kj}, llevarán signo positivo si a las corrientes I_k e I_j se les ha asignado sentidos tales que se suman (Como en la fig. 4.4). En caso contrario el signo que antecede al elemento será negativo (las corrientes se restan)

Fig. 4.4.- El elemento R_{kj} lleva signo positivo en M_k y M_j

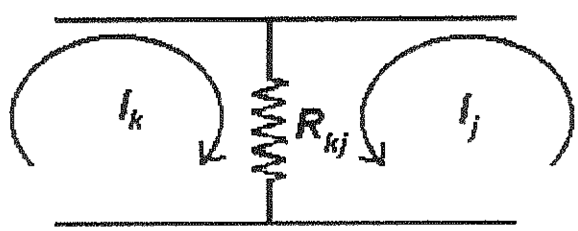
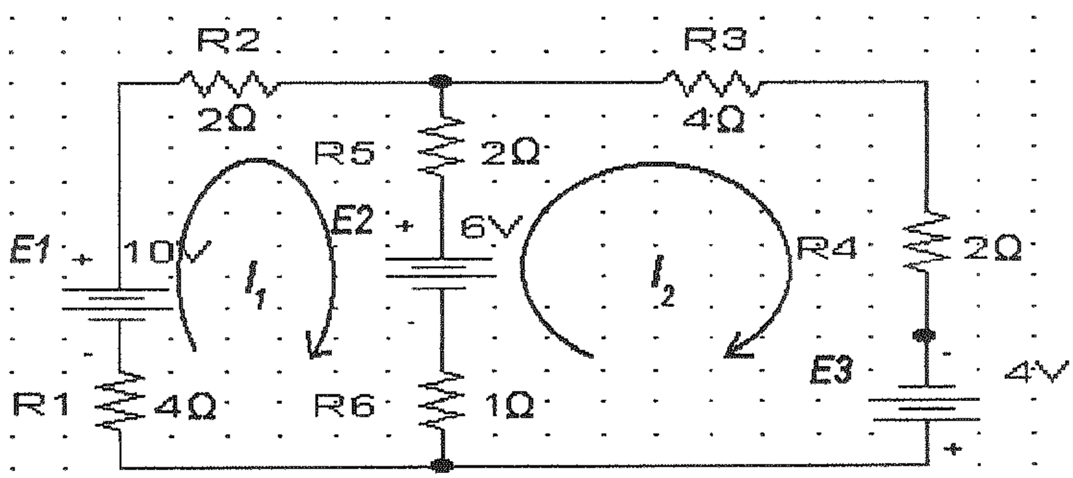
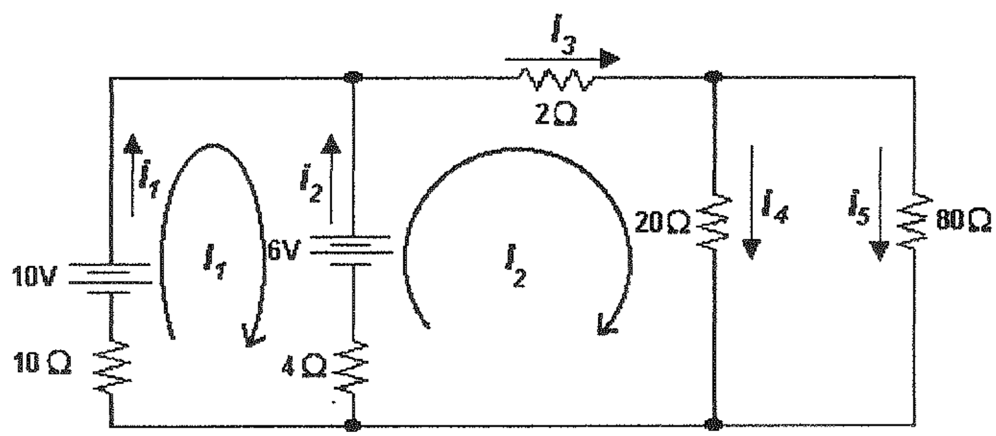


Fig. 4.5.-Asignación de corrientes de malla



Ejercicio Propuesto: En el circuito de la Fig. 4.6, las corrientes de malla se identifican con mayúsculas y las corrientes de rama con minúscula.
Use el método de mallas para determinar todas las corrientes de rama.
Observación: Simplifique el problema, reduciendo la cantidad de mallas, por ejemplo, calculando resistencias en paralelo.

Fig. 4.6.- Ejercicio

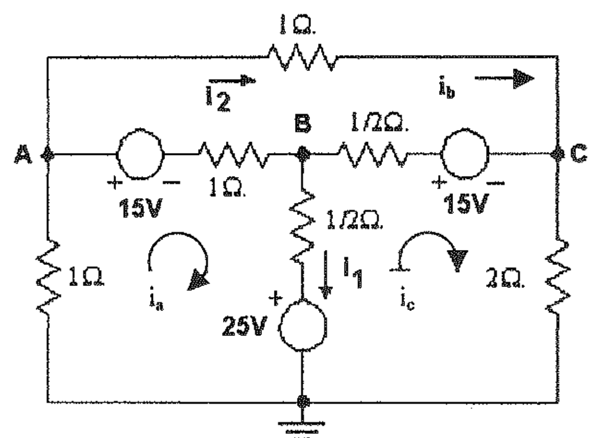


Ejercicios Resueltos:

Ejemplo 4.1.-

En el circuito de la figura, determinar:

1.- La corriente i1
2.- La corriente i2
3.- La potencia absorbida por la fuente de 25V



Planteamiento de Ecuaciones de Malla
Corrientes de malla supuestas en el sentido de los punteros del reloj.

$$\begin{array}{llr}
\text{M1:} & 2.5\, i_a - i_b - 0.5\, i_c = -40 & (1) \\
\text{M2:} & -\, i_a + 2.5 i_b - 0.5\, i_c = +30 & (2) \\
\text{M3:} & -0.5 i_a - 0.5 i_b + 3.0\, i_c = +10 & (3)
\end{array}$$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} 0.5\, i_a \;-\; 0.2\; i_b \;-\; 0.1\, i_c = -8 & (1)/5 \\ \underline{-0.5\, i_a \;-\; 0.5\, i_b \;+\; 3.0\, i_c = +10} & (3) \end{array}$$

$$-0.7\, i_b + 2.9\, i_c = 2 \qquad \textbf{(4)}$$

$$\begin{array}{rl} -\; i_a \;+2.5 i_b \;-\; 0.5\;\; i_c = +30 & (2) \\ \underline{i_a \;+\; i_b \;-\; 6.0\;\; i_c = -20} & (3)\ \text{x}\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 3.5 i_b \;-\; 6.5\, i_c \;=\; +10 & \textbf{(5)} \\ \underline{-3.5 i_b \;+14.5\, i_c \;=\; +10} & (4)\ \text{x}\ 5 \end{array}$$

$$8.0\, i_c = +20 \qquad ==> \quad i_c = \mathbf{20/8\ A} = \underline{\mathbf{2.5A}}$$

Reemplazando i_c en **(5)**

$$3.5 i_b - 16.25 = +10 \qquad ==> i_b = \mathbf{26.25/3.5\ A}$$

R2.- $\underline{i_2 \;=\; i_b = 7.5A}$

Reemplazando $\mathbf{i_c}$ e $\mathbf{i_b}$ en **(1)**

$$2.5\, i_a - 7.5 - 1.25 = -40 ==> 2.5\, i_a = -31.25 \quad ==> \underline{\mathbf{i_a = -12.5A}}$$

R1.- Determinación de corriente de rama

$$i_1 = i_a - i_c = \mathbf{-12.5 - 2.5} = \underline{\mathbf{-15A}}$$

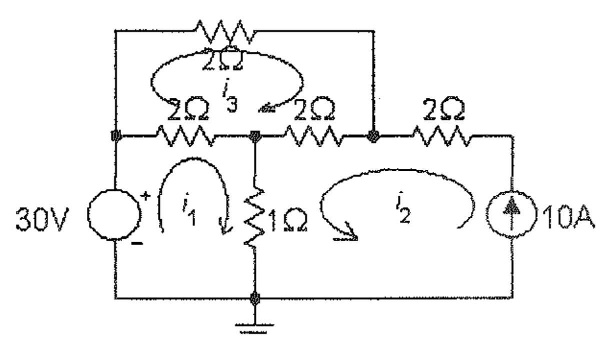
La potencia **suministrada** por la fuente de 25 V es **25** · (– i_1) = **375W**

R3.- <u>La potencia **absorbida** por la fuente de 25 V es **25** · (i_1) = **– 375W**</u>

Ejemplo 4.2.-

En el circuito de la figura, determinar:

1.- Potencia disipada en la resistencia R de 1 Ω.
2.- La potencia suministrada por la fuente de corriente de 10 A
3.- La potencia suministrada por la fuente de tensión de 30V



Planteamiento de Ecuaciones de Malla:
Observar sentido de corrientes elegido!

$$\left.\begin{array}{llrl} M1: & 3\,i_1 + & i_2 - 2\,i_3 & = 30 \\ M2: & & i_2 & = 10 \\ M3: & -2\,i_1 + 2 & i_2 + 6\,i_3 & = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6\,i_1 + 2\,i_2 - 4\,i_3 = 60 \\ -6\,i_1 + 6\,i_2 - 18\,i_3 = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \times 2 \\ (3) \times 3 \end{array}$$

$$8\,i_2 + 14\,i_3 = 60$$

$$14\,i_3 = 60 - 80 = -20$$

$$\underline{i_3 = -10/7\ A}$$

Reemplazando en (1)

$$3\,i_1 + 10 + 20/7 = 30 \quad ==> \quad \underline{i_1 = 40/7\ A}$$

Determinación de corriente de rama:

$I_R = i_1 + i_2 = 40/7 + 10 = 110/7$ A

R1.- $P_R = (I_R)^2 \cdot R = (110/7)^2 \cdot 1 = \underline{\mathbf{246.94\ [W]}}$

R2.- $P_I = V_I \cdot I_I = (30 + 20/7 + 20) \cdot 10 = \underline{\mathbf{528.57\ [W]}}$

R3.- $P_V = V_V \cdot I_V = 30 \cdot I_1 = 30 \cdot 40/7 = \underline{\mathbf{171.42\ [W]}}$

4.2.- Método nodal o de los potenciales de nodo.

Se selecciona un nodo como nodo de referencia y todos los voltajes de los nodos de la red se expresan respecto a él.

Fig. 4.7.-

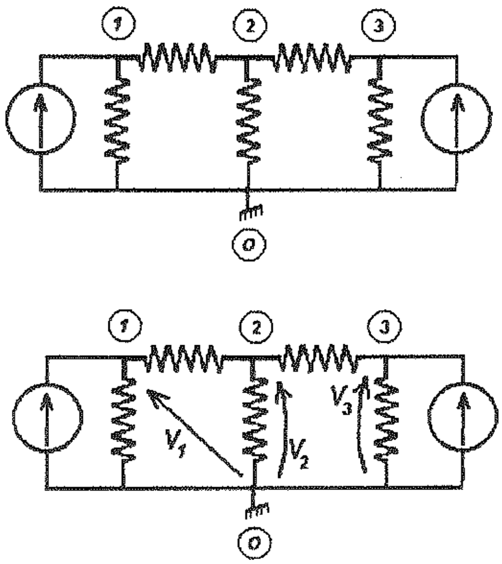
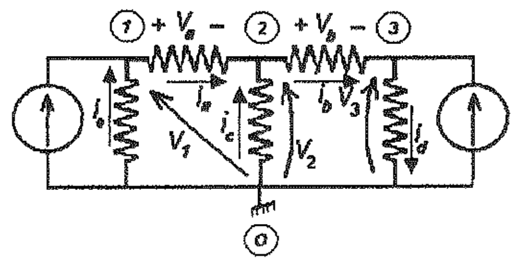


Fig. 4.8.-



Los sentidos de las corrientes de rama son arbitrarios, pero estos fijan la polaridad de las tensiones de rama (Se detalla V_a y V_b)

En el circuito de las fig 4.7 y 4.8, la cantidad de nodos es 4. Por lo tanto, hay 3 tensiones de nodo: V_1 ,V_2 y V_3

Los sentidos de las corrientes de rama son asignados en forma arbitraria, pero estos fijan la polaridad de las tensiones de rama, entonces:

$$\left.\begin{aligned} v_a &= V_1 - V_2 \\ v_b &= V_2 - V_3 \\ v_c &= -V_2 \\ v_d &= V_3 \\ v_e &= -V_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Voltajes de rama en función de los voltajes de Nodo.}$$

El método nodal usa como variables los potenciales de los (n-1) nodos independientes que se definen como el conjunto de voltajes, medidos entre cada nodo de la red y un nodo de ella elegido arbitrariamente de referencia o "cero".

Condiciones de Equilibrio

Si aplicamos la ley de Kirchhoff para las corrientes, a los n+1 nodos independientes, tenemos "n" ecuaciones con "n" variables (potenciales de Nodos).

Ecuación para un nodo "k"

Fig. 4.9. Ramas que salen del nodo k

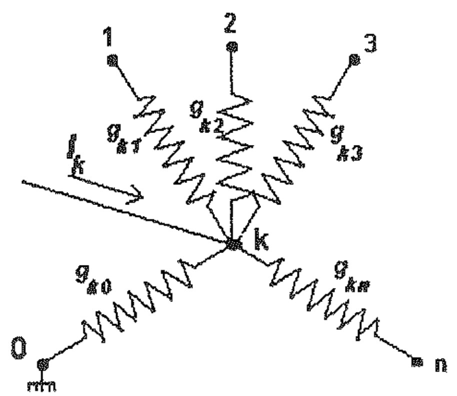
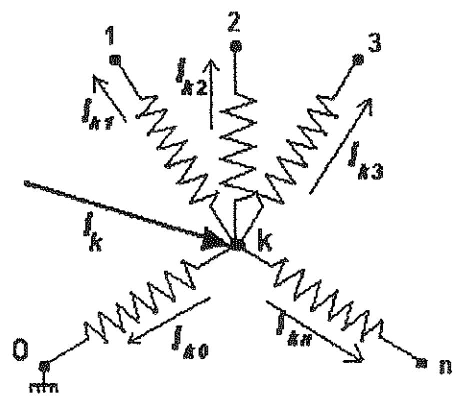


Fig. 4.10 Corrientes que llegan y salen del nodo k



$$\sum_{j=0}^{n} I_{kj} = I_k$$

I_k: Suma algebraica de todas las corrientes insertadas en el nudo k por las ramas activas que concurren ea él, ya sean éstas fuentes de corriente o de tensión.

Es preferible transformar las fuentes reales de tensión a fuentes reales de corriente.

Convención de signos: (+) las corrientes que entran y (-) a las que salen del nodo

$\sum_{j=0}^{n} I_{kj}$: Es la suma algebraica de las corrientes que salen del nodo k por las ramas pasivas.

g_{kj} : es la conductancia de la rama kj

$$g_{k0} \cdot (V_k - 0) + g_{k1} \cdot (V_k - V_1) + g_{k2} \cdot (V_k - V_2) + g_{k3} \cdot (V_k - V_3) + \ldots + g_{kn} \cdot (V_k - V_n) = I_k$$

Generalizando para un nodo k cualquiera:

$\pm G_{k1} V_1 \pm G_{k2} V_2 \pm \ldots + G_{kk} V_k \pm \ldots \pm G_{kn} V_n = I_k$

Así; para una red de n +1 nodos

$+ G_{11} V_1 \pm G_{12} V_2 \pm \ldots \pm G_{1n} V_n = I_1$
$\pm G_{21} V_1 + G_{22} V_2 \pm \ldots \pm G_{2n} V_n = I_2$
$\pm G_{n1} V_1 \pm G_{n2} V_2 \pm \ldots + G_{nn} V_n = I_n$

G_{kk}: Conductancia total que concurre al nodo k.

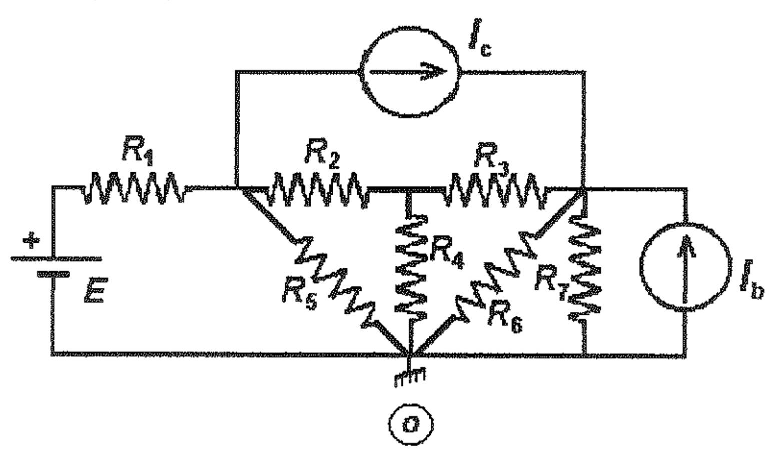
G_{kj}: Conductancia total conectada entre los nodos k y j.

G_{kj}: Conductancia mutua entre los nodos k y 1.

I_k: Corrientes insertadas al nodo k por las ramas activas que llegan al nodo k (fuentes de voltaje y/o corriente).

Ejercicio Propuesto

Fig. 4.11 Resolver mediante el método de nudos



Antes de plantear las ecuaciones de nudos, conviene transformar todas las fuentes reales de tensión a fuentes de corriente, como se ilustra en la Fig. 4.12.

Fig. 4.12.- Ejercicio de la Fig. 4.11 con fuente transformada ($I_a = E/R_1$)

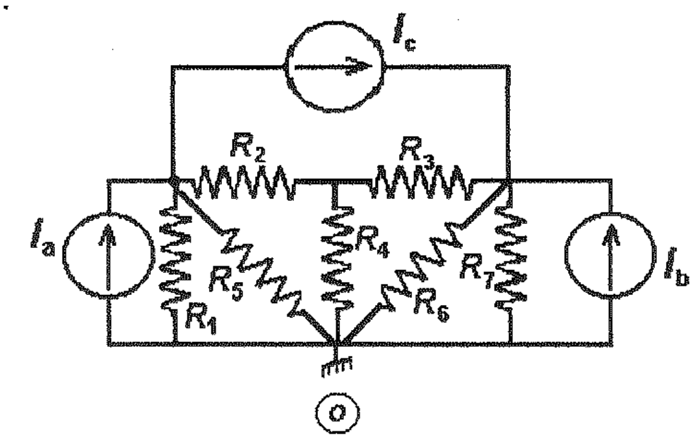
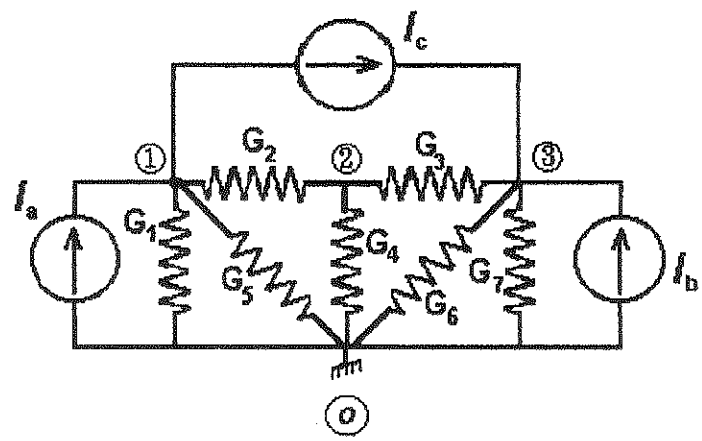


Fig. 4.13.- Ejercicio de la Fig. 4.11 con resistencias reemplazadas por sus conductancias y nudos asignados.



Ecuaciones de Nudos:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{N1:} & +(G_1+G_2+G_5)\cdot V1 & - & G_2\cdot V2 & - & 0\cdot V3 & = & Ia - Ic \\
\text{N2:} & -\;G_2\cdot V1 & + & (G_2+G_3+G_4)\cdot V2 & - & G_3\cdot V3 & = & 0 \\
\text{N3:} & -\;0\cdot V1 & - & G_3\cdot V2 & + & (G_3+G_6+G_7)\cdot V3 & = & Ib + Ic
\end{array}
$$

Observar signos de conductancias propias (+) y conductancias mutuas (–) y signos de corrientes que llegan(+) y corrientes que salen (–) de cada nudo.

CAPITULO 5

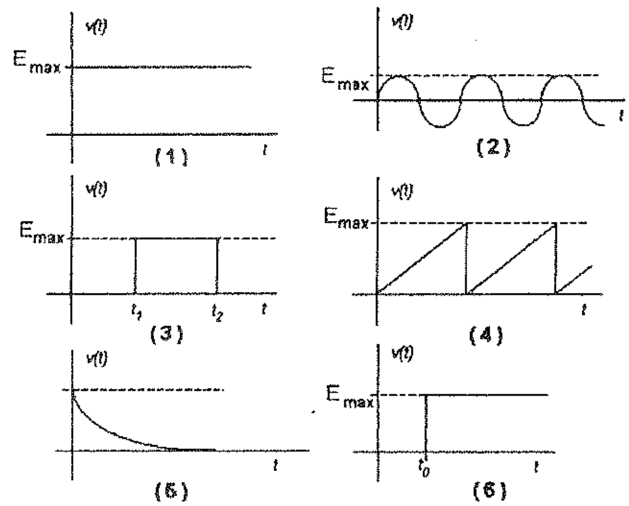
CIRCUITO DE CORRIENTE ALTERNA MONOFÁSICO

5.1.- Análisis de Señales

5.1.1.- Definiciones

Señales: Son funciones que varían en el tiempo en general, en redes eléctricas, los voltajes y corrientes varían en el tiempo.

Fig. 5.1.- Modelos gráficos de señales.

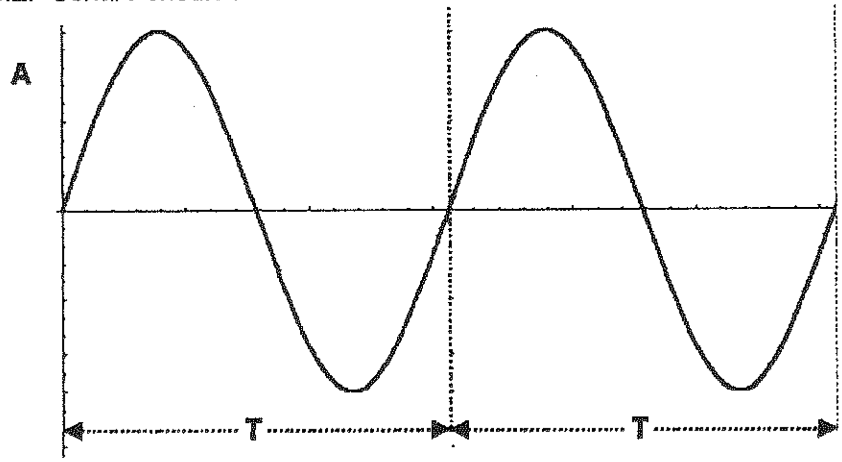


En la Fig. 5.1, las señales se denominan:

(1) Escalón a partir de t = 0 (Constante)	(4) Diente de Sierra
(2) Senoidal	(5) Exponencial decreciente
(3) Pulso Rectangular	(6) Escalón a partir de t = t_0 (desplazado)

Periodicidad: Una señal es periódica si está constituida por una sucesión de valores que se repite en forma ordenada a través del tiempo. Esta sucesión de valores que se repite constituye un *ciclo* de la señal y el intervalo de tiempo de cada sucesión es el período.
En caso de no existir una sucesión de valores que se repita en el tiempo, la señal no presenta un período, es *aperiódica*.

Fig. 5.2.- Señal Periódica

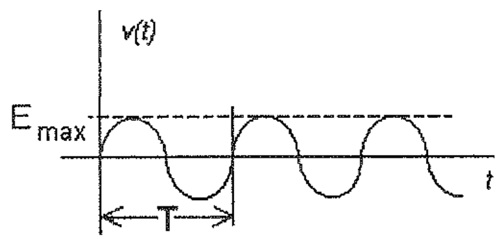


Período de la Señal : (T) Es el tiempo que demora en transcurrir un ciclo.

Así, la señal f(t) se puede caracterizar para cualquier tiempo t $\pm$ kT por su comportamiento F(t) en el primer período.

$F(t) = f(t \pm k\,T)$; k = 0, 1, 2, ...

Fig. 5.3.- Período de una señal

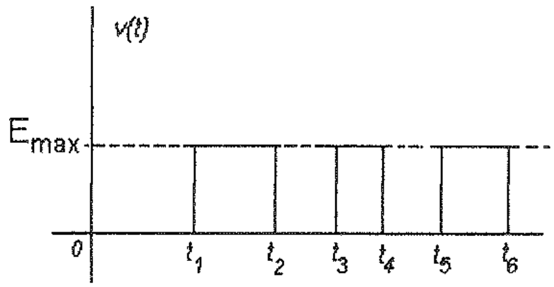


Frecuencia: Es el número de ciclos que transcurren cada segundo y su unidad de medida es el Hertz (H_z) : 1 H_z = 1 c.p.s

$$f = \frac{1}{T}[1/s] \;\; ó \;\; [Hz]$$

Una señal es aperiódica si su variación en el tiempo no es repetitiva.

Fig. 5.4.- Señal Aperiódica



5.1.2.- Valores característicos

5.1.2.1.- Valor Máximo: el valor de la señal f(t) para el cual se produce su máxima magnitud ($E_{máx}$ en las figuras) (En inglés *peak*)

$$F(t_M) = F_{máx}, \quad f(t_M) \geq f(t) \; ; \forall t$$

5.1.2.2.- Valor mínimo: el valor de la señal f (t) donde se produce su mínima amplitud. (En inglés *valley*)

$$F(t_m) = F_{mín}, \quad f(t_m) \leq f(t) \; ; \forall t$$

5.1.2.3.- Valor cresta-a-cresta: la diferencia $F_{máx} - F_{mín}$ (En inglés *peak-to-peak*)

5.1.2.4.- Valor instantáneo: el valor de una señal en un instante específico (ej: f(3))

5.1.2.5.- Valor medio (continuo) en un intervalo de tiempo $t_2 - t_1$: el promedio aritmético de los valores instantáneos de una señal, en lapso de tiempo considerado.

$$V_{medio} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

Evaluando la integral de la función considerando un lapso de tiempo igual a un período ($t_2 = t_1 + T$) y dividiendo por el período T se determina el valor medio para señales periódicas. (Area bajo la curva dividida por el período)

$$V_{medio} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t)dt$$

Es común elegir $t_1 = 0$

$$V_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

El valor medio de una señal corresponde al valor de la *componente continua* de la señal. (Area promedio bajo la curva de f(t))

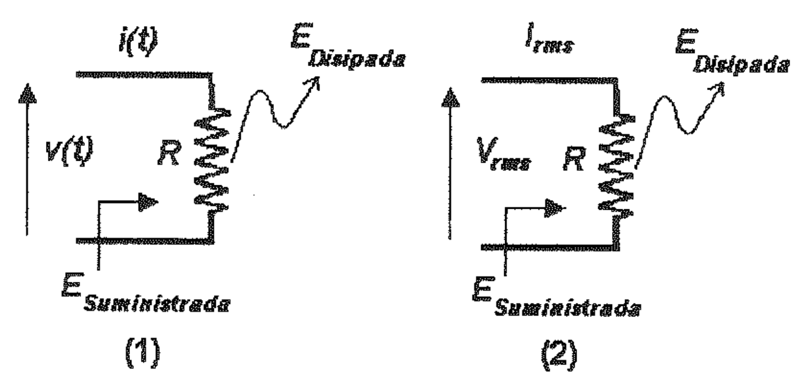
5.1.2.6.- Valor eficaz, efectivo, valor de la raíz media cuadrática o valor r.m.s.

Para señales periódicas se define como:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

El valor eficaz (R.M.S.) de una corriente i(t) [voltaje v(t)] es aquel valor de corriente (voltaje) que llevado a corriente [voltaje] continua produce los mismos efectos calóricos que i(t) (o bien [v(t)]) durante un mismo lapso de tiempo en una resistencia R.

Fig. 5.5.- Definición de valor eficaz de tension y corriente



Las situaciones (1) y (2) tienen los mismos efectos calóricos (Cantidad *E* de energía).

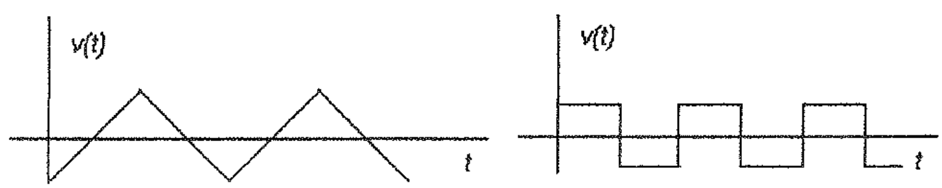
$$E_{(1)} = \int_0^T R\, i(t)^2 dt \qquad E_{(2)} = \int_0^T R I_{rms}{}^2 dt$$

$$E_{(1)} = \int_0^T \frac{v(t)^2}{R} dt \qquad E_{(2)} = \int_0^T \frac{V_{rms}{}^2}{R} dt$$

5.1.3.- Otras definiciones

Señal periódica alterna (pura): una señal cuyos semiperíodos positivos y negativos (o alternancias) tienen la misma área.

Fig. 5.6.- Señales periódicas alternas puras. (Valor medio 0)



Redes de corriente alterna: por ***tradición*** son redes que contienen solamente corrientes y tensiones de ***tipo senoidal***.

Corriente alterna: es aquella cuya expresión matemática es la función seno o coseno.

En caso que se trate de una corriente alterna ***no senoidal***, se indica expresamente.

5.2.- Análisis en Corriente Alterna

5.2.1.- Fasores y Método Fasorial

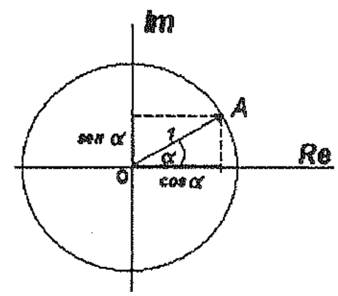
Analizaremos la respuesta permanente a una o más fuentes (excitaciones) de forma senoidal, a través de un método especial de cálculo, que recibe el nombre de **"METODO FASORIAL"**.

IDENTIDAD DE EULER

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\left|e^{j\alpha}\right| = 1$$

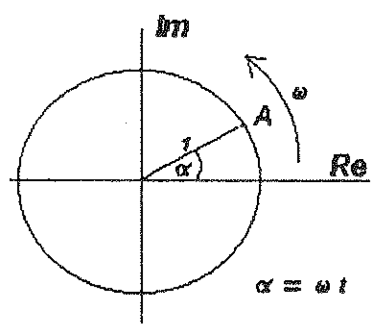
Fig. 5.7.- Vector giratorio



Si $\alpha = \omega t$, con $\omega = 2\pi f$, entonces el vector 0A gira a la velocidad angular ω.

ω : Frecuencia Angular [rad/seg]
f : Frecuencia Cíclica [Hertz] (antes [ciclos/seg])

Fig. 5.8.- Sentido de giro positivo y frecuencia angular



$$\cos\alpha = \mathrm{Re}\left[e^{j\alpha}\right] \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{Im}\left[e^{j\alpha}\right]$$

$$Si \;\; \alpha = \alpha_0 + \omega t; \;\; \alpha_0 = \alpha\big|_{t=0}, \;\; se \;\; denomina \;\; Fase \;\; Inicial$$

En general, se considerarán funciones del tipo

$$f_1(t) = K\cdot\cos(\omega t+\theta_0) = \mathrm{Re}\left[K\cdot e^{j(\omega t+\theta_0)}\right]$$
$$f_2(t) = K\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\theta_0) = \mathrm{Im}\left[K\cdot e^{j(\omega t+\theta_0)}\right]$$

Se define un ente matemático de valor complejo: el FASOR

$$\hat{F}(\omega) = \left[K\cdot e^{j(\omega t+\theta_0)}\right]$$
$$\hat{F}(\omega) = K\cdot e^{j(\theta_0)} e^{j(\omega t)}$$
$$\dot{K} = K\cdot e^{j(\theta_0)} = K\underline{|\theta_0}$$

En el fasor se distinguen:

1. El fasor unitario que contiene la información de la frecuencia:
$$e^{j(\omega t)}$$
2. El fasor inicial (para t=0) que contiene la información de la amplitud y ángulo de fase inicial:
$$\dot{K} = K\underline{|\theta_0}$$

De tal forma que:

$$f_1(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{F}(\omega)\right]$$
$$f_2(t) = \mathrm{Im}\left[\hat{F}(\omega)\right]$$

Tipos de Notación:

a) Exponencial $\hat{F}(\omega) = K\cdot e^{j(\omega t+\theta_0)}$

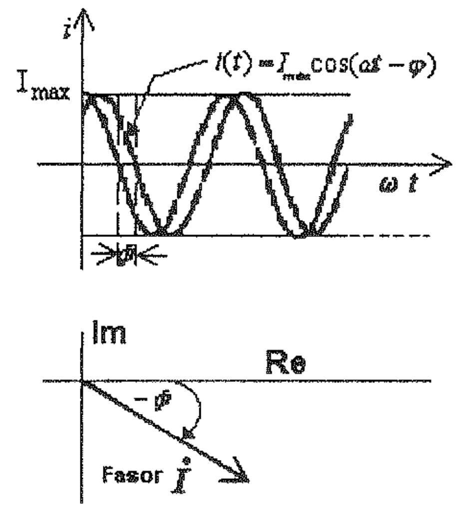
b) Polar $\hat{F}(\omega) = K\underline{|\omega t+\theta_0}$

c) Cartesiana. $\hat{F}(\omega) = \mathrm{Re}\lfloor\hat{F}(\omega)\rfloor + j\,\mathrm{Im}\lfloor\hat{F}(\omega)\rfloor$

FASE: instante (posición del fasor) en el que estamos analizando el fenómeno.

Ejemplo: Sea $i(t) = I_{max}\cos(\omega t - \varphi)$

Fig. 5.9.- Angulo de Fase de una señal



En la Fig.5.9 , - φ es el $\angle$ de fase inicial (para t=0), es la posición del fasor en el plano complejo para t = 0.

"Fase es el desplazamiento angular de una señal respecto a aquella señal considerada como referencia".

DEFASAJE, DESFASE o FASE RELATIVA: Diferencia angular (fase) entre dos señales alternas.

Sean:

$$v_k(t) = V_k\cos(\omega t + \varphi_k)$$
$$v_j(t) = V_j\cos(\omega t + \varphi_j)$$

El desfase de la señal "k" respecto a la señal "j" está dado por:

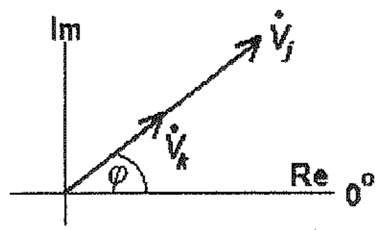
$$\varphi_{kj} = \varphi_k - \varphi_j$$

SEÑALES EN FASE

Se dice que dos o más ondas senoidales están en fase cuando son de igual frecuencia y presentan el mismo ángulo de fase inicial. En el ejemplo anterior:

$$\varphi_k = \varphi_j = \varphi \implies \varphi_{kj} = \varphi_k - \varphi_j = 0$$

Fig. 5.10.- Señales en Fase



Las proposiciones siguientes son verdaderas:

$$\Re e[\hat{F}_1]\cdot\Re e[\hat{F}_2] \neq \Re e[\hat{F}_1\cdot\hat{F}_2]$$

$$\frac{\Re e[\hat{F}_1]}{\Re e[\hat{F}_2]} \neq \Re e\left[\frac{\hat{F}_1}{\hat{F}_2}\right]$$

$$\Re e[\hat{F}_1] + \Re e[\hat{F}_2] = \Re e[\hat{F}_1 + \hat{F}_2]$$

Estas proposiciones son también válidas, si se considera la parte imaginaria.

Operaciones con señales sinusoidales

Para sumar (restar) dos o más ondas sinusoidales, que poseen la misma frecuencia angular, se puede proceder como sigue:

1. Exprese las funciones en forma de seno o coseno.
2. Transforme las funciones senoidales a FASORES (iniciales) en forma cartesiana.
3. Sume (reste) los FASORES (iniciales) como cualquier número complejo.
4. Transforme el fasor resultante al dominio del tiempo.
   a) Multiplique el fasor resultante por e^{jwt}
   b) Obtenga la parte real o imaginaria dependiendo del punto 1.

Ejemplo:

Dados: $v_1(t) = E_m \cos(\omega t) \;\; ; v_2(t) = E_m \cos(\omega t - 120°)$, encontrar $v_{12}(t)$.

Solución:

1).- Se expresan las señales como fasores iniciales (en adelante *fasores*)

$$\dot{V}_1 = E_m \angle 0° \;\; ;\dot{V}_2 = E_m \angle -120° \;\; \Rightarrow \dot{V}_{12} = E_m \angle 0° - E_m \angle -120°$$

2).- Se opera con los fasores para encontrar el fasor diferencia

$\dot{V}_{12} = E_m[1 - \cos(-120°) - j\,\mathrm{sen}(-120°)] = E_m\left[1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = E_m\left[\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, en forma cartesiana, $\dot{V}_{12} = \sqrt{3}E_m \angle 30°$ en forma polar.

3).- Se lleva a la forma temporal

$\hat{V}_{12} = \dot{V}_{12} \cdot e^{j\omega t} \;\; ; \;\; v_{12}(t) = \Re e[\hat{V}_{12}] \;\; \Rightarrow v_{12}(t) = \sqrt{3}E_m \cos(\omega t + 30°)$, respuesta buscada.

Observaciones:

1. Denominaremos al fasor inicial simplemente FASOR.

2. Al operar con los fasores voltaje y corriente en magnitudes RMS, los denominaremos FASORES RMS.

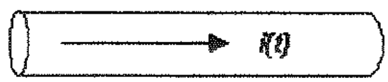
5.3.- Elementos de Circuito de Corriente Alterna

5.3.1.- PARAMETRO RESISTENCIA R: Resistencia en Corriente Alterna

Resistencia óhmica: Resistencia que ofrece un conductor a la corriente continua (R_{DC})

Resistencia efectiva: Resistencia que ofrece un conductor a la corriente alterna (R_{AC})

Fig.5.11.- Conductor atravesado por corriente alterna



$i(t)$ = Imax sen(ωt)

$R_{AC} > R_{DC}$ Efecto SKIN (piel, pelicular,superficial, Kelvin)

La densidad de corriente es uniforme en la sección transversal de un conductor solamente en el caso de corriente continua; en corriente alterna, a medida que aumenta la frecuencia la densidad de corriente aumenta desde el interior al exterior del conductor.

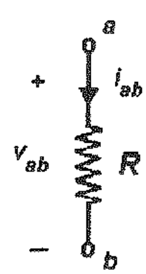
Este fenómeno se llama efecto SKIN. Esto equivale a una disminución de la sección útil del conductor y por lo tanto se traduce en un aumento de la resistencia.

Modelo esquemático de resistencia (R= resistencia efectiva) Figura 5.12 :

Relaciones voltaje - corriente

$$v_{ab} = R \cdot i_{ab} \qquad i_{ab} = \frac{v_{ab}}{R}$$

Fig. 5.12.-

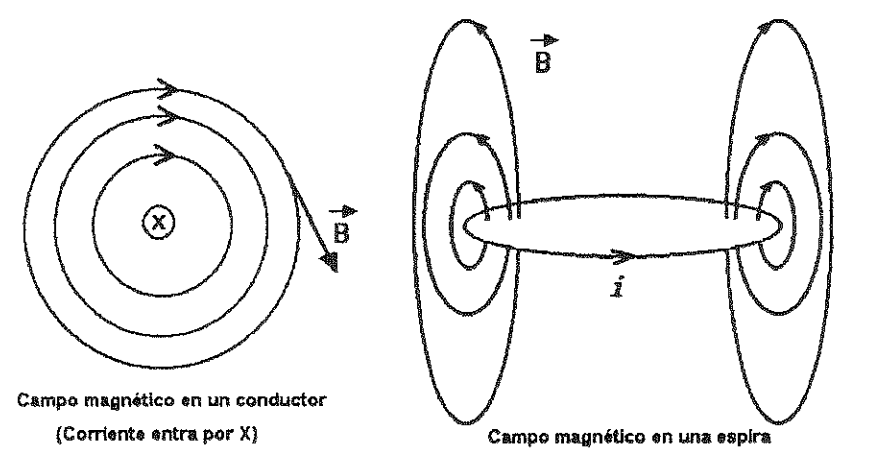


Fenómeno Físico: el conductor se calienta y se disipa energía térmica.
En algunos casos, R representa un elemento cuya potencia disipada corresponde a la potencia transformada en potencia útil que se extrae del sistema.

5.3.2.- PARAMETRO INDUCTANCIA L: La Bobina

Fenómeno Físico: En cualquier conductor, por el cual circula una corriente, se genera un campo magnético. Como una manera de visualizar el campo magnético, éste se representa mediante líneas de fuerza que son líneas imaginarias siendo el campo magnético tangente a ellas.

Fig. 5.13.- Campo magnético inducido por corriente eléctrica.



Si la corriente varía en el tiempo, entonces, el campo también varía en el tiempo.

$$\varphi = \int_s \vec{B} \cdot ds$$

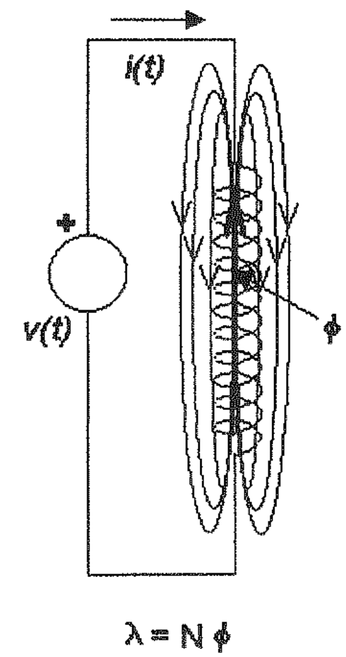
Al analizar la situación en una bobina, el fenómeno físico se puede apreciar mejor.

Un inductor está construído mediante un arrollamiento de espiras o bobina de material conductor.

En la Fig.5.14, la bobina consta de N espiras. El flujo enlazado λ es aquél que cruza la superficie de las N espiras.

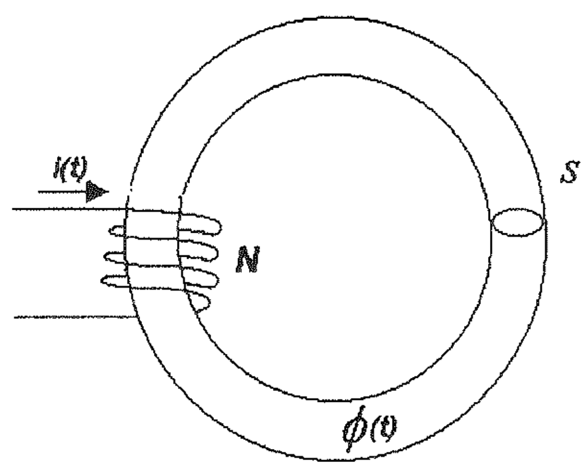
El núcleo de la bobina puede ser de algún material ferromagnético o simplemente de aire.

Fig.5.14.- Inductor o Bobina



Enlace de Flujo (λ) en un circuito C: Es la cantidad de flujo magnético que cruza a una superficie S que se apoya sobre el circuito C.

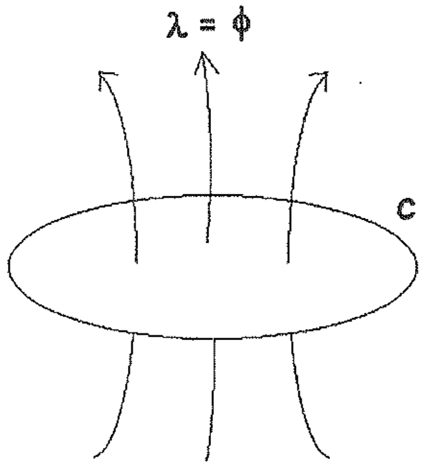
Fig. 5.15.- Flujo inducido por una corriente



5.3.2.1.- LEY DE FARADAY

Supongamos que tenemos un circuito cerrado C formado por un alambre conductor en presencia de un flujo magnético que varía con el tiempo.

Fig. 5.16 Espira cerrada en presencia de flujo magnético



Si λ varía con el tiempo aparece una corriente que circula por el circuito c. Esta corriente es inducida por el cambio en el tiempo de λ y se denomina "Corriente inducida" que depende de la resistencia de c.

Más conveniente es expresar el fenómeno en función de f.e.m. inducida.

$$e_{ind} = -\frac{d\lambda}{dt}$$

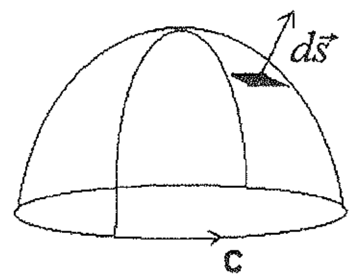
El signo menos corresponde a la ley de LENZ " La f.e.m.i. (y por lo tanto, la corriente inducida) tiene un sentido tal que se opone a la causa que la está produciendo ".

Si el ϕ magnético es creado por la propia corriente que circula por el circuito C, la f.e.m.i se denomina f.e.m autoinducida.

No importa de donde proviene el ϕ magnético, lo que interesa es el enlace de flujo en el circuito.

LEY DE FARADAY

Fig. 5.17.- Sentido de $d\vec{s}$

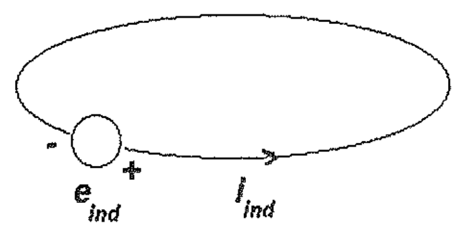


$$\lambda = \int_{s(C)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Equivalente:

$$e_{ind} = -\frac{d\lambda}{dt}$$

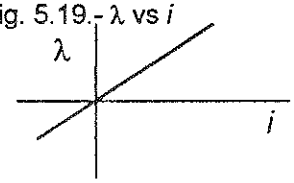
Fig. 5.18.- Equivalente



Relación entre λ e *i* en una bobina

$$\lambda = \int_{s} \vec{B} \cdot d\vec{s} = L \cdot i$$

Fig. 5.19.- λ vs *i*



L es función de las características físicas (Dimensiones, N, μ núcleo, pérdidas en el alambre, etc.)

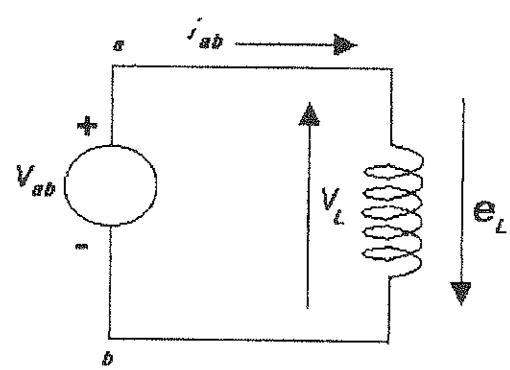
L: Coeficiente de autoinducción ó simplemente Inductancia de la bobina. Se mide en Henrios [H] (Parámetro L).

Así, la tensión inducida en una bobina o en cualquier circuito por el que circula una corriente variable, será:

$$e_L = -L\frac{di}{dt}$$

Circuito inductivo puro: Corresponde a una bobina en el que su resistencia es nula (bobina ideal, sin pérdidas).

Fig. 5.20.-Circuito inductivo puro



$v_L = v_{ab}$ voltaje en la bobina ,como caída de tensión

$e_L = e_{ab}$ tensión en la bobina, como fuente (energía almacenada)

$$v_{ab} + e_L = 0 \qquad ; v_{ab} + (-L\frac{di_{ab}}{dt}) = 0 \qquad ; v_{ab} = L\frac{di_{ab}}{dt}$$

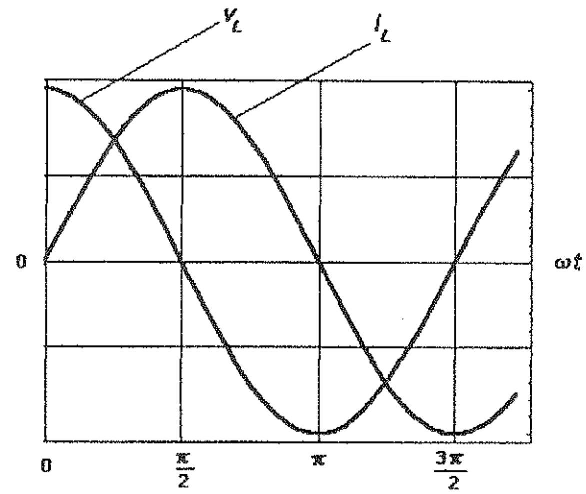
$$i_{ab} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_{ab} \cdot dt \;=\; \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v_{ab} \cdot dt + i_L(0)$$

En corriente alterna (senoidal):

$I_{ab} = I_{máx}\ sen\ (wt) = I_{máx}\ cos(wt\text{-}90°)$

$V_L = (wL)\ I_{máx}\ cos\ (wt)$

Fig. 5.21.- Tensión y corriente en inductancia

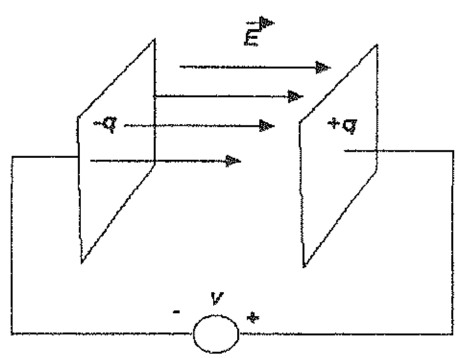


"En una bobina la corriente atrasa en 90° (π/2) con respecto a su voltaje "

5.3.3.- Parámetro Capacidad C: El capacitor o condensador

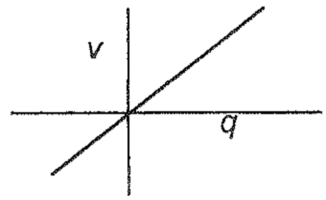
Fenómeno-Físico: Cuando estamos en presencia de cuerpos cargados, existe en todo punto del espacio un campo eléctrico. Consideremos un caso especial de dos superficies cargadas con signos opuestos. Esta configuración se llama condensador o capacitor de placas paralelas.

Fig. 5.22.- Placas con cargas de signos opuestos



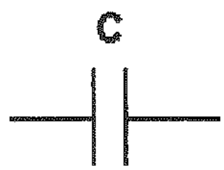
$$v = \frac{q}{C} = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Fig.5.23.- Relación tensión vs carga en un capacitor.



C es función de las características físicas (dimensiones, ε dieléctrico)
C: parámetro Capacidad. Se mide en Farad [F]

Fig. 5.24.- Símbolo de Capacitor



$v_C = v_{ab}$ = voltaje en el capacitor, como caída de tensión

$i_C = i_{ab}$ = corriente en el capacitor

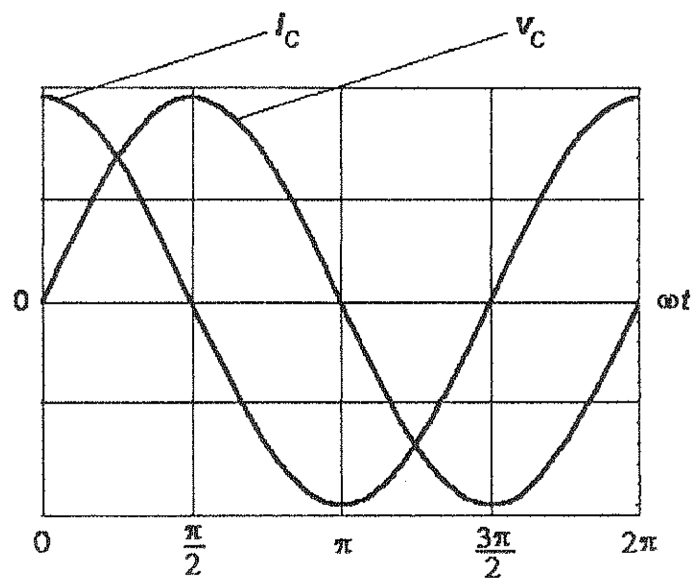
$$i_{ab} = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$v_{ab} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_{ab} \cdot dt \quad = \quad \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_{ab} \cdot dt + V_C(0)$$

En corriente alterna:

$$I_{ab} = I_{máx} \cos(wt) \;; \quad V_C = \frac{1}{\omega C} I_{máx}\, sen\,(wt)$$

Fig. 5.25.- Tensión y corriente en un capacitor



"En un capacitor la corriente adelanta en 90° ($\pi/2$) con respecto a su voltaje "

5.4.- REGIMEN TRANSIENTE Y PERMANENTE

La respuesta en el tiempo *R(t)* de una red consta de dos partes: $R(t) = r_t(t) + r_p(t)$

$r_t(t)$ = Respuesta en régimen transiente (respuesta libre): es aquella que tiene el modo propio de la red sin excitación, tiene corta duración comparada con el régimen permanente.

$r_p(t)$ = Respuesta en régimen permanente (respuesta forzada): es aquella que tiene la forma o modo de la función forzante o excitación.

Régimen Transiente (transitorio, natural).
Es el período de tiempo que tardan las corrientes y tensiones de una red en tomar sus valores finales (estado final) como respuesta a una perturbación aplicada a la red. El tiempo se cuenta desde el momento en que ocurre la perturbación (estado inicial) los cambios de estados se deben a la redistribución de la energía en la red.

Régimen permanente (estacionario)
Una red está en régimen permanente desde el momento en que se logró su estado energético estacionario o final.

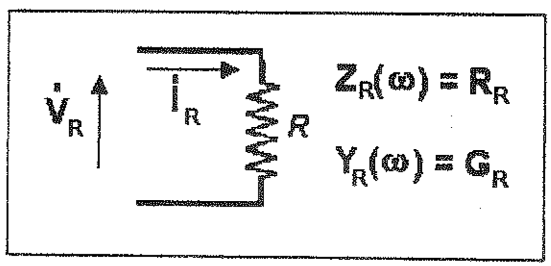
5.4.1.- Relaciones voltaje - corriente en componentes ideales, en régimen permanente, forzado con excitaciones sinuosidales de frecuencia angular $\omega = 2\pi f$).

5.4.1.1.- Resistencia Ideal (Parámetro: resistencia R (ohms), componente sin efectos capacitivos o inductivos, es decir, R supuesta independiente de la frecuencia o constante para un rango de frecuencias.)

- Ecuación diferencial (Ley de Ohm, caso general) : $v_R = R \cdot i_R$

Relación fasorial (caso señal senoidal de frecuencia angular ω) : $\hat{V}_R = R \cdot \hat{I}_R$
La IMPEDANCIA de la resistencia pura es $Z_R = R\angle 0^\circ [\Omega]$
La RESISTENCIA es $R[\Omega]$, independiente de la frecuencia.
La ADMITANCIA de la Resistencia es su conductancia: $G_R = \frac{1}{R}\angle 0^\circ [S]$

Fig. 5.26.- Impedancia y admitancia en una resistencia



En consecuencia, en una Resistencia Pura, la CORRIENTE está EN FASE con la TENSION.

5.4.1.2.- Bobina o inductor ideal (Parámetro: Inductancia L (Henry o Henrio), componente sin pérdidas)

- Ecuación diferencial (en el tiempo, caso general) : $v_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

Relación fasorial (caso señal senoidal de frecuencia angular ω) :

$$\hat{V}_L = j\omega L \cdot \hat{I}_L \, ,$$

La IMPEDANCIA de la inductancia pura es:

$$Z_L = j\omega L[\Omega] \quad = \omega L\angle 90^\circ [\Omega]$$

La REACTANCIA INDUCTIVA es:

$$X_L = \omega L[\Omega]$$

Fig. 5.27.- Impedancia y admitancia en un inductor

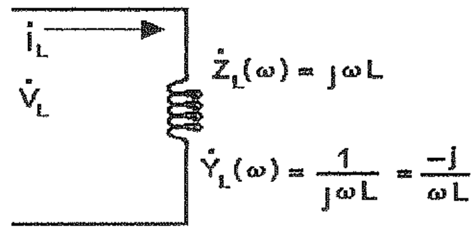


Fig. 5.28 .-

Inductancia pura en Corriente Alterna

Tensión adelanta 90° a la corriente

$$\dot{V}_L = j \underbrace{\omega L}_{X_L} \cdot \dot{I}_L$$

Magnitud de la tensión = Reactancia Inductiva · Corriente

Fig.5.29 .-

Inductancia pura en Corriente Alterna

Corriente atrasa 90° a la Tensión

$$\dot{I}_L = -j \underbrace{\frac{1}{\omega L}}_{B_L} \cdot \dot{V}_L$$

Magnitud de la Corriente = Susceptancia Inductiva · tensión

5.4.1.3.- Capacitor o condensador ideal (Parámetro: Capacidad C (Farad o Faradio), componente sin pérdidas)

- Ecuación diferencial (en el tiempo, caso general) : $v_C = \dfrac{1}{C}\int i_C\,dt$

Relación fasorial (caso señal senoidal de frecuencia angular ω):

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\cdot\hat{I}_C$$

La IMPEDANCIA de la capacidad pura es: $Z_C = -j\dfrac{1}{\omega C}[\Omega] = \dfrac{1}{\omega C}\angle -90^{\circ}[\Omega]$

La REACTANCIA CAPACITIVA es: $X_C = \dfrac{1}{\omega C}[\Omega]$

Fig. 5.30.- Impedancia y admitancia en un capacitor

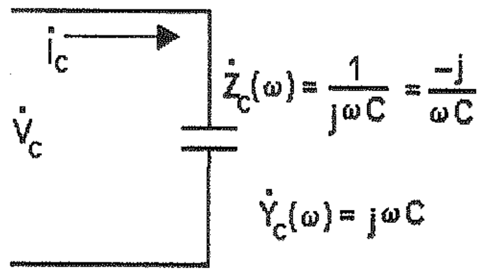


Fig.5.31 .-

Capacidad pura en Corriente Alterna

Tensión atrasa 90° a la corriente

$$\dot{V}_C = -j\underbrace{\frac{1}{\omega C}}_{X_C}\cdot\dot{I}_C$$

Magnitud de la tensión = Reactancia capacitiva · Corriente

Fig. 5.32.-

Capacidad pura en Corriente Alterna

Corriente adelanta 90° a la Tensión

$$\dot{I}_C = j\underbrace{\omega C}_{B_C}\cdot\dot{V}_C$$

Magnitud de la Corriente = Susceptancia capacitiva · tensión

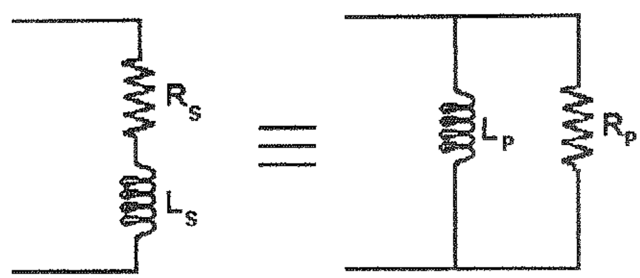
¡IMPORTANTE!
IMPEDANCIA y su recíproco ADMITANCIA son MAGNITUDES COMPLEJAS
IMPEDANCIA Y ADMITANCIA _NO SON FASORES_

5.4.2.- Relaciones voltaje corriente en componentes reales, en régimen forzado con excitaciones sinuosidales (de frecuencia angular $\omega = 2\pi f$).

El comportamiento de componentes reales (físicos) se modela para cada situación particular, considerando las particulares condiciones de operación.
En la construcción de componentes reales (Resistencias, Inductores, Capacitores) se emplean materiales que exhiben un comportamiento no ideal. Es así que las resistencias (o resistores) suelen tener un comportamiento inductivo cuando se realizan con conductores bobinados sobre una forma aislante. Similarmente, una bobina realizada con espiras de alambre suele tener pérdidas debido a la resistencia propia del conductor y un capacitor formado con placas separadas por un dieléctrico suelen tener pérdidas en el material y sus conductores. Si bien las pérdidas se encuentran distribuídas, el modelo más simple de los componentes reales se presenta con los *parámetros concentrados.*

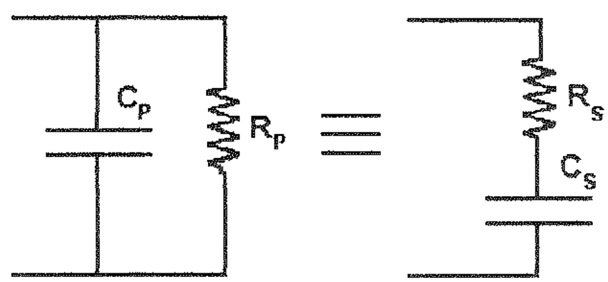
5.4.2.1.- Modelo de Bobina Real o Inductor Real

Fig. 5.33.- Modelos de inductores reales



5.4.2.2.- Modelo de Capacitor Real o Condensador Real.

Fig. 5.34.- Modelos de capacitores reales



5.5.- Leyes de Kirchhoff en circuitos de corriente alterna.

5.5.1.- Ley de tensiones

$$\sum v_l(t) = \sum e_k(t)$$

$$\sum \Re e\left[\hat{V}_l\right] = \sum \Re e\left[\hat{E}_k\right]$$

$$\sum \Re e\left[Z_l(\omega)\hat{I}\right] = \sum \Re e\left[\hat{E}_k\right]$$

$$\Re e\left[\sum Z_l(\omega)\hat{I}_l\right] = \Re e \sum \hat{E}_k$$

$$\sum Z_l(\omega)\hat{I}_l = \sum \hat{E}_k$$

En ambos miembros de las ecuaciones se encuentra el factor $e^{j\omega}$ $\therefore$

$$\sum Z_l(\omega)\dot{I}_l = \sum \dot{E}_k$$

$$\sum \dot{V}_l = \sum \dot{E}_k$$

5.5.2.- Ley de corrientes

$$\sum_{nudo} i_k(t) = 0$$

$\sum_{nudo} \Re e\left[I_k e^{j\omega t}\right] = 0$, forzando la parte imaginaria a 0

$$\sum_{nudo} \dot{I}_k = 0$$

5.6.- Proceso de solución de redes en corriente alterna.

5.6.1.- Transformación dominio del tiempo – dominio de la frecuencia.

5.6.1.1.- Operaciones con los parámetros de la red:

Se calculan los valores en el dominio de la frecuencia de cada impedancia (o admitancia) de los *elementos pasivos* de la red.

5.6.1.2.- Operaciones con las excitaciones (fuentes de tensión y/o corriente):

Se expresan las *excitaciones* en forma de cosenos (si se trabajará con la parte real) o bien en forma de senos (si se trabajará con la parte imaginaria).

Se calculan las magnitudes RMS de las funciones de exitación, dividiendo por $\sqrt{2}$.

Se representan las funciones en forma de fasores iniciales, con magnitud RMS y el ángulo inicial (forma polar)

5.6.1.3.- Asignación de incógnitas para cada variable de la red (potencial de nudo o corriente de malla)

Se representan las *variables* de la red mediante incógnitas complejas expresadas en forma de fasores iniciales.

5.6.2.- Planteamiento de condiciones de equilibrio.

5.6.2.1.- Decisión de método de solución (tensiones de nudo o corrientes de malla)

5.6.2.2.-Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio en forma de cantidades complejas constantes en el tiempo.

5.6.3.- Solución en el dominio de la frecuencia.

5.6.3.1.- Se resuelve el sistema de ecuaciones de equilibrio, obteniendo las variables complejas (fasores iniciales) de solución.(En este punto se ha llegado a una solución en fasores iniciales o solución fasorial)

5.6.4.- Transformación dominio de la frecuencia – dominio del tiempo.

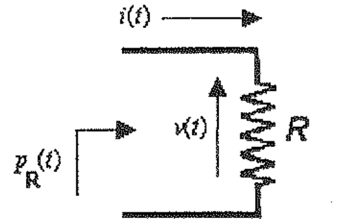
5.6.4.1.- Se multiplican los valores de las variables complejas, obtenidos en el paso anterior, por el fasor unitario $e^{j\omega t}$ para volver a la forma temporal y por $\sqrt{2}$ para obtener el valor máximo instantáneo correcto de las magnitudes RMS.

5.6.4.2.- Del resultado se conserva la parte real (si se trabajó al comienzo con cosenos) o la parte imaginaria (si se trabajó al comienzo con senos)

5.7.- Potencia en redes de corriente alterna en régimen permanente.

5.7.1.- Potencia en una carga resistiva pura (disipativa)

Fig. 5.35.- Carga resistiva



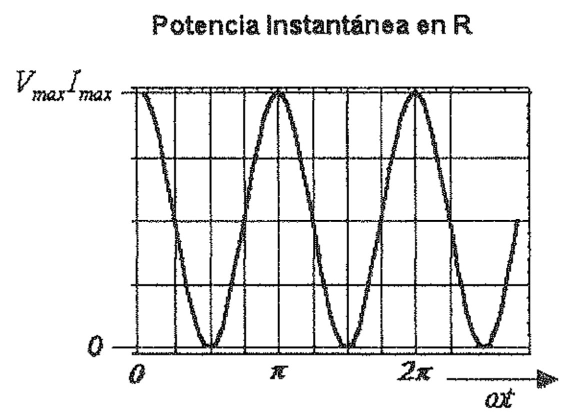
$$v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$
$$i(t) = I_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$

En una resistencia pura, para una excitación senoidal arbitraria $v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \varphi)$, la corriente es $i(t) = I_{max}\cos(\omega t + \varphi)$, es decir, la tensión y la corriente están en fase y $I_{max} = V_{max}/R$.

La potencia instantánea suministrada a una carga disipativa está dada por el producto de la tensión instantánea por la corriente instantánea:

$$p_R\ (t) = v(t)\cdot i(t) \ = \ V_{max}I_{max}\cos^2(\omega t + \varphi) \ = \ \frac{1}{2}V_{max}I_{max}[1+\cos(2(\omega t + \varphi))]$$

Fig. 5.36.- Potencia instantánea en carga resistiva



La potencia media P_R suministrada a la carga disipativa R se obtiene de:

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T p_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_r(\theta)d\theta$$

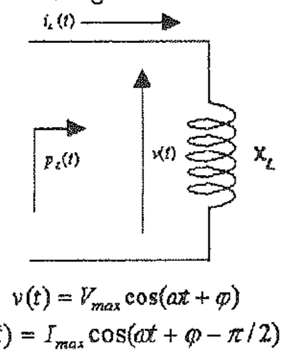
Por lo tanto:

$$P_R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}V_{max}I_{max}\left[1+\cos(2(\omega t+\varphi))\right]d(\omega t) = \frac{1}{2}V_{max}I_{max} \text{ [W]} = V\cdot I \text{ en RMS.}$$

5.7.2.- Potencia en una carga inductiva pura (inductancia L).

Sea $v(t) = V_{max}\cos(\omega t+\varphi)$ la tensión en los terminales. La corriente en la bobina será $i_L(t) = I_{max}\cos(\omega t+\varphi-\pi/2)$, debido al atraso en 90º de la corriente en el inductor, respecto a la tensión. Además, $I_{max} = V_{max}/X_L$.

Fig.5.37.- Carga Inductiva

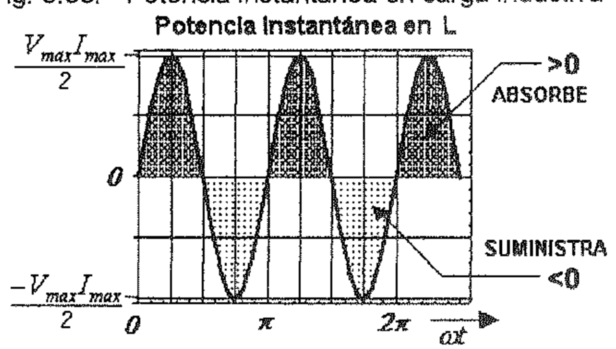


La potencia instantánea suministrada a L será:

$$p_L(t) = v(t)\cdot i_L(t) = V_{max}I_{max}\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi-\pi/2) = \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos(2(\omega t+\varphi)-\pi/2)$$

$$= \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\,\text{sen}(2(\omega t+\varphi)) \text{ [W].}$$

Fig. 5.38.- Potencia instantánea en carga inductiva



La potencia media P_L suministrada a la carga reactiva X_L se obtiene de:

$$P_L = \frac{1}{T}\int_0^T p_L(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_L(\theta)d\theta$$

$$P_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}V_{max}I_{max}\,\text{sen}(2(\omega t+\varphi))d(\omega t) = 0$$

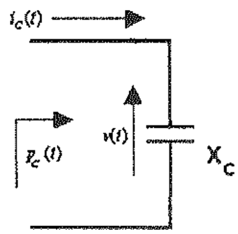
Por lo tanto, la *potencia media* tiene valor cero, es decir un inductor ideal no absorbe potencia, si se promedia en un período completo de la señal.

5.7.3.- Potencia en una carga capacitiva pura (capacidad C).

Sea $v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ la tensión en los terminales. La corriente en el capacitor ideal será $i_C(t) = I_{max}\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$, debido al adelanto en 90º de la corriente en el capacitor, respecto a la tensión.

Además, $I_{max} = V_{max}/X_C$.

Fig. 5.39.- Carga Capacitiva



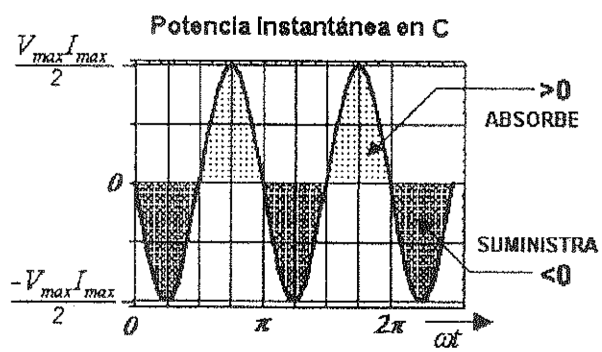
$$v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$
$$i_C(t) = I_{max}\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

La potencia instantánea absorbida por C será:

$$p_C(t) = v(t)\cdot i_C(t) = V_{max}I_{max}\cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos(2(\omega t + \varphi) + \pi/2)$$

$$= -\frac{1}{2}V_{max}I_{max}\,\mathrm{sen}(2(\omega t + \varphi)) \text{ [W]}.$$

Fig. 5.40.- Potencia instantánea en carga capacitiva



La potencia media P_C suministrada a la carga reactiva X_C se obtiene de:

$$P_C = \frac{1}{T}\int_0^T p_C(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_C(\theta)d\theta$$

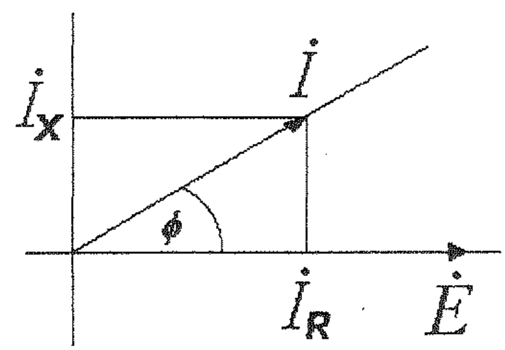
$$P_C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}V_{max}I_{max}\,\mathrm{sen}(2(\omega t + \varphi))d(\omega t) = 0$$

Por lo tanto, la potencia media tiene valor cero, es decir un capacitor ideal no absorbe potencia, si se promedia en un período completo de la señal.

5.7.4.- Potencia en circuitos RLC (Carga Compleja)

Sea $\dot{I}$ la corriente suministrada a la carga, por una tensión $\dot{E}$ y sea φ el ángulo de fase entre $\dot{I}$ y $\dot{E}$ (es decir, el ángulo de la impedancia equivalente vista por $\dot{E}$)
En general, la corriente suministrada a la carga se puede representar fasorialmente como la suma de dos componentes:
- Una componente $\dot{I}_R$, en fase con la tensión en la carga.
- Una componente $\dot{I}_X$, en cuadratura (defasada +90° ó –90°) con la tensión en la carga.

Fig. 5.41.- Componentes de corriente en carga compleja



De la Fig. 5.41, es claro que $\dot{I}_R = I\cos(\varphi)$ e $\dot{I}_X = jI\,\text{sen}(\varphi)$

El producto $\dot{E}\cdot\dot{I}_R$ es la potencia activa real, identificada por la letra P y se expresa en watts [W].

En el caso más general , la tensión tiene un ángulo de fase δ y la corriente un ángulo de fase β, entonces:

$$P_{real} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \quad = \quad V\cdot I_R = V\cdot \overset{*}{I}\cos(\delta-\beta) \quad = P = \quad VI\cos\varphi \quad (W)$$

El significado físico de esta magnitud corresponde a la potencia efectivamente suministrada en promedio durante un período ($\dot{E}$, $\dot{I}$ son fasores r.m.s)

El producto $\dot{E}\cdot\overset{*}{I}_X$ es la potencia reactiva , identificada por la letra Q y se expresa en [VAR] (volt-ampere-reactivos).
En el caso más general , la tensión tiene un ángulo de fase δ y la corriente un ángulo de fase β, entonces:

$$P_{reactiva} = V\cdot\overset{*}{I}\,\text{sen}(\delta-\beta) \quad = Q = \quad VI\,\text{sen}\,\varphi \quad (VAR) \quad \begin{cases} \dfrac{+\ para\ \ inductiva}{-\ para\ \ capacitiva} \end{cases}$$

El significado físico es el de una energía, que si bien tiene un promedio nulo en un período, efectivamente es absorbida y luego devuelta a la red en el lapso de un período.

Se ha definido como positivo el signo de Q para carga inductiva (corriente en atraso) y signo negativo para carga capacitiva (corriente en adelanto).

Es conveniente notar que, a pesar de que la energía neta transferida a la carga por la potencia reactiva es nula, *introduce pérdidas en el sistema*. Esta situación obliga a cuantificar debidamente la potencia reactiva.

5.7.4.1.- Potencia Compleja.

Por definición, la potencia compleja en una carga se obtiene del producto de la tensión por el <u>conjugado</u> de la corriente $S = \dot{V} \cdot \overset{*}{I}$ *[VA]* ***(Volt-Ampere).***

$$PotenciaCompleja = S = P + jQ = VI\cos\varphi\ [W] + jVI\operatorname{sen}\varphi\ [VAR] \quad \textbf{\textit{(V A Reactivos)}}$$

La potencia aparente corresponde a la magnitud de la potencia compleja:

$$Potencia\ Aparente = |S| = V \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [VA]$$

Cuadro Resumen de Potencia Compleja.

Elemento	**Potencia Compleja Absorbida**				
Resistencia	S_R	$= \dot{V}_R \overset{*}{I}_R$	$= V^2/R$	$= R \cdot I^2$	$\begin{cases} P = R \cdot I^2 & (W) \\ Q = 0 & (VAR) \end{cases}$
Inductor	S_L	$= \dot{V}_L \overset{*}{I}_L$	$= +jV^2/X_L$	$= +j X_L \cdot I^2$	$\begin{cases} P = 0 & (W) \\ Q = X_L \cdot I^2 & (VAR) \end{cases}$
Capacitor	S_C	$= \dot{V}_C \overset{*}{I}_C$	$= -jV^2/X_C$	$= -j X_C \cdot I^2$	$\begin{cases} P = 0 & (W) \\ Q = -X_C \cdot I^2 & (VAR) \end{cases}$

$\dot{V}$ = fasor RMS de la tensión; $\overset{*}{I}$ = fasor conjugado de la corriente

5.7.5.- Factor de Potencia

Se define como Factor de Potencia a la magnitud adimensional que corresponde al coseno del ángulo (convencionalmente designado por φ) entre la tensión y la corriente en una carga compleja, FP = $\dfrac{P}{S}$ = cos φ.

Si la carga es inductiva, el ángulo φ es negativo, la corriente está en atraso respecto de la tensión y se dice que el FP está en atraso o inductivo.

Si la carga es capacitiva, el ángulo φ es positivo, la corriente está en adelanto respecto de la tensión y se dice que el FP está en adelanto o capacitivo.

5.7.5.1.- Consecuencias de una carga reactiva (cos φ $\neq$ 1.0)

Un factor de potencia bajo implica una magnitud considerable de potencia reactiva, respecto a la potencia activa. La consecuencia es que hay corrientes elevadas en las líneas que llegan a la carga, produciéndose pérdidas en las líneas (pérdidas de potencia activa I^2R) y caída de tensión ($I \cdot R$) en el extremo de la carga.

5.7.5.2.- Corrección del Factor de Potencia (Mejora del cos φ).

La mayoría de las situaciones en que se requiere corregir o mejorar el Factor de potencia surge del uso de dispositivos o cargas inductivas (por ejemplo, motores y transformadores), si bien puede haber cargas capacitivas que requieran compensación. La compensación más sencilla en estos casos es la conexión , en paralelo con la carga, de un capacitor (o reactor) adecuado, que sea capaz de suministrar la potencia reactiva que compense la observada en la carga.

Fig. 5.42.- Situación de carga sin compensar

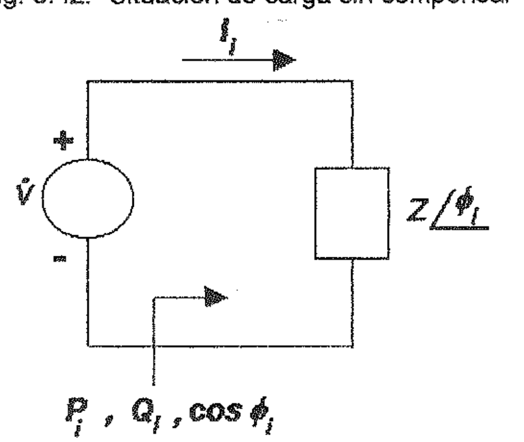


Fig. 5.43.- Situación compensada

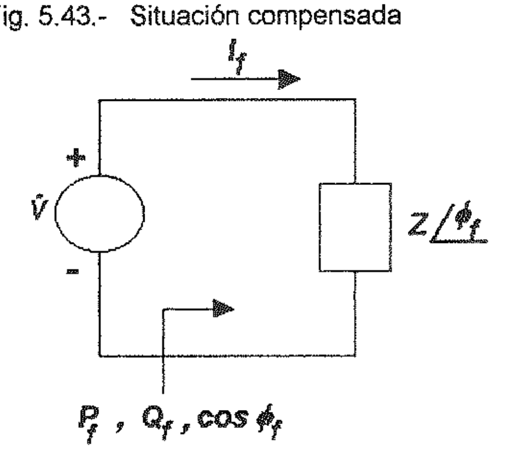
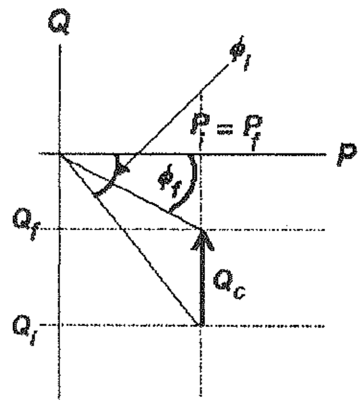


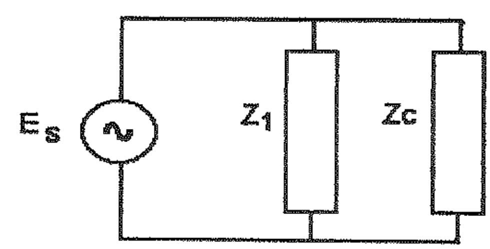
Fig. 5.44.- Potencias complejas



5.7.5.3.- Secuencia de cálculo para la corrección del Factor de potencia.

En la Fig. 5.45, la impedancia Z1 es la carga no compensada. El problema consiste en determinar la carga de compensación Zc apropiada, que lleva el cosϕ desde un valor FP_i a un valor FP_p. (Obsérvese que FP_p no es necesariamente la unidad.)

Fig. 5.45.- Compensación de carga Z1 = R1 + jX1



SOLUCION:

La corrección del FDP se logra mediante la conexión de una *carga reactiva pura*, para no afectar la potencia activa (no aumentar el consumo)
En la práctica puede ser un reactor (para cargas capacitivas, como iluminación por lámparas de descarga) o bien un banco de capacitores (para cargas inductivas, como son los motores)

Procedimiento:

$$Z1 = R1 + jX1 = |Z1| \text{ ang } \phi_1 = Z1 \cos\phi_1 + jZ1 \operatorname{sen}\phi_1 \quad (1)$$

$$\text{Cos } \phi_1 = FP_i = \cos(\text{arctg } X1/R1) \quad (2)$$

$$Zp = Z1//Zc = Z1 \cdot Zc/(Z1 + Zc) = Rp + jXp = |Zp| \text{ ang } \phi_p \quad (3)$$

$$\text{Cos } \phi_p = FP_p = \cos(\text{arctg } Xp/Rp) \quad (4)$$

$$Zp = \frac{(R1 + jX1) \cdot jXc}{(R1 + jX1) + jXc} \quad \text{y desarrollando} \quad (5)$$

$$Zp = \frac{-R1X1Xc + jXcR1^2 + j(X1^2Xc + X1Xc^2) + (X1XcR1 + Xc^2R1)}{R1^2 + (X1 + Xc)^2} \quad (6)$$

$$Xp = \frac{XcR1^2 + (X1^2Xc + X1Xc^2)}{R1^2 + (X1 + Xc)^2} \quad \text{(parte imaginaria)} \quad (7)$$

$$Rp = \frac{-R1X1Xc + (X1XcR1 + Xc^2R1)}{R1^2 + (X1 + Xc)^2} \quad \text{(parte real)} \quad (8)$$

$$FPp = \cos(\text{arctg } Xp/Rp) \text{ ó } \arccos(FPp) = \text{arctg}(Xp/Rp) \quad (9)$$

$$Xp/Rp = \frac{XcR1^2 + (X1^2Xc + X1Xc^2)}{Xc^2R1} \quad (10)$$

$$Xp/Rp = \frac{R1^2 + (X1^2 + X1Xc)}{R1Xc} \quad (11)$$

Pero $Xp/Rp = \text{tg}(\text{arcos}(FPp))$ y despejando Xc, queda:

$$Xc = \frac{R1^2 + X1^2}{R1[\text{ tg}(\text{arcos}(FPp))] - X1} \quad (12)$$

Con este valor de Xc se puede calcular la inductancia L o la capacidad C necesaria para la corrección del FDP al valor deseado.

Observación:
En una istalación real, como por ejemplo una industria, un edificio o cualquier consumidor significativo, la potencia reactiva puede cambiar, dependiendo de la cantidad de equipos conectados. En esta situación, los elementos reactivos de compensación pueden ser conectados según las necesidades, mediante un sistema de conmutación manual o automatizado.

CAPITULO 6

CIRCUITOS TRIFASICOS EQUILIBRADOS

6.1.- Definiciones

6.1.1.- Red polifásica: es aquella en la cual existen más de dos terminales de conexión entre el sistema de carga y el sistema de fuentes, existiendo una diferencia de fase entre las tensiones o corrientes suministradas.
6.1.2.- Un caso particular de sistema polifásico, de aplicación muy extendida, es el sistema trifásico. Un sistema trifásico está constituido por tres sistemas monofásicos que se pueden conectar en configuraciones llamadas triángulo (Δ) o estrella (Y) o alguna combinación de éstas.

6.1.3.- Fase: por asociación con la relación de fase entre los sistemas monofásicos interconectados, se designa como *fase* a cada sistema monofásico que forma parte de una conexión estrella o triángulo, ya sea de un consumo o fuente.

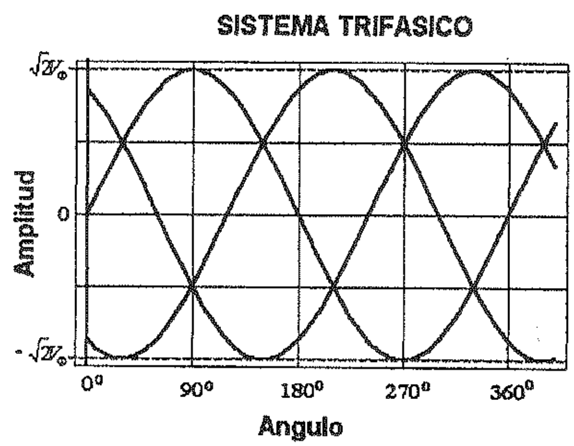
6.1.4.- Voltaje trifásico simétrico: es un conjunto de tres fuentes de tensión ($v_a(t)$, $V_b(t)$, $v_c(t)$), en el cual la fase relativa de una fuente con las otras dos difiere en 120º (adelanta a una y atrasa a la otra).

6.1.5.- Voltaje trifásico balanceado: Es un conjunto trifásico de voltajes (v_a (t), $V_b(t)$, $v_c(t)$), en el cual las magnitudes de todos los voltajes de fase son iguales y el desfase angular entre dos voltajes sucesivos de fase es de 120°

Sistema trifásico de tensiones

$$v_a(t) = \sqrt{2}\ V_\Phi \text{ sen } wt$$
$$v_b(t) = \sqrt{2}\ V_\Phi \text{ sen } (wt - 120°)$$
$$v_c(t) = \sqrt{2}\ V_\Phi \text{ sen } (wt - 240°)$$

Fig. 6.1 Sistema trifásico balanceado



Cada uno de estos voltajes se denomina *voltaje de fase*:

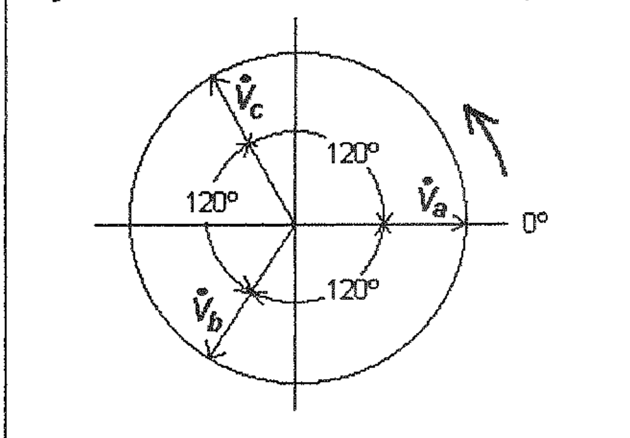
V_a (t): Voltaje de fase de la fase a.
V_b (t): Voltaje de fase de la fase b.
V_c (t): Voltaje de fase de la fase c.

Sea el sistema trifásico balanceado:

$$v_a(t) = \sqrt{2}\, V_\Phi \cos wt$$
$$v_b(t) = \sqrt{2}\, V_\Phi \cos\,(wt - 120°)$$
$$v_c(t) = \sqrt{2}\, V_\Phi \cos(wt - 240°)$$

6.1.6.- Se define como *secuencia de fase* al orden en que las tensiones alcanzan sus valores máximos. En el ejemplo, ilustrado en la Fig. 6.2, la secuencia de fase es $\dot{V}_a, \dot{V}_b, \dot{V}_c$ (a-b-c) y se denomina secuencia positiva, por tener sentido anti-reloj (CCW), considerado positivo trigonométricamente.

Fig. 6.2.- Sistema trifásico con secuencia positiva



V_a (t) es máxima para ωt = 0°, fasor $\dot{V}_a = V\varphi\,\underline{|\ 0°}$
V_b (t) es máxima para ωt = 120°, fasor $\dot{V}_b = V\varphi\,\underline{|\ -120°}$
V_c (t) es máxima para ωt = 240°, fasor $\dot{V}_c = V\varphi\,\underline{|\ +120°}$

6.2.- Fuente de Voltaje Trifásica:

La tensión trifásica se obtiene en los terminales de tres bobinas (3 fases) dispuestas simétricamente en un generador de corriente alterna. Esta configuración genera un conjunto trifásico balanceado de voltajes si todas las bobinas entregan la misma tensión eficaz.

6.2.1.- Configuraciones trifásicas

Las bobinas del alternador, que proporcionan la salidas (ilustradas en la Fig. 6.3) se pueden conectar en Y o Δ, como se ilustra en las Figs. 6.4 y 6.5.

Fig. 6.3.- Sistema de bobinas

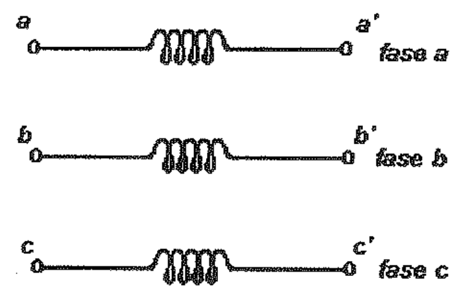


Fig. 6.4.- Configuración Y

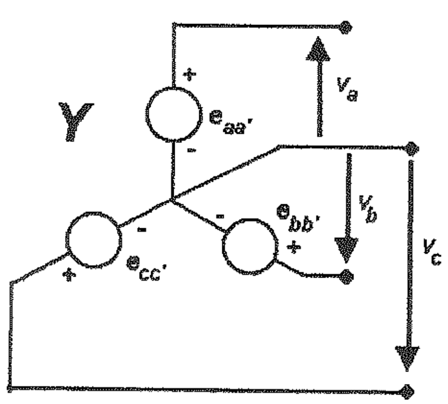
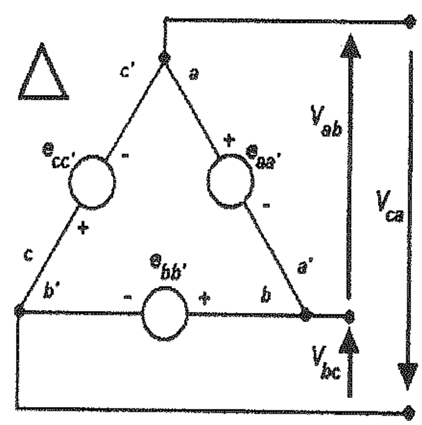


Fig.6.5.- Configuración Δ



6.2.2.- El voltaje entre una fase y el punto neutro de la red se denomina voltaje fase - neutro o línea a neutro en dicho punto. Ejemplo: V_a en la Fig. 6.4

6.2.3.- El voltaje entre fases, en una sección de la red, se llama voltaje línea a línea o entre líneas, o simplemente voltaje de línea en dicho punto. Ejemplo: v_{ab} en la Fig. 6.5.

Conexión Y: Los voltajes de fase son iguales a los voltajes fase-neutro.
Conexión Δ: Los voltajes de fase son iguales a los voltajes de línea.

El conjunto balanceado trifásico de voltajes queda completamente definido mediante el fasor V_a y la secuencia de fases.

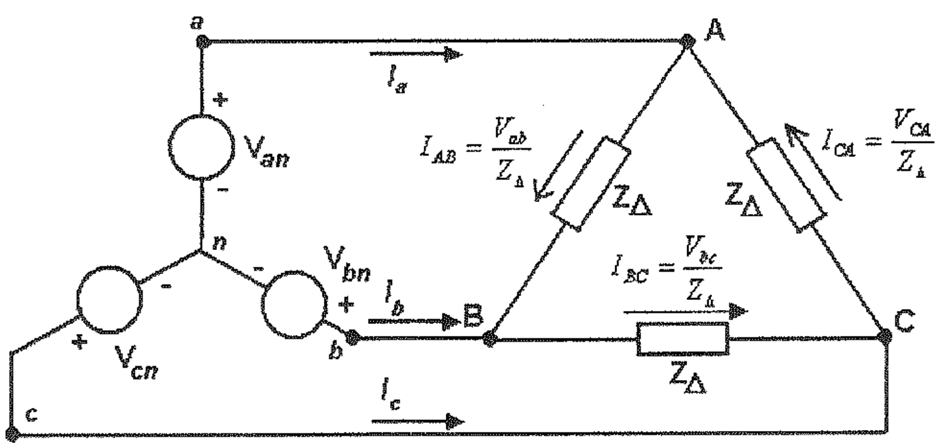
Todos los conceptos anteriores son similares para el caso de corrientes trifásicas balanceadas.

6.3.- Sistema Trifásico Simétrico

Para un sistema trifásico simétrico (un elemento o red completa), se deben cumplir los dos puntos siguientes:

- El sistema debe ser lineal, y
- Debe circular, por cualquier punto del sistema, una corriente trifásica balanceada si el sistema es excitado con un voltaje trifásico balanceado.

Figura 6.6.- Sistema balanceado, fuente Y con carga Δ



$\{e_{an}, e_{bn}, e_{cn}\}$ balanceados , $\{i_a, i_b, i_c\}$ equilibradas

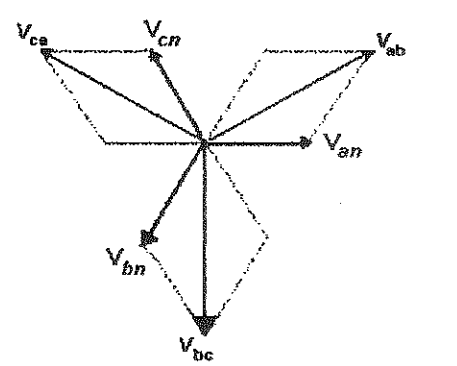
En la práctica, los componentes trifásicos (transformadores, generadores, motores, etc.) son aproximadamente simétricos.

6.3.1.- Relación entre los voltajes fase-neutro y entre líneas.

Supongamos que tenemos los siguientes voltajes fase-neutro (En una fuente ó cualquier punto de la red).

$$V_{an} = V_{fn}\ \underline{|0^\circ}$$
$$V_{bn} = V_{fn}\ \underline{|-120^\circ}$$
$$V_{cn} = V_{fn}\ \underline{|-240^\circ} = V_{fn}\ \underline{|+120^\circ}$$

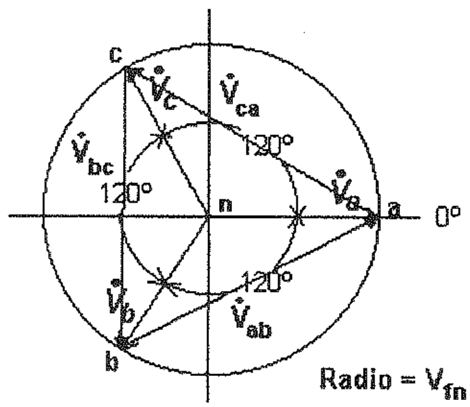
Fig.6.7.- Diagrama fasorial de tensiones



Entonces:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \sqrt{3}\ V_{fn}\ \underline{|30^\circ}$$
$$V_{bc} = V_b - V_c = \sqrt{3}\ V_{fn}\ \underline{|-90^\circ}$$
$$V_{ca} = V_c - V_a = \sqrt{3}\ V_{fn}\ \underline{|150^\circ}$$

Fig. 6.8.- Triángulo de tensiones



En la figura 6.8, los voltajes de línea forman un triángulo equilátero con vértices marcados con las letras a, b y c correspondientes a las fases a, b y c del sistema en el punto considerado. El centro del triángulo corresponde al punto n (neutro).

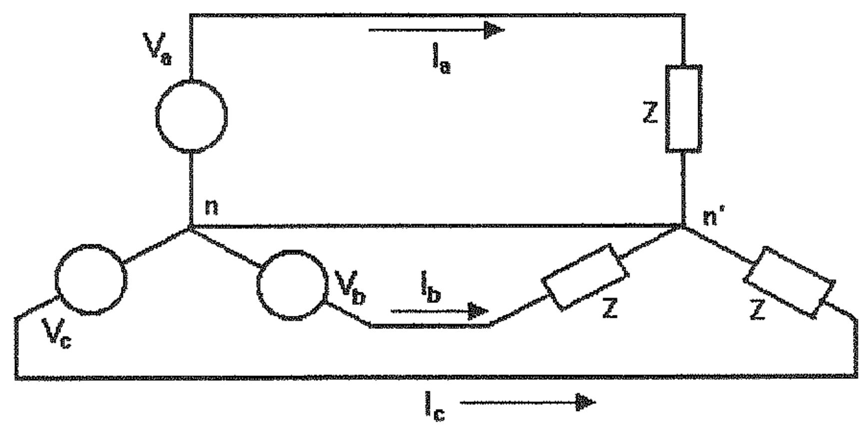
Ambos diagramas tienen a V_{an} como referencia angular, sin embargo, los diagramas pueden ser rotados para que se tenga cualquier referencia.

Como los voltajes fase-neutro y de línea forman un triángulo cerrado su suma es cero.

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0$$
$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

6.4.- Sistema trifásico con carga Y equilibrada.

Figura 6.9.- Carga Y equilibrada



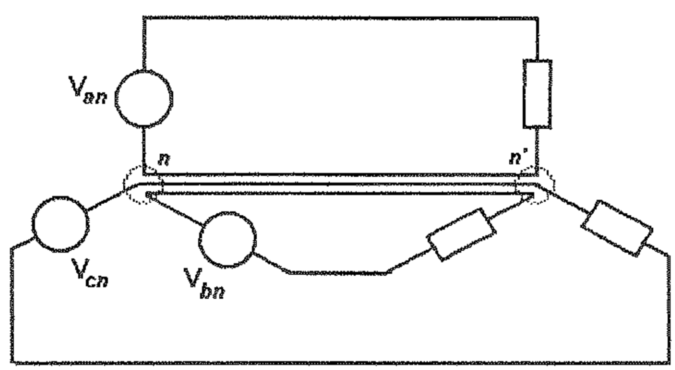
Podemos aplicar la ley de Ohm directamente

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z};\ I_b = \frac{V_{bn}}{Z};\ I_c = \frac{V_{cn}}{Z}$$

Observar que las corrientes de línea correspondientes son de igual magnitud y fase que las corrientes fase.

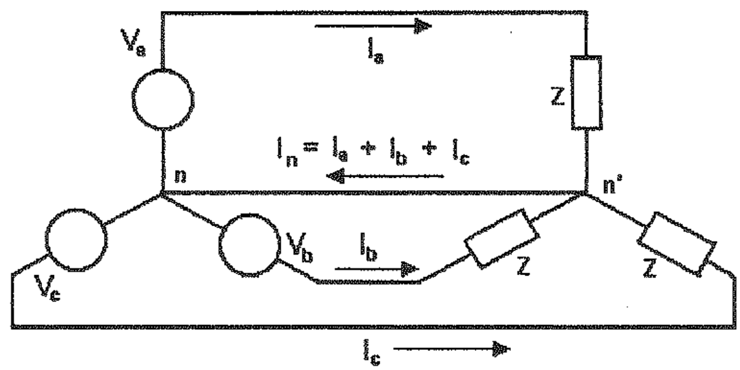
Es decir, el circuito trifásico, para este caso, lo podemos representar por tres circuitos monofásicos independientes.

Figura 6.10.- Representación de un sistema trifásico mediante tres sistemas monofásicos.



6.4.1.- Conexión de conductor n – n'

Fig. 6.11.- Conductor neutro en configuración Y equilibrada

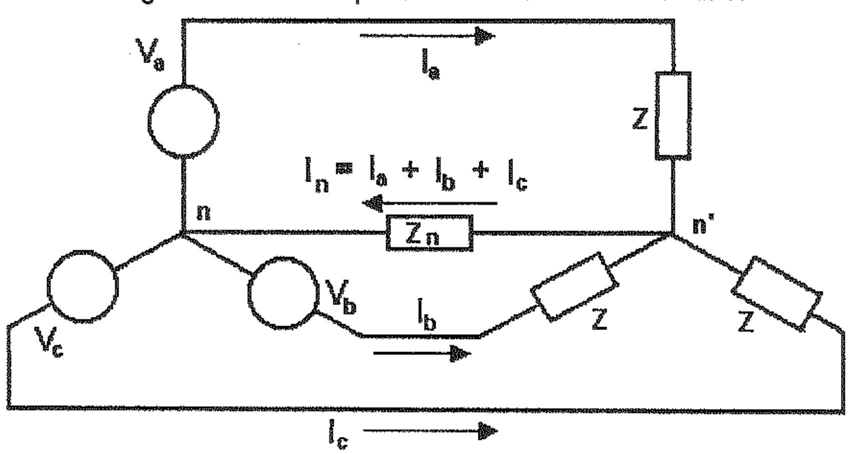


En la figura 6.11 se aprecia que $I_n = I_a+I_b+I_c$ en todos los casos.
En el caso particular de sistemas equilibrados, $I_a+I_b+I_c$ es igual a cero, ya que se trata de un conjunto 3 ∅ equilibrado de corrientes.

Lo anterior implica que, tratándose de un sistema trifásico equilibrado, el conductor para el neutro es innecesario, ya que no transporta corriente.

Además, no existe diferencia de voltaje entre los puntos n y n' ($V_{nn'} = 0$). Esto también es válido aunque exista una impedancia en el conductor neutro (por ejemplo, un cable con pérdidas), dado que $I_n = 0$.

Fig. 6.12. Configuración Y con impedancia en el conductor neutro.



En la Fig. 6.12 se tiene:

$$\dot{I}_a+\dot{I}_b+\dot{I}_c=\dot{I}_n$$

$$\frac{V_{an}-V_{nn'}}{Z}+\frac{V_{bn}-V_{nn'}}{Z}+\frac{V_{cn}-V_{nn'}}{Z}=\frac{V_{nn'}}{Z_n}=I_n$$

$$\frac{1}{Z}\left(V_{an}+V_{bn}+V_{cn}\right)-\frac{3}{Z}V_{nn'}=\frac{V_{nn'}}{Z_n}=I_n$$

$$-\frac{3}{Z}V_{nn'}=\frac{V_{nn'}}{Z_n}$$

$$V_{nn'}\left(\frac{1}{Z_n}+\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow V_{nn'}=0$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{V_{nn'}}{Z_n}=0$$

Como $V_{nn'}=0$, $V_{an}=V_{an'}$ $V_{bn}=V_{bn'}$ $V_{cn}=V_{cn'}$

Así, el equivalente monofásico sigue siendo válido, incluso, $V_{nn'}=0$, aunque no exista el conductor neutro.

$I_a+I_b+I_c=0$

$$\frac{V_{an}-V_{nn'}}{Z}+\frac{V_{bn}-V_{nn'}}{Z}+\frac{V_{cn}-V_{nn'}}{Z}=0$$

y dado que $V_{an}+V_{bn}+V_{cn}=0$

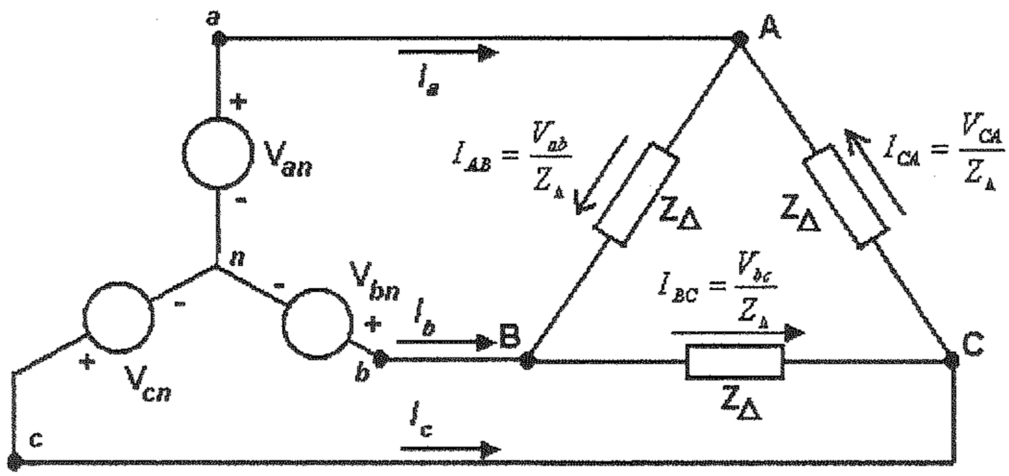
$$\Rightarrow -\frac{3}{Z}V_{nn'}=0\Rightarrow \mathrm{V}_{nn'}=0$$

Resumiendo:

> Los voltajes de la fuente *3∅ Y balanceada* aparecen totalmente en la carga Y equilibrada, por lo que se puede aplicar la ley de Ohm directamente en los casos de circuito con conductor neutro con impedancia cero, conductor neutro con impedancia distinta a cero o sin conductor neutro: *en todos estos casos $V_{nn'}=0$*

6.5.- Sistema trifásico con carga Δ equilibrada

Fig. 6.13.- Sistema trifásico con carga Δ equilibrada



$I_a = I_{AB} - I_{CA}$ $\quad I_b = I_{BC} - I_{AB}$ $\quad I_c = I_{CA} - I_{BC}$

$V_{ab} = V_{an} - V_{bn}$ $\quad V_{bc} = V_{bn} - V_{cn}$ $\quad V_{ca} = V_{cn} - V_{an}$

$$I_L = \sqrt{3} I\phi$$
$$V_\phi = V_L$$

Observación: Las corrientes en las líneas y las corrientes en la carga Δ, son balanceadas.

$I_a + I_b + I_c = 0$ (aunque el sistema sea desbalanceado)

$I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = 0$

Al conjunto trifasico de corrientes, se les denomina *corrientes de fase*.

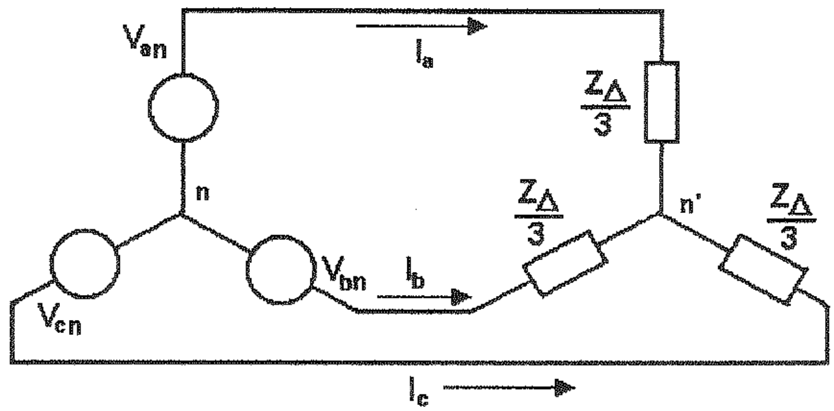
Carga en Y: Las corrientes de fase, son iguales a las corrientes de línea.

Carga en Δ: Las corrientes de fase, son iguales a las corrientes que circulan por las impedancias conectadas en las fases.

6.5.1.- Transformación de carga Δ a carga Y.

El problema anterior, se puede resolver también, si transformamos, la carga Δ, en una carga Y, recordando que $Z_Y = \dfrac{Z_\Delta}{3}$

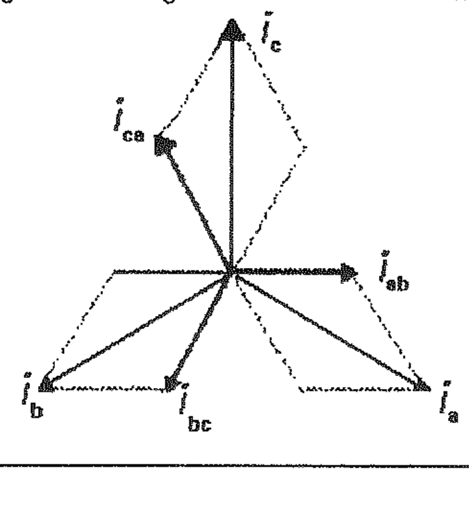
Fig. 6.14.- Circuito con carga Δ transformada a carga Y



Con lo que el problema transformado, es un circuito en estrella equilibrado.

Así, en primer lugar, calculamos la corriente de línea que son iguales en ambos problemas y a partir de éstos, obtenemos las corrientes de fase en la carga

Figura 6.15 Diagrama fasorial de corrientes



6.6.- Circuito equivalente monofásico.

Cuando se trabaja con circuitos trifásicos equilibrados, las cargas en Δ se transforman en cargas en Y. A su vez, un circuito en Y se puede representar por tres sistemas monofásicos. De esta forma, se requiere analizar solamente una fase para resolver un sistema trifásico, dado que las relaciones de fase son conocidas.

Fig. 6.16 Ejemplo de sistema trifásico con impedancias en las líneas

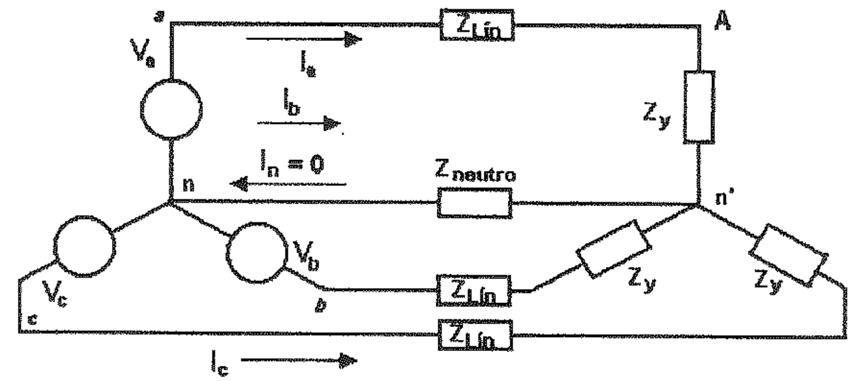
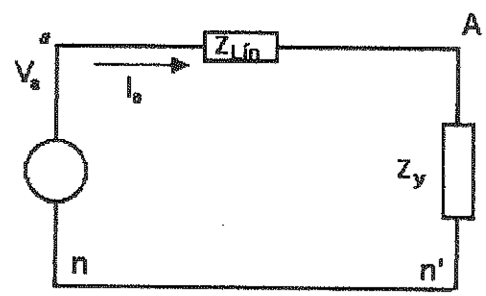


Fig. 6.16a.- Equivalente monofásico



Una vez resuelto el equivalente monofásico, los voltajes y corrientes en las otras dos fases son iguales en magnitud con desfases de ± 120°, con respecto a la fase considerada (considerar secuencia).

6.7.- Potencia en circuitos 3 ∅ balanceados.

Fuentes Y y Δ:

Fig. 6.17.- Fuente Y

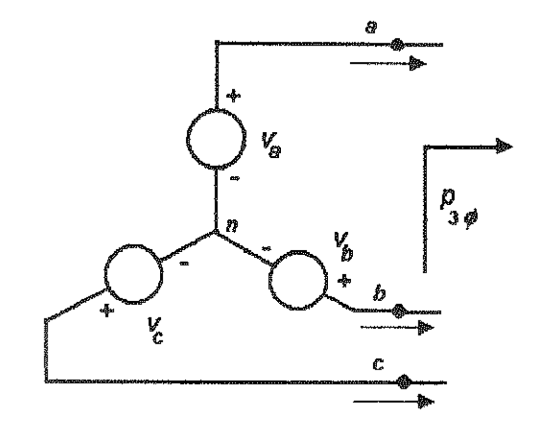
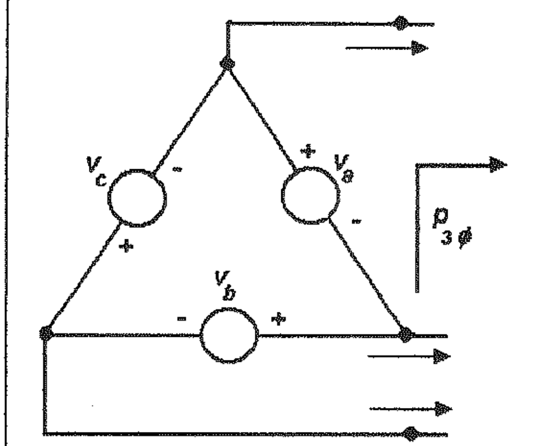


Fig. 6.18.- Fuente Δ



Cargas Y y Δ:

Fig. 6.19. Carga Y

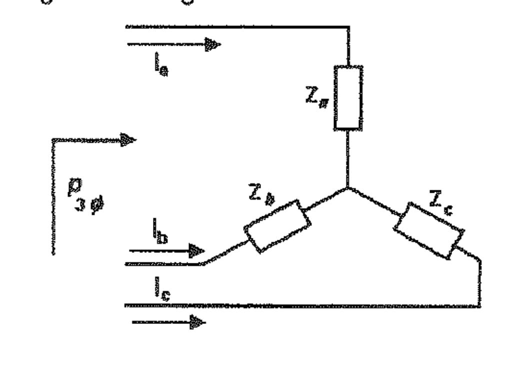
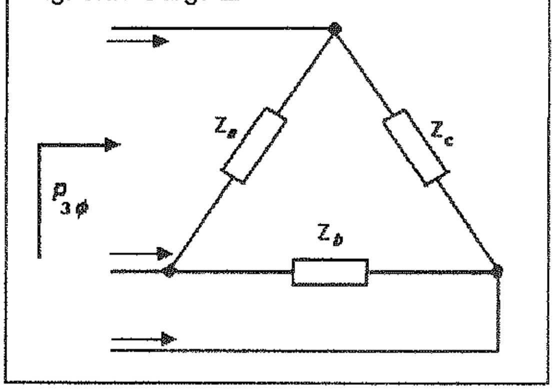


Fig. 6.20 Carga Δ



En todos estos casos las variables de voltaje y corriente son *cantidades de fase.*

6.7.1.- Potencia instantánea en un circuito trifásico simétrico balanceado y equilibrado

Sea el sistema balanceado de tensiones trifásicas, de magnitud rms $V = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$:

$V_1 = V_m \cos \omega t$, $V_2 = V_m \cos(\omega t - 120°)$, $V_3 = V_m \cos(\omega t + 120°)$

Las corrientes instantáneas de fase, de magnitud rms I serán, en general, para una carga trifásica balanceadada $Z\underline{|\Phi}$:

$I_1 = I_m \cos(\omega t - \phi)$, $I_2 = I_m \cos(\omega t - 120° - \phi)$, $I_3 = I_m \cos(\omega t + 120° - \phi)$

Las potencias instantáneas por fase quedarán expresadas por:

$$
\begin{aligned}
P_1(t) &= V_m \cos(\omega t) \cdot I_m \cos(\omega t - \phi) &&= \frac{1}{2} V_m I_m \left(\cos(\phi) + \cos(2\omega t - \phi)\right) \\
P_2(t) &= V_m \cos(\omega t - 120°) \cdot I_m \cos(\omega t - 120° - \phi) &&= \frac{1}{2} V_m I_m \left(\cos(\phi) + \cos(2\omega t - 120° - \phi)\right) \\
P_3(t) &= V_m \cos(\omega t + 120°) \cdot I_m \cos(\omega t + 120° - \phi) &&= \frac{1}{2} V_m I_m \left(\cos(\phi) + \cos(2\omega t + 120° - \phi)\right)
\end{aligned}
$$

La suma de potencias instantáneas $P_T(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$ puede escribirse:

$$P_T(t) = \frac{3}{2} V_m I_m \left(\cos(\phi)\right) = 3 \cdot VI \cos\phi$$

Obsérvese que $P_T(t)$ es un valor constante, ya que los términos en ωt se cancelan por simetría.

6.7.2.- Potencia Media

$$P_{3\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T p_{3\phi}(t)\, dt = 3\, V\phi\, I\phi\ \cos\gamma$$

Así :

$\mathrm{P}_{3\phi} = p_{3\phi}(t)$: constante.

6.7.3.- Potencia compleja trifasica en sistema equilibrado

Sea $V\phi \angle \delta$ la tensión de fase e $I\phi \angle \beta$ la corriente de fase, entonces:

$$S_a = V_a\, I_a = V\phi\, I\phi \angle \delta - \beta = V\phi\, I\phi \angle \varphi = \quad V\phi\, I\phi \cos\varphi \;+\; jV\phi\, I\phi \;\text{ sen }\varphi$$

$$S_b = V_b\, I_b = V\phi\, I\phi \angle \delta - \beta = V\phi\, I\phi \angle \varphi = \quad V\phi\, I\phi \cos\varphi \;+\; jV\phi\, I\phi \;\text{ sen }\varphi$$

$$S_c = V_c\, I_c = V\phi\, I\phi \angle \delta - \beta = V\phi\, I\phi \angle \varphi = \quad V\phi\, I\phi \cos\varphi \;+\; jV\phi\, I\phi \;\text{ sen }\varphi$$

$$S_{3\phi} = \quad S_a + S_b + S_c$$

$$S_{3\phi} = \underbrace{3V\phi\, I\phi \cos\varphi}_{P_{3\phi}} + j\, \underbrace{3V\phi\, I\phi \text{ sen }\varphi}_{Q_{3\phi}}$$

$$S_{3\phi} = \quad P_{3\phi} \quad + j \quad Q_{3\phi}$$

$$|S_{3\phi}| \;=\; \sqrt{P_{3\phi}^2 + Q_{3\phi}^2}$$

La magnitud de la potencia compleja se expresa en VA

Conexión Y :

$$V\phi = V_L / \sqrt{3}$$
$$I\phi = I_L$$
$$S_{3\phi} = 3\, V\phi\, I\phi \angle \varphi = 3\, \frac{V_L}{\sqrt{3}}\, I_L \angle \varphi = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \angle \varphi$$

Conexión Δ:

$$V\phi = V_L$$
$$I\phi = I_L / \sqrt{3}$$
$$S_{3\phi} = 3\, V\phi\, I\phi \angle \varphi = 3\, V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \angle \varphi = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \angle \varphi$$

En cualquier caso se puede aplicar:

$$S_{3\phi} = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \angle \varphi = P_{3\phi} + j\, Q_{3\phi}$$
$$P_{3\phi} = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \cos\varphi$$
$$Q_{3\phi} = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \text{ sen }\varphi$$

6.8.- Ventajas de un sistema 3ϕ comparado con 3 sistemas 1ϕ.

6.8.1.- Ventajas en los costos de transmisión de energía.

Un sistema 3ϕ balanceado, comparado con un sistema formado por tres circuitos 1ϕ, que suministran la misma potencia a un consumo dado, requiere solamente la *mitad de los conductores* para transmitir dicha potencia. Así, las pérdidas RI^2 en las líneas del sistema 3ϕ son la mitad, en relación al sistema de tres circuitos 1ϕ.

La caída de voltaje al extremo de la carga se reduce a la mitad.

6.8.2.- Ventajas de sistema 3ϕ comparado con sistemas 1ϕ en la construcción de máquinas.

En el caso de una máquina 1ϕ, en la potencia instantánea $p(t) = v_a(t)\cdot i_a(t)$ existe una *componente de doble frecuencia* (2ω). Esta componente crea vibración en el eje (además de ruido), lo que puede ocasionar una fatiga mecánica, haciendo poco aconsejable la construcción de máquinas monofásicas para potencias elevadas (P>5 kVA).

En el caso trifásico, *$p_{3\phi}(t)$ es constante*, por lo que el torque mecánico en el eje de un generador trifásico es prácticamente constante.

$$\tau = \frac{p(t)}{w_0}$$

Por esta razón, la mayoría de los generadores y motores, de potencias superiores a 5kVA, se construyen para operar en forma 3ϕ para minimizar la vibración del eje.

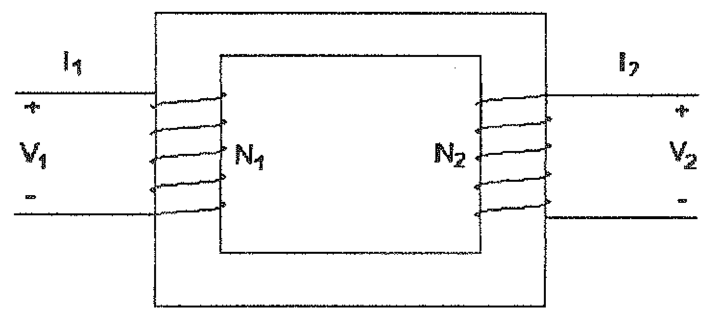
CAPITULO 7

TRANSFORMADORES

7.1.- Definiciones

Un transformador es un dispositivo eléctrico cuya entrada de potencia eléctrica alterna (v_1, i_1) es transferida como salida con otra tensión (v_2, i_2).
Esta transformación en la forma de la potencia se realiza mediante interacción magnética entre los bobinados (acoplados) que constituyen el transformador.

Fig.7.1.- Transformador elemental



N1 : cantidad de espiras del devanado primario (entrada)
N2 : cantidad de espiras del devanado secundario (salida)

Si V1>V2 ==> transformador reductor de tensión
Si V1<V2 ==> transformador elevador de tensión
Si V1=V2 ==> transformador de aislación

7.2.- Tipos de transformadores

Según el área de aplicación, los transformadores se pueden clasificar en:

- transformadores de poder o de potencia

Este tipo de transformador se emplea para adaptar niveles de potencia al consumo, es decir, su finalidad principal es lograr eficiencia en la transferencia de potencia, desde niveles de unos pocos Watt hasta centenares de miles de Watt.

- transformadores adaptadores de impedancia o acoplamiento

En algunos casos, la impedancia de la fuente difiere significativamente de la impedancia de carga, lo cual no solo acarrea problemas de eficiencia, sino que también en términos de desempeño del sistema (respuesta de frecuencia). Estos transformadores son de una potencia de unos pocos miliwatt hasta varios centenares de watts.

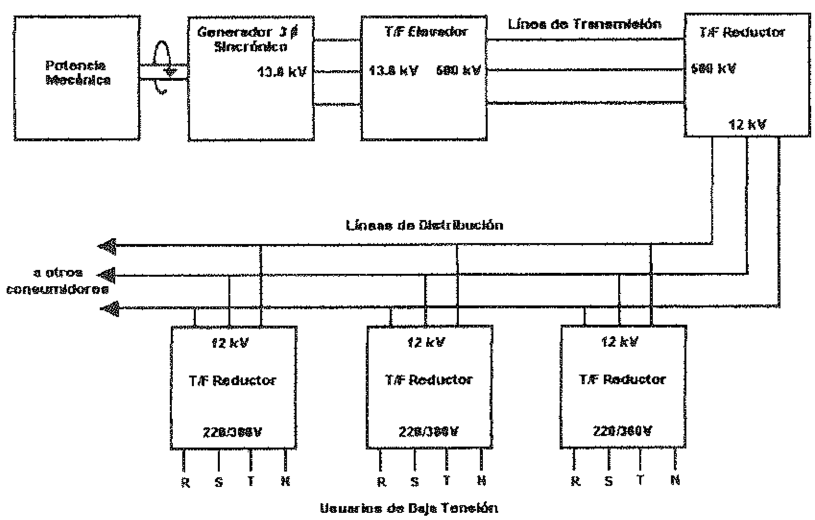
- transformadores de medida

Son transformadores construidos para servir como sensores de corrientes o tensiones con propósito de medición, monitoreo o control.

En este curso, se tratará principalmente con transformadores de potencia, aplicados en los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP).

Un SEP general se muestra en la Fig.7.2.

Fig. 7.2.- Sistema Eléctrico de Potencia.



7.3.-Aspectos constructivos.

Fig.7.3.- Transformador tipo núcleo

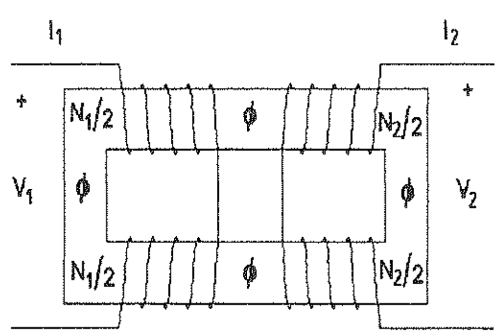
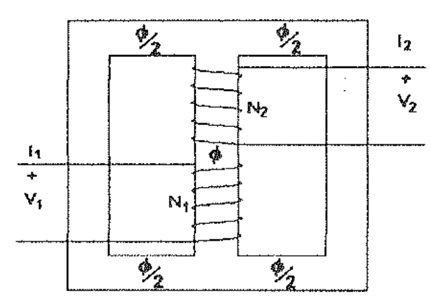


Fig. 7.4.- Transformador Acorazado

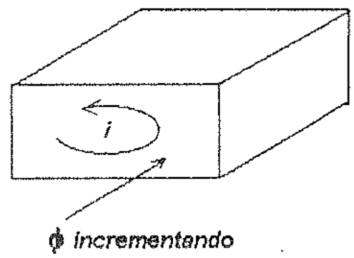


7.4.- Pérdidas en Transformadores

7.4.1.- Corrientes Parásitas

Los núcleos de transformadores de potencia, que operan a baja frecuencia (50-400Hz) se construyen en base a láminas de acero recocido con un 1% de contenido de Silicio.
El núcleo está sometido a un campo magnético variable, por lo que se originan corrientes en circuitos magnéticos cerrados. Es así que circularán por el material ferromagnético corrientes indeseadas, llamadas parásitas, como se ilustra en la Fig. 7.5.-

Fig. 7.5.- Corrientes parásitas



Las láminas se aislan entre sí para minimizar las corrientes parásitas, que producen pérdidas i^2R, que se manifiestan como elevación de temperatura del sistema.

7.4.2.- Otras pérdidas

Los devanados de los transformadores se realizan con conductores de Cu, lo que contribuye a las pérdidas I^2R y por consiguiente a la elevación de temperatura del sistema.

Lo anterior, sumado a pérdidas magnéticas (por histéresis), puede hacer necesario considerar restricciones en el diseño para incluir elementos que contribuyan a la disipación de calor, mediante estrategias de refrigeración por aire o fluidos, ya sea por ventilación natural (convección) o forzada (ventiladores o bombas).

7.5.- Transformador ideal

Se entiende por transformador ideal a aquél que no presenta pérdidas.

Fig. 7.6.- Transformador ideal

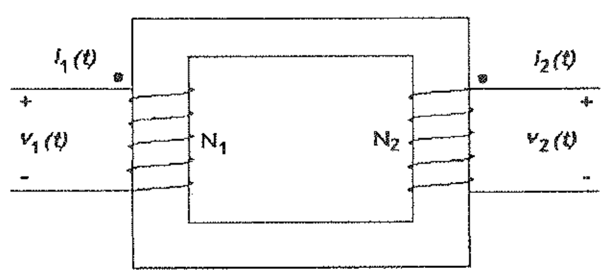
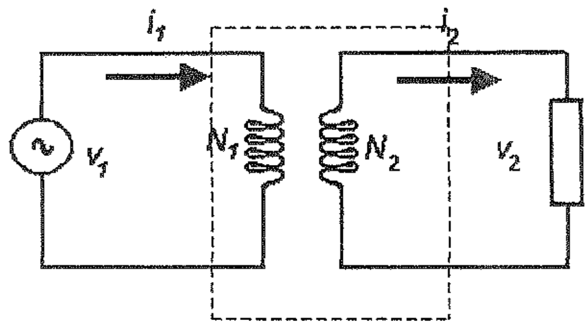


Fig. 7.7.- Esquema circuital de transformador ideal



7.5.1.- Relaciones en un transformador ideal

Relación de transformación *a*

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

Relación de potencia (potencia primario = potencia secundario, sin pérdidas)

$$V_1 i_1 = V_2 i_2$$

Relación de corrientes (a partir de la relación anterior)

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$$

Relación en cantidades fasoriales

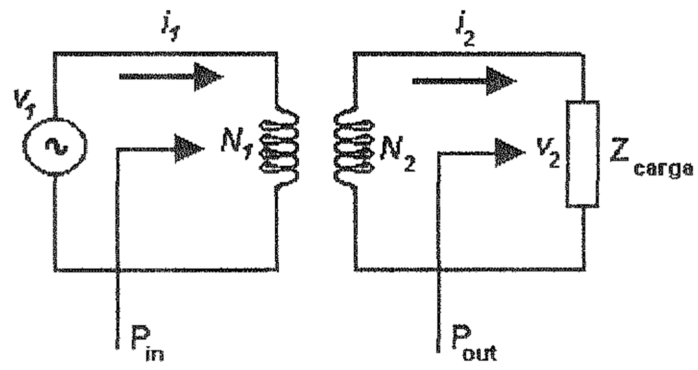
$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = a$$

Los ángulos de las variables del primario y secundario son los mismos, si se respeta la polaridad. Esto es, las tensiones del primario y secundario están en fase y las corrientes del primario y secundario están en fase.

Las relaciones anteriores también se satisfacen para los valores máximos y eficaces.

7.5.2.- Potencia en un transformador ideal

Fig. 7.8.- Potencia en un transformador ideal



$$P_{in} = V_1 \cdot i_1 \cos\phi_1$$
$$P_{out} = V_2 \cdot i_2 \cos\phi_2$$

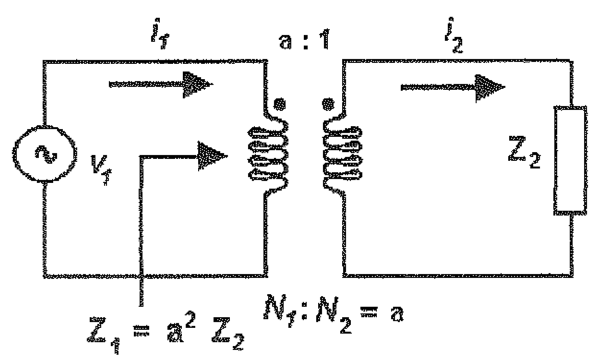
$$\phi_1 = \phi_2$$

Además:

$$S_{in} = S_{out} \qquad Q_{in} = Q_{out}$$

7.6.- Transformación de Impedancia

Fig. 7.9.- Transformación de impedancia

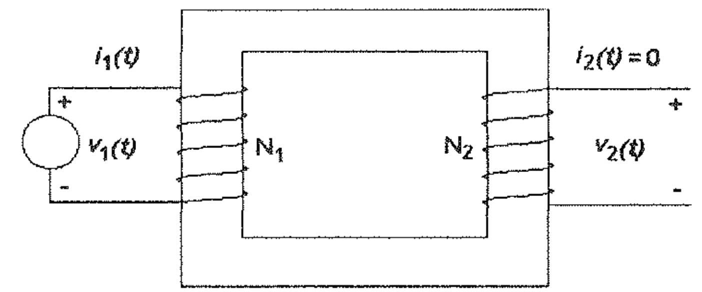


$$Z_1 = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \qquad Z_2 = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{V}_1 / a}{a \cdot \dot{I}_1} = \frac{1}{a^2} Z_1$$

7.7.- Operación de transformador real: Corriente de excitación

Se denomina corriente de excitación a aquella que circula por el primario de un transformador real, cuando el secundario está en circuito abierto, es decir, en un transformador sin carga.

Fig. 7.10.- Transformador sin carga



En estas condiciones, la corriente por el primario consta de:

- *corriente de magnetización*, necesaria para producir el flujo magnético en el núcleo.

- *corriente de pérdidas*, debida a las corrientes parásitas y pérdidas por histéresis.

La corriente de magnetización es periódica, pero debido a la no linealidad magnética del núcleo, contiene armónicos que deforman la sinusoide.

Fig. 7.11.- No linealidad de corriente de magnetización.

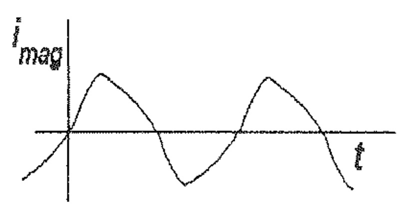
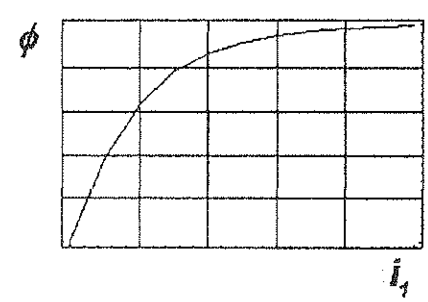


Fig. 7.12.- No linealidad de magnetización.



7.8.- Transformadores Trifásicos

7.8.1.- Aspectos constructivos.

Una posibilidad es conectar tres transformadores monofásicos, para formar una unidad trifásica, como se ilustra en la Fig. 7.13, en la cual el primario presenta configuracion Δ y el secundario configuración Y, con un terminal neutro conectado a masa.

Fig. 7.13.-Transformador 3∅, Δ/Y
3 x 1∅

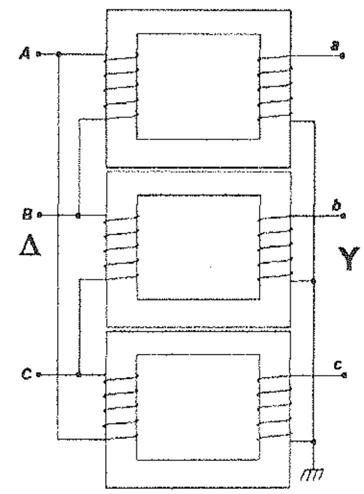
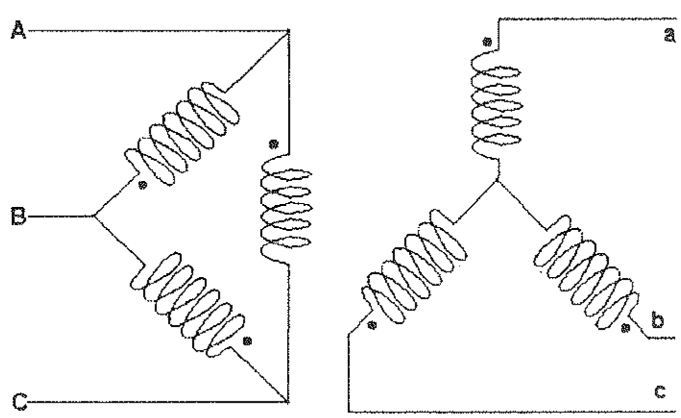
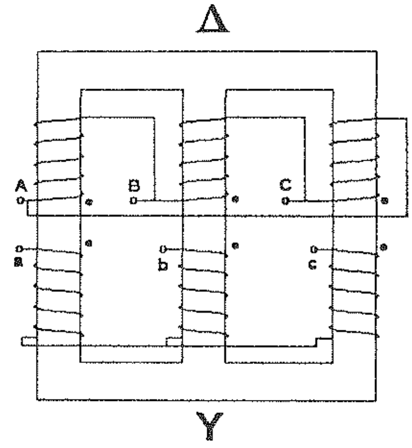


Fig. 7.14.- Diagrama circuital de transformador 3∅ , Δ /Y



Transformador trifásico en el cual los bobinados se han arrollado sobre un núcleo acorazado común.

Fig. 7.15.-Transformador 3∅, Δ / Y



7.9.- Especificación de Transformadores

Los valores nominales son aquellos especificados para operación normal, es decir, deben ser respetados para asegurar el funcionamiento normal del transformador.
Los valores nominales que describen un transformador se incluyen en la placa de características que los fabricantes deben adosar a la estructura de sus productos.
Las características más importantes son:

Característica	Unidad de Medida	Especificación
Potencia nominal	W	nom
Potencia aparente	VA	nom
Tensiones	V_{rms}	nom, máx
Corrientes	A_{rms}	nom, máx
Frecuencia de operación	Hz	nom, mín, máx
Temperatura Ambiente	°C	nom, mín, máx
Temperatura Operación	°C	nom, máx
Humedad relativa del aire	%	nom, máx
Presión atmosférica	hPa	nom, min

Debido a las características de magnetización, la inductancia de los bobinados es importante y cabe observar:

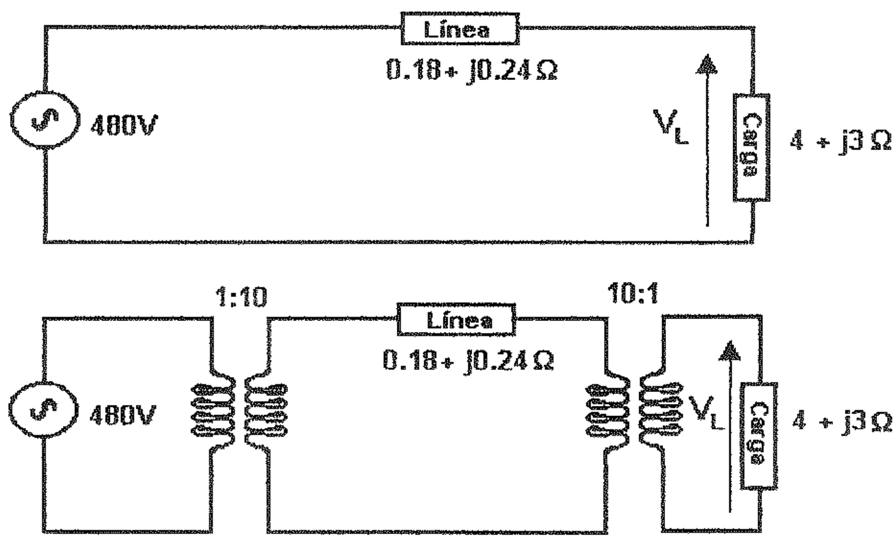
- La ***máxima tensión*** que se puede aplicar está relacionada con la aislación y con la corriente de magnetización.
- La ***frecuencia***, determinada por la red en el caso de transformadores de potencia, determina la reactancia de los bobinados, por lo que si se baja la frecuencia, debe bajarse la tensión para no exceder las corrientes de magnetización
- La ***potencia aparente*** establece, junto con la ***tensión nominal***, la máxima corriente que se puede permitir sin exceder las pérdidas I^2R que elevan la temperatura y dañan la aislación.

7.10.- Ejercicios de aplicación

7.10.1.- Ejercicio de aplicación en transmisión de potencia

Un sistema de potencia monofásico consta de un generador de 480V, 60 Hz alimenta una carga $Z_L = 4 + j3\ \Omega$, mediante una línea de transmisión cuya impedancia total es $0.18 + j\,0.24\ \Omega$.
a) Determinar el voltaje en la carga y las pérdidas en la transmisión.
b) Supóngase que entre la salida del generador y la línea de transmisión se conecta un transformador elevador 10:1 y al extremo de la línea de transmisión un transformador reductor 1:10 conectado a la carga. Determinar el voltaje en la carga y las pérdidas en la transmisión.

Fig. 7.16.- Sistemas sin y con transformador



Respuestas:

a) $V_L = 454\ \angle -0.9^\circ$ [V], pérdidas = 1.48 [kW]

b) $V_L = 479.7\ \angle -0.01^\circ$ [V], pérdidas = 16.7[W]

7.10.2.- Aplicación en adaptación de impedancia.

El amplificador de potencia de un sistema de audio puede representarse como un generador de tensión con una resistencia en serie (fuente real de tensión). Para máxima transferencia de potencia se requiere que la carga conectada (sistema de parlantes) tenga la misma resistencia que la fuente (equivalente del amplificador).

Ejercicio:

Un amplificador de potencia de audio tiene una impedancia de 4Ω y se desea conectar a un sistema de parlantes de 16Ω. Especificar la relación *a* del transformador que maximiza la potencia útil.

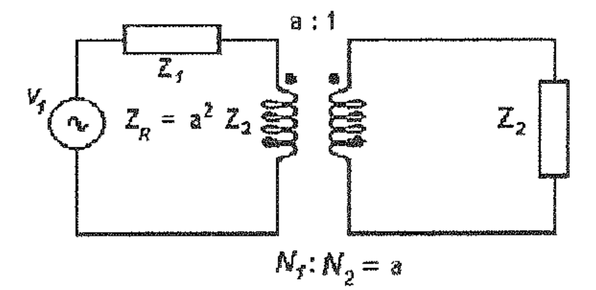
Solución:

$Z_1 = 4\Omega$; $Z_2 = 16\Omega$

$a^2 Z_2 = Z_1$, por lo tanto, $a = \sqrt{\dfrac{Z_1}{Z_2}}$

y $a = 0.5$, es decir el secundario debe tener el doble de vueltas que el primario para que la impedancia "vista" por la fuente Z_R sea igual a Z_1

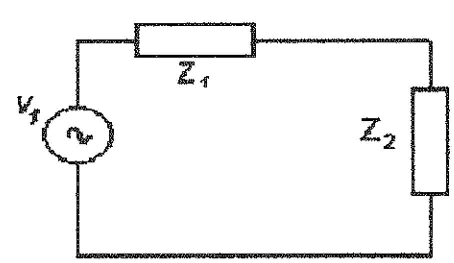
Fig. 7.17.- Adaptación de impedancia



Observación:

En el caso de una fuente alterna cuya impedancia Z_1 sea una magnitud compleja, la carga Z_2 para máxima transferencia de potencia debe ser el complejo conjugado, $Z_2 = Z_1^*$ o bien, si $Z_1 = R + jX$, entonces $Z_2 = R - jX$ para máxima transferencia.

Fig. 7.18.- Máxima transferencia



CAPITULO 8

CONVERSION ELECTROMECANICA

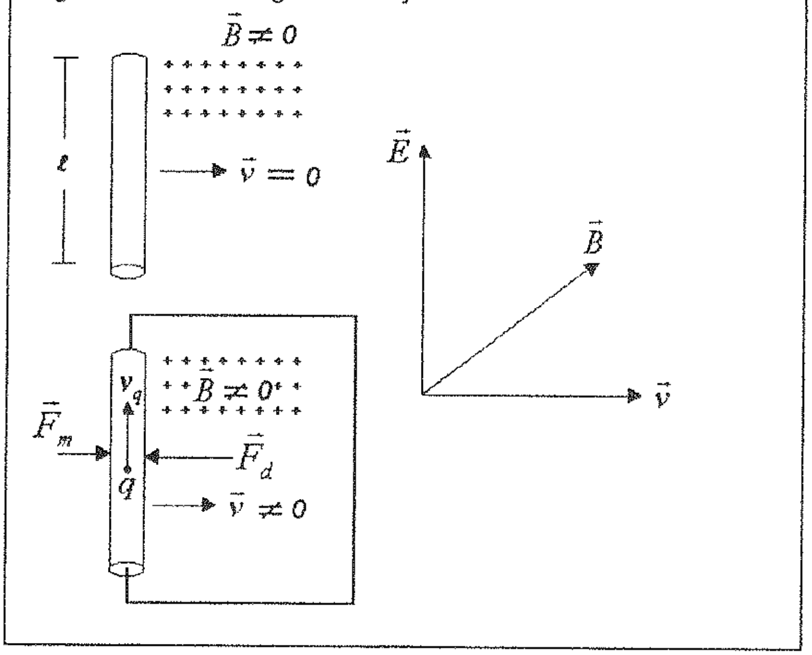
8.1.- Inducción electromagnética en máquinas de CC.

La tensión E inducida en un conductor de longitud ℓ, que se mueve a velocidad v en un campo magnético uniforme de densidad de flujo magnético B, está dada por:

$$\vec{E} = \vec{B}\cdot(\vec{\ell}\times\vec{v})$$

En esta expresión, E es expresado en volts, B en Tesla (Wb/m^2), ℓ en metros y v en m/s.

Fig. 8.1.- Acción de generador y motor



La densidad de flujo magnético B (Wb/m^2) se obtiene del flujo magnético originado en los polos ϕ_{POLO} y la longitud activa ℓ_A del conductor inmerso en el flujo polar:

$$B = \phi_{POLO} / \ell_A \quad [\ Wb/m^2\ ]$$

Para la acción como *motor*, considerar que el conductor de longitud ℓ, inmerso en el campo magnético B, está conduciendo una corriente I. En tales condiciones, el conductor experimenta una fuerza F proporcional a la corriente, dada por:

$$\vec{F} = I(\vec{\ell} \times \vec{B})$$

En esta expresión, F es la fuerza en Newton, I la corriente en Ampère, ℓ la longitud del conductor en metros y B el campo magnético en Tesla.

La dirección de la fuerza es perpendicular a las direcciones de la corriente y al campo magnético.

Las relaciones anteriores se aplican a máquinas rotativas, considerando su velocidad de rotación *n (r.p.m.)* y el diámetro del rotor *D (m)*, para determinar la *velocidad tangencial* v *(m/s)* de un conductor en la periferia del rotor:

$$v = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60}[m/s]$$

8.1.1.- Si agrupamos en un factor K_g (constante de *la máquina como generador*) las características geométricas de la máquina actuando como *generador*, la tensión E generada resulta:

$$E = K_g \cdot \phi \cdot n \ [V]$$

En esta expresión, ϕ medido en Weber, n en r.p.m.

8.1.2.- Si agrupamos en un factor K las características geométricas de *la máquina actuando como motor*, la fuerza F en el rotor resulta:

$$F = K \cdot \phi \cdot I \ [N]$$

En esta expresión, ϕ medido en Weber, I en Ampère.

El torque τ desarrollado en el eje del rotor es igual al producto de la fuerza F por el radio activo r del rotor, es decir : $\tau_m = F \cdot r$

Siendo el radio r tambien una constante de la máquina, se puede agrupar las constantes en un $K_m = K \cdot r$, tal que:

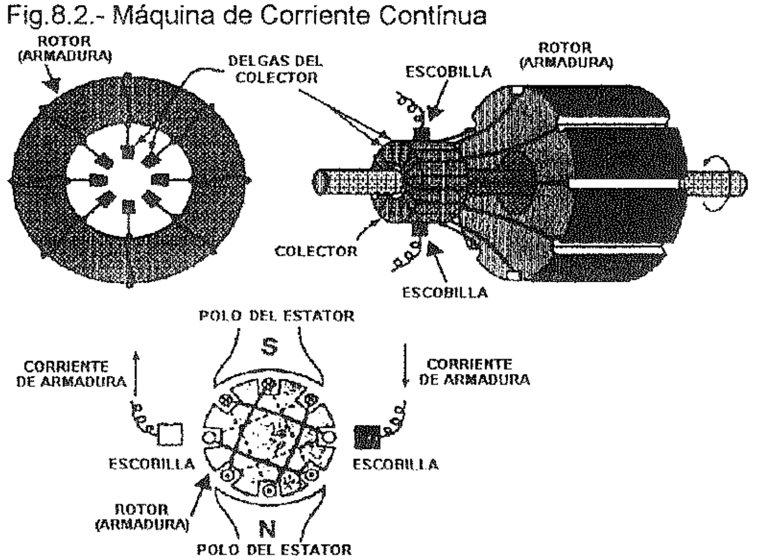
$$\tau_m = K_m \cdot \phi \cdot I [\ Nm\ ]$$

8.2.- Construcción de máquinas de CC.

8.2.1.- Las partes principales de un motor de corriente contínua son:

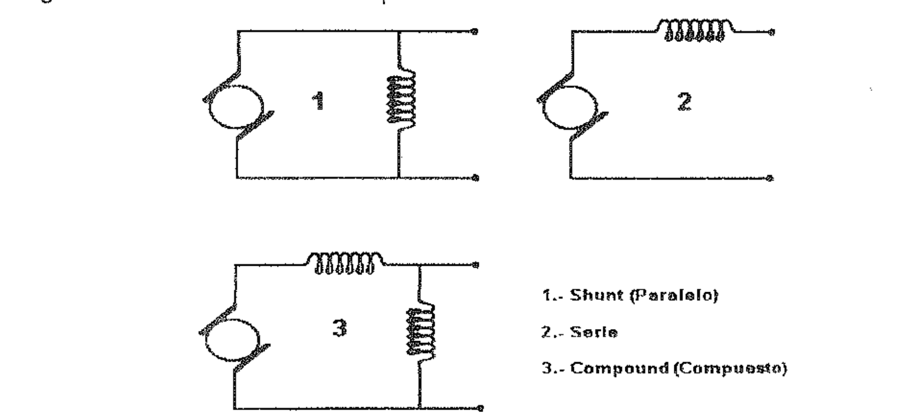
- El **estator** o parte fija en la cual se encuentra el embobinado del estator, llamado tambien el bobinado de campo o **campo**, encargado de magnetizar un par de **polos**.
En motores de pequeña potencia el estator no lleva devanados, en su lugar se ubican **imanes permanentes**.
- El **rotor** es el componente que gira en el interior del estator, tambien se denomina **armadura** y consiste en un conjunto de pares de **polos** de armadura.
- El **colector**, sistema de **delgas** o **conmutador**, montado en el eje del rotor está conectado con el embobinado del rotor. Las escobillas o **carbones** hacen contacto por roce con las delgas, para llevar la corriente a la armadura desde el exterior.

Fig.8.2.- Máquina de Corriente Contínua



8.2.2.- Configuración de bobinados de campo.

Fig. 8.3.- Conexionado de Máquinas de Corriente Contínua.



Las conexiones de los bobinados de campo y armadura se pueden realizar de diversas formas, dependiendo de la característica de comportamiento deseado (Fig. 8.3.-):

- Conexión en paralelo (shunt)

En esta conexión la corriente del estator es suministrada separada de la corriente de armadura.

- Conexión serie.

El estator tiene menos espiras en sus polos. La corriente de armadura y del estator son iguales, resultando una característica que presenta alto torque a baja velocidad, decreciendo el torque con velocidades altas.

Esta característica hace que el motor "se arranque" en velocidad al estar sin carga, pudiendo alcanzar una velocidad tal que el devanado del rotor se deforme o destruya.

- Conexión compound.

En esta conexión el campo está formado por bobinados con alimentación separada de la armadura y en serie con ella. Dependiendo del tipo de campo dominante (si el campo serie ayuda o se opone al campo en paralelo) será la característica de funcionamiento que se obtenga.

En todos los casos, el campo serie contribuye a compensar caída de tensión con un aumento de carga.

Para el análisis estático de los motores en CC no se consideran las reactancias de estator y armadura.

8.3.- Motores Universales

Un motor de corriente contínua puede operar en corriente alterna, considerando que las alternancias ocurrirán simultáneamente en el estator y en la armadura, conservando el torque la misma dirección. (Las reactancias de los bobinados son pequeñas).

Una importante consideración son las corrientes parásitas. Para reducir las pérdidas introducidas por ésta causa, tanto el rotor como el estator se construyen de material laminado, denominándose *motores universales.*

8.4.- Máquinas de corriente alterna

8.4.1.- Definiciones

Un generador de A.C. convierte la energía mecánica en energía eléctrica de corriente alterna. También se conoce como *alternador*.

Un motor de A.C. convierte la energía eléctrica (potencia eléctrica alterna) en trabajo mecánico (potencia mecánica).

8.4.2.- Principio básico de funcionamiento de las máquinas de A.C.

Fig.8.4.- Estator de máquina bifásica (motor).

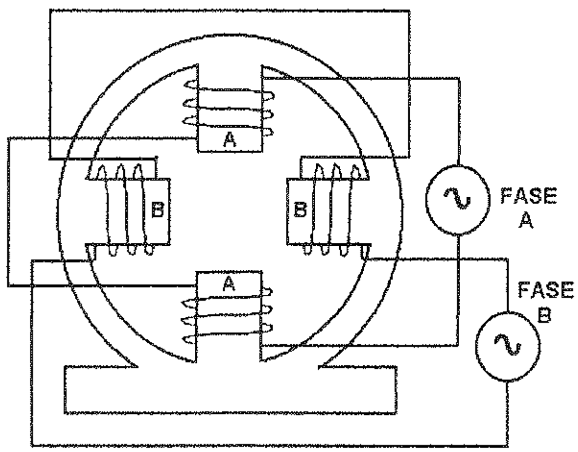
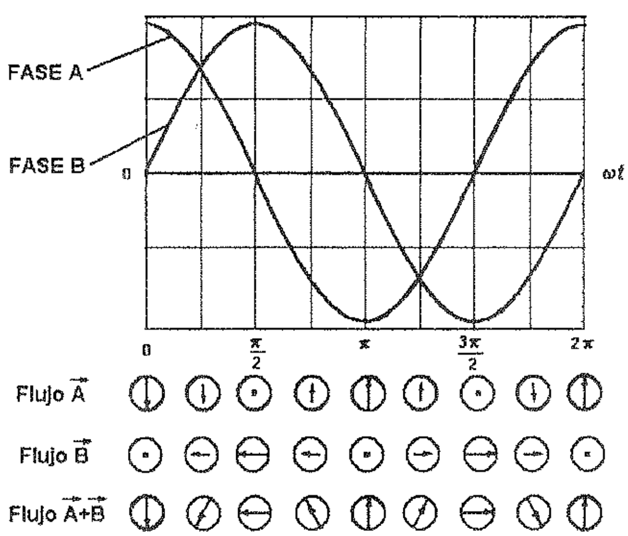
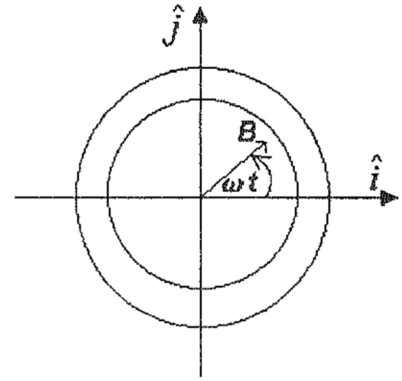


Fig.8.5.- Alimentación bifásica y flujos resultantes en máquina de 4 polos



El sistema de alimentación bifásico *no está disponible como tensión de red*, por lo que la segunda fase debe configurarse en el motor, usando un capacitor como defasador, lo que complica la alimentación del estator.

Fig. 8.6.- Campo giratorio del estator



8.4.3.- Principio básico de máquinas trifásicas.

Dado un sistema trifásico equilibrado de corrientes, que fluye por un devanado trifásico dispuesto simetricamente en el estator de una máquina trifásica, se producirá un campo magnético giratorio de magnitud constante si:

$$i_{aa'}(t) = I_m \cos(\omega t)$$
$$i_{bb'}(t) = I_m \cos(\omega t - 120°)$$
$$i_{cc'}(t) = I_m \cos(\omega t + 120°)$$

Entonces:

$$\vec{B}(t) = 1.5B_m \cos(\omega t)\hat{i} + 1.5B_m \operatorname{sen}(\omega t)\hat{j}$$
$$\dot{B}(t) = 1.5B_m e^{-jwt}$$

Similarmente al caso bifásico, la magnitud de $\dot{B}(t)$ es constante y su ángulo gira a velocidad angular ω radianes/segundo si hay 2 polos por fase.

8.4.4.- Relaciones entre la frecuencia eléctrica, la velocidad de rotación del campo magnético y la cantidad de polos del estator.

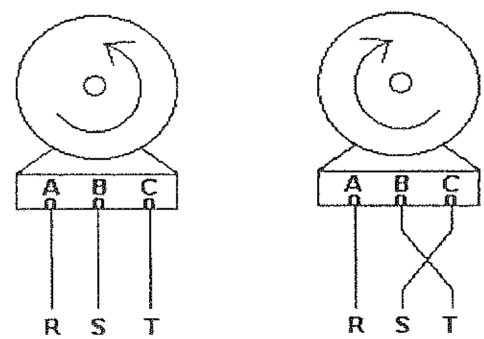
$$\boxed{f_e = \frac{P}{2} f_m} \qquad \boxed{f_e = \frac{n \cdot P}{120}}$$

$$\boxed{f_m = \frac{n}{60}} \qquad \boxed{\omega_e = \frac{P}{2}\omega_m}$$

8.4.5.- Inversión del sentido de giro del campo magnético.

Si se intercambian dos terminales cualquiera en la conexión de una fase del motor, la secuencia de fases aplicada al estator cambiará de sentido, lo que a su vez invertirá el sentido del campo giratorio.

Fig. 8.7. Inversión del sentido de giro



8.5.- Generadores Sincrónicos

Se les denomina sincrónicos debido a que la frecuencia eléctrica f_e *[Hz]* que producen está relacionada directamente con la velocidad de rotación del rotor n *[r.p.m.]* y con la cantidad de polos P por fase: (un giro mecánico = un ciclo eléctrico por cada par de polos)

$$f_e = \frac{n \cdot P}{120}$$

Fig. 8.8.a.- Generador sincrónico (cada bobinado con dos polos por fase).

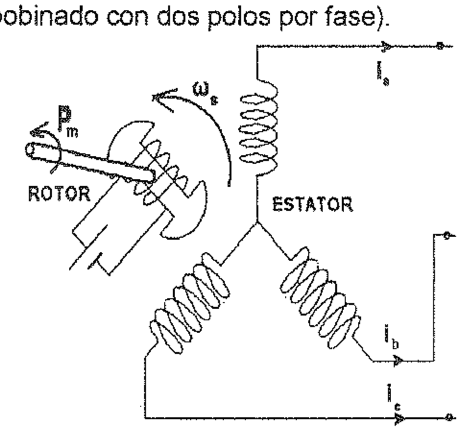
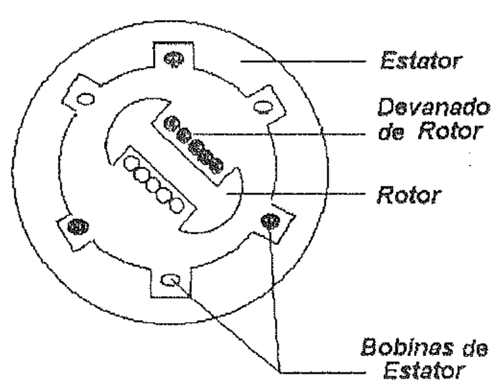


Fig. 8.8.b.- Esquema de generador



8.5.1.- Principio de funcionamiento del Generador Trifásico Sincrónico o Alternador Trifásico.

El rotor de la máquina es impulsado por alguna potencia motriz P_m *[Watt]* (proveniente de una máquina de combustión interna, turbina hidráulica o eólica), con una velocidad angular de rotación ω_s *[rad/s]* (o bien n *[r.p.m.]*).

La velocidad de rotación del rotor (velocidad de rotación sincrónica) produce un campo magnético de magnitud constante, giratorio, que va enlazando los bobinados del estator, induciendo en cada uno de ellos una *tensión alterna senoidal*.

Los bobinados del estator están separados físicamente por 120°, lo cual implica que las tensiones inducidas en cada uno de ellos están defasadas en 120° eléctricos.

Las corrientes de consumo I_a, I_b e I_c, al circular por los bobinados del estator producen un campo magnético que gira también a velocidad sincrónica en el interior de la máquina.

Los campos magnéticos del estator (cuando hay consumo) y del rotor tratan de alinearse (N–S y S–N), produciéndose un torque en el eje de la máquina.

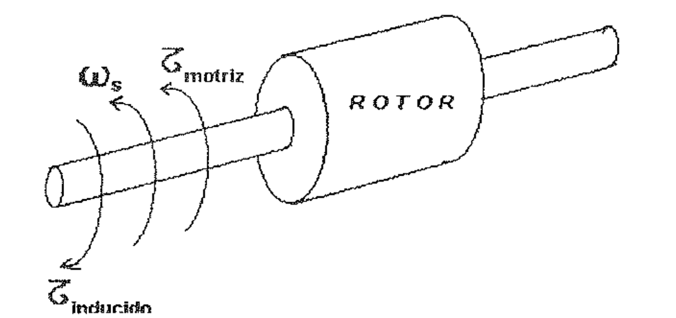


Fig. 8.9.- Sentidos de rotación y torques en generador

8.6.- Motores Sincrónicos

La construcción del estator de un motor es similar en la construcción del estator de un alternador.

La potencia de entrada $P_{3\varnothing}$ es una consecuencia de la aplicación de un conjunto de tensiones trifásico, que producirá un campo magnético giratorio de intensidad constante, al circular las corrientes I_a, I_b e I_c a través del embobinado.

Fig.8.10.a.- Motor sincrónico

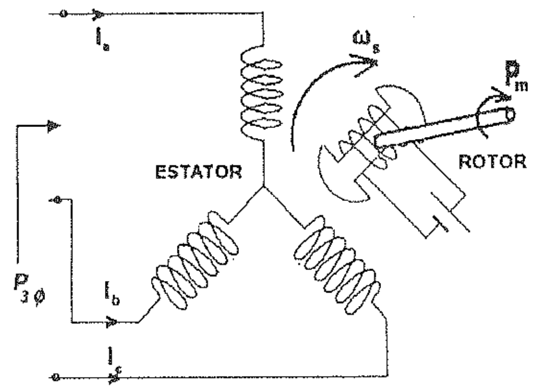
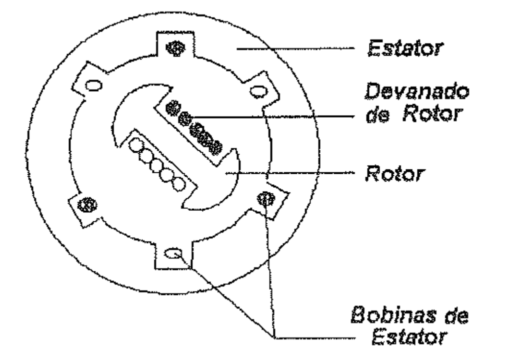


Fig. 8.10.b.- Esquema de motor sincrónico



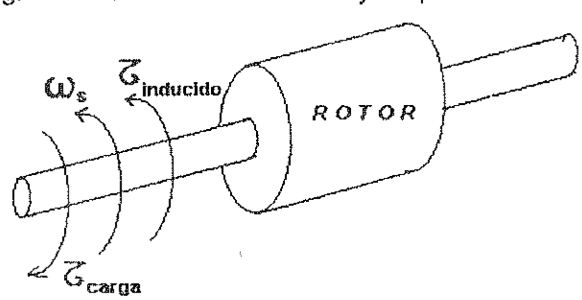
El campo magnético constante del rotor tenderá a alinearse con el campo rotatorio. Si el rotor es llevado una velocidad próxima a la velocidad sincrónica (por algún medio), se producirá un enganche magnético y el rotor girará a velocidad sincrónica $n_m = n_s$.(r.p.m.) o $\omega_m = \omega_s$(rad/s)

La carga mecánica aplicada al eje producirá un torque que se opone al torque inducido, no obstante, la velocidad de giro del rotor se mantendrá constante mientras la potencia eléctrica disponible sea suficiente.

La potencia de entrada $P_{3\varnothing}$ se convierte a potencia mecánica P_m según la relación:

$$P_m = \tau_{inducido} \cdot \omega_m , \quad \text{siendo } P_m = \eta \cdot P_{3\phi}$$

Fig. 8.11.- Sentidos de rotación y torques en motor



8.7.- Motores de Inducción

Reciben esta denominación debido a que la corriente y el campo magnético en el rotor *no dependen de una fuente externa*, sino que la corriente rotórica (que produce el campo magnético del rotor) es *inducida* por el campo giratorio del estator.

8.7.1.- Características de construcción

La construcción del estator de una máquina de inducción es similar a la de una máquina sincrónica, es decir, pares de polos dispuestos simétricamente en la carcasa, alimentados con tensión trifásica. (Rara vez se emplea una máquina de inducción como alternador, razón por la cual se hace referencia a *motores de inducción*)

La aplicación de un sistema trifásico de tensiones al estator produce un flujo equilibrado de corrientes en los bobinados, lo que a su vez origina un campo magnético giratorio de velocidad sincrónica.

Los conductores del rotor son enlazados por el campo giratorio, induciéndose un flujo de corriente por ellos y en consecuencia la aparición de un campo magnético en el rotor.

La interacción entre el campo del estator y el campo del rotor produce un torque neto en el sentido de giro del campo giratorio sincrónico, lo cual acelera al rotor desde la inmovilidad, tratando de alcanzar al campo giratorio.

Si bien el rotor inicialmente acelerará, no le será posible alcanzar la velocidad de giro del campo del estator, ya que a velocidad sincrónica no se produciría flujo magnético variable y sería nula la tensión inducida en el rotor. (Los conductores del rotor estarían siempre enlazados por un flujo constante, con lo que no habría tensión inducida).

Al alcanzar el rotor la velocidad sincrónica el torque inducido sería 0.

Fig. 8.12.a.- Esquema de motor de inducción

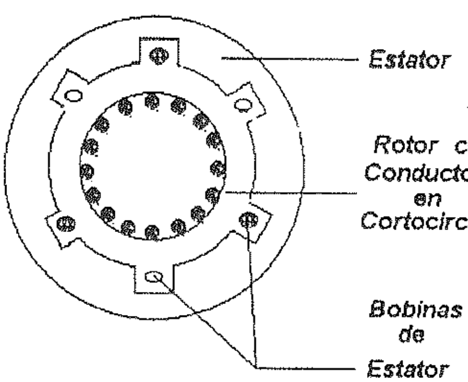
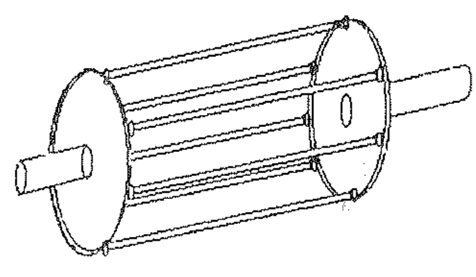
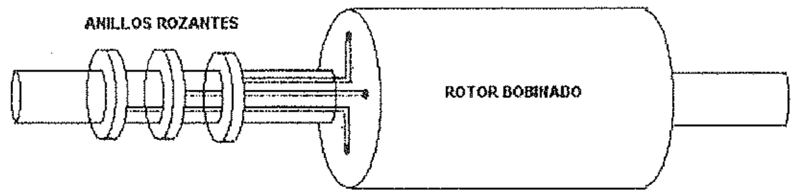


Fig. 8.12.b.- Rotor Jaula de Ardilla. Compuesto por barras de aluminio inmersas en el hierro del rotor y cortocircuitadas por anillos



Las máquinas de inducción pueden construirse con rotores en cortocircuito (por ejemplo el rotor Jaula de Ardilla de la Fig.8.12.b) o bien con rotor embobinado o devanado, con conexión eléctrica externa del rotor mediante anillos rozantes (Fig.8.13).

Fig. 8.13.- Rotor Bobinado de Máquina de Inducción



8.7.2.- Características de Funcionamiento de Motor de Inducción

Se define un parámetro de funcionamiento *s*, denominado deslizamiento, el cual permite describir la condición de operación de un motor de inducción.
Como se explicó, la velocidad de giro del rotor, para que exista torque efectivo, difiere de la velocidad sincrónica.
Se define entonces la Velocidad de Deslizamiento en r.p.m., n_{desliz}

$$n_{desliz} = n_{sinc} - n_{rotor}$$

El factor de deslizamiento o slip se determina por:

$$s = \frac{n_{desliz}}{n_{sinc}} \cdot 100\%$$

$$s = \frac{n_{sinc} - n_{rotor}}{n_{sinc}} \cdot 100\%$$

También se puede expresar el factor de deslizamiento en términos de las velocidades angulares:

$$s = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s}$$

Entonces:

$$n_{rotor} = (1-s)n_{sinc}$$
$$\omega_m = (1-s)\omega_s$$

8.7.3.- Frecuencia eléctrica de corrientes y tensiones en el rotor.

Debido a las corrientes y tensiones inducidas en el rotor de un motor de inducción se hace analogía con un transformador giratorio, en el cual el primario (conectado a la fuente) es el estator y el secundario giratorio es el rotor.

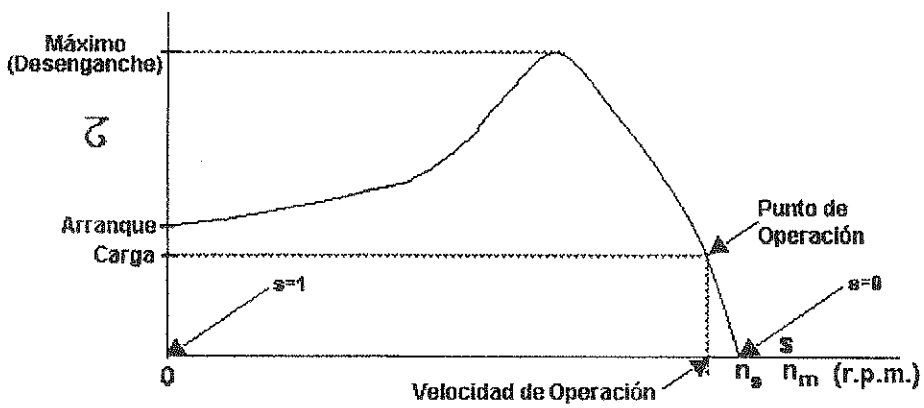
Así, si f_e es la frecuencia en Hz de la tensión trifásica del estator, la frecuencia en el rotor f_r está dada por:

$$f_r = s \cdot f_e [Hz]$$

Obsérvese que para s=1 el rotor está detenido y la frecuencia en el rotor es igual a la frecuencia de la fuente de alimentación del motor (el motor equivale a un transformador con el secundario en cortocircuito).

8.7.4.- Característica Torque-Velocidad

Fig. 8.14.- Característica torque vs velocidad de motor de inducción



Comentarios:

- A velocidad sincrónica el torque es nulo. (no se puede alcanzar).
- El torque de arranque debe ser ligeramente mayor que el torque de carga, para asegurar que el motor arrancará desde el reposo.
- El punto de operación óptimo se encuentra alrededor del 95% de la velocidad sincrónica.
- Si durante la operación se sobrepasa el torque máximo, la máquina desacelerará hasta detenerse.

8.7.5.- Ajuste de parámetros de operación en motor de inducción

En el caso de un motor de inducción con rotor bobinado y anillos rozantes, la conexión externa de resistencias se emplea para producir un ajuste de las características del motor a las condiciones de operación de la carga. (Figs. 8.15.a y b)

Fig. 8.15.a.- Rotor bobinado con resistencias externas

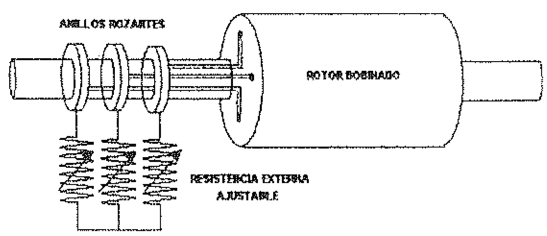
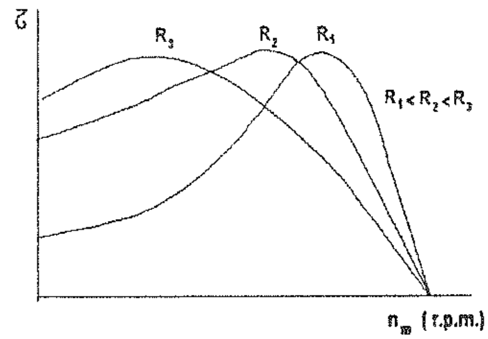


Fig. 8.15.b.- Efecto de $R_{EXTERNA}$



La característica del motor de inducción se puede ajustar fácilmente variando las características eléctricas del rotor bobinado.

Esto no es posible en una máquina con rotor jaula de ardilla, que no proporciona conexiones al exterior del motor, no obstante, se pueden construir rotores para que la característica de funcionamiento se ajuste a los requerimientos de la carga. Esta variedad lleva a distinguir los motores de inducción con rotor jaula de ardilla en distintas clases, según la forma de la característica torque–velocidad.

8.7.6.- Arranque de motores de inducción

La partida de un motor de inducción con rotor jaula de ardilla se puede modelar como la condición de un transformador con el secundario en cortocircuito (s=1). En esta condición, puede ser necesario (obligatorio para motores de alta potencia) tomar alguna medida que limite la corriente máxima por el rotor en el instante de arranque, que puede llegar a ser 15 o 20 veces mayor que en el punto de operación.

Los métodos de arranque pueden ser:

- Insertar inductancias o resistencias en serie con el estator (reducir la tensión aplicada).

- Alimentar el motor mediante un transformador (autotransformador) reductor.

- Cambiar la conexión del estator a estrella durante la partida y cambiar a Δ al disminuir la corriente, para operación normal.

Fig. 8.16.- Conexión Y/Δ para la partida de motor de inducción.

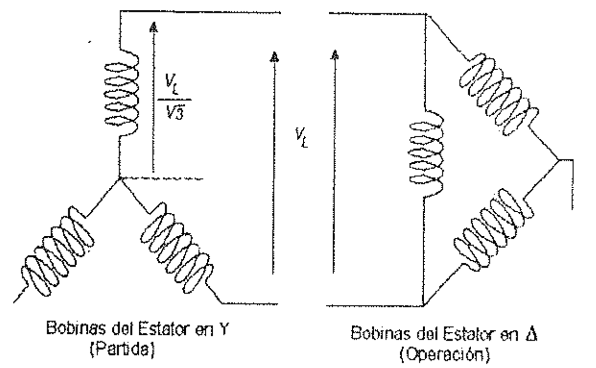
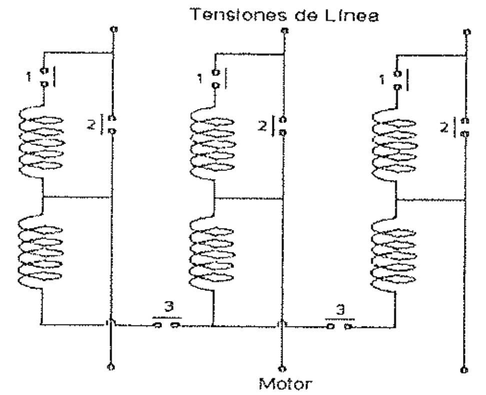


Fig. 8.17.- Partida de motor de inducción mediante autotransformador



En la Fig.8.17, la secuencia de partida es como sigue:
- Cerrar interruptores 1 y 3 (partida con tensión reducida)
- Abrir interruptores 1 y 3 (transición)
- Cerrar interruptores 2 (aplicar tensión total)

Observación:
El torque del motor es *proporcional al cuadrado de la tensión*, razón por la cual debe considerarse cuidadosamente el esquema de partida cuando el arranque se produce bajo carga.

8.8.- Rendimiento en máquinas rotativas

En general, se ha definido la eficiencia o rendimiento como la razón entre la energía útil que se obtiene en un proceso, por unidad de energía suministrada.
Considerando que el período de tiempo del proceso es el mismo para la energía úitil que para la suministrada al proceso, la relación entre las potencias medias tiene el mismo valor, así:

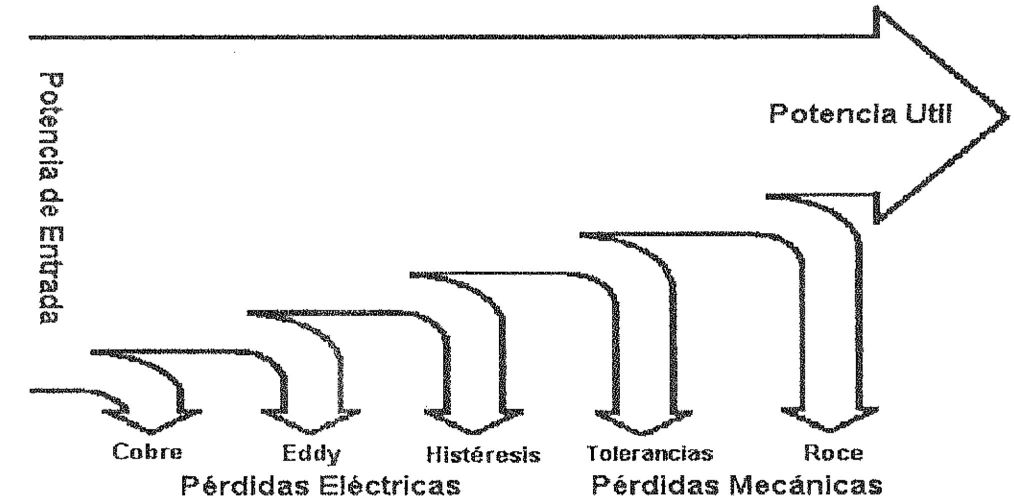
$$\eta = \frac{\text{Energía Util}}{\text{Energía Suministrada}} = \frac{\text{Potencia Util}}{\text{Potencia Suministrada}}$$

La energía útil resulta de restar todas las pérdidas, debidas al proceso, de la energía suministrada.

$$\eta = \frac{\text{Energía Suministrada} - \text{Energía Perdida}}{\text{Energía Suministrada}} = \frac{\text{Potencia Suministrada} - \text{Potencia Perdida}}{\text{Potencia Suministrada}}$$

En la Fig.8.18 se ilustra en forma generalizada las pérdidas en las máquinas estudiadas.

Fig.8.18.- Pérdidas en máquinas rotativas



8.8.1.- Rendimiento en Generadores

El rendimiento en generadores se obtiene según: $\eta = \dfrac{PotenciaEléctrica}{PotenciaMecánica} = \dfrac{P_e}{P_m}$

- Potencia suministrada $= P_m = \tau_{motriz} \cdot \omega_m$ [W]
- Potencia eléctrica útil (DC) $= P_e = V \cdot I$ [W]
- Potencia eléctrica útil (AC)... $= P_e = \dot{V} \cdot \dot{I} \cdot \cos(\phi)$[W]

Observación: El rendimiento o eficiencia es un indicador adimensional, por lo tanto las unidades de medida deben ser consistentes. Además, puede ser expresado por unidad ($\eta \leq 1$) o bien en porcentaje ($\eta\% \leq 100\%$).

8.8.2.- Rendimiento en Motores.

El rendimiento de una máquina funcionando como motor se obtiene según:

$$\eta = \frac{PotenciaMecánica}{PotenciaEléctrica} = \frac{P_m}{P_e}$$

- Potencia eléctrica suministrada (DC) $= P_e = V \cdot I$ [W]
- Potencia eléctrica suministrada (AC)...$= P_e = \dot{V} \cdot \dot{I} \cdot \cos(\phi)$[W]
- Potencia mecánica útil $= P_m = \tau_{motriz} \cdot \omega_m$ [W]

FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ

MARZO 2004

PROGRAMA DE ASIGNATURA

I. IDENTIFICACIÓN

NOMBRE ALUMNO :
SEMESTRE CURRICULAR : Tercer PLAN DE ESTUDIOS : AÑO 95

ASIGNATURA	: **ELECTROTECNIA (Grupo B)**
CÓDIGO	: IE- 116
HORAS SEMANALES	: Seis (6,0,0) Lu 9 - 10, Ma y Ju 1 – 2
PRE-REQUISITOS	: Algebra II y Cálculo II
CO-REQUISITOS	:
CARRERA	: Ingeniería Plan Común/ Ingeniería Civil/ Ejecución Eléctrica/ Electrónica
PROFESORES	: Enrique Fuentes Heinrich / Juan Luis Espinoza Valledor
AYUDANTE	:
SEMESTRE ACADÉMICO	: Primer Semestre 2004

II. OBJETIVOS GENERALES

Al finalizar el curso el alumno será capaz de:
1. Describir algunos conceptos y antecedentes de sistemas eléctricos.
2. Describir y/o modelar los componentes básicos que interactúan en una red eléctrica.
3. Analizar y resolver problemas simples de redes eléctricas, empleando técnicas básicas de análisis.
4. Describir los principios de funcionamiento y aplicaciones de las máquinas eléctricas fundamentales.

III. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Aprobada la asignatura, el alumno será capaz de:

1. Describir en términos generales el funcionamiento de un sistema eléctrico.
2. Explicar los fundamentos básicos de la electricidad.
3. Aplicar la ley de Ohm y Kirchhoff a circuitos simples.
4. Resolver problemas mediante la aplicación de los métodos de mallas y nudos.
5. Resolver problemas simples de redes trifásicas equilibradas.
6. Explicar el principio de funcionamiento de las máquinas eléctricas fundamentales.

IV. CONTENIDO PROGRAMÁTICO

1. Fundamentos de Sistemas Eléctricos

1.1. Conceptos de electrostática y magnetostática
1.2. Campo eléctrico
1.3. Potencial y diferencia de potencial
1.4. Corriente eléctrica y campo magnético
1.5. Densidad de corriente
1.6. Potencia y energía
1.7. Sistemas de unidades de variables eléctricas

2. Circuitos de Corriente Continua

2.1. Concepto de circuito eléctrico
2.2. Partes constitutivas de un circuito eléctrico
2.3. Fuerza electromotriz, caída de voltaje y potencia
2.4. Ley de Ohm
2.5. Resistencia eléctrica de conductores, resistividad, conductividad, conductancia
2.6. Ley de Joule
2.7. Conexión de resistencias serie - paralelo, transformación triángulo - estrella.
2.8. Leyes de Kirchhoff
2.9. Concepto de caída y aumento de tensión.
2.10. Transformación de fuentes, Thevenin y Norton
2.11. Métodos de mallas y de nudos

3. Circuito de Corriente Alterna Monofásico.

3.1. Introducción al análisis de señales: modelos gráficos y matemáticos de señales típicas, periocidad, frecuencia, valor máximo y mínimo, valor instantáneo, valor medio y efectivo.
3.2. Concepto de señal periódica alterna, corriente alterna, redes de corriente alterna.
3.3. Operaciones aritméticas con números complejos en las representaciones rectangular, exponencial y polar.
3.4. Concepto de fasor.
3.5. Elementos de circuitos: fenómeno físico, modelo esquemático y matemático de la resistencia, bobina y condensador.
3.6. Concepto de régimen transiente y permanente.
3.7. Régimen permanente de redes eléctricas: método fasorial, relaciones voltaje corriente de los parámetros R-L-C, impedencia y admitancia compleja, reactancia y susceptancia, Ley de Ohm y de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia w, desfase angular y diagramas fasoriales.
3.8. Potencia en circuitos de corriente alterna en régimen permanente: potencia instantánea, potencia media y reactiva, significado físico de P y Q, potencia compleja y aparente, factor de potencia y su mejoramiento.

4. Circuitos Trifásicos Equilibrados.

4.1. Voltajes trifásicos balanceados y secuencia de las fases.
4.2. Fuente de voltaje trifásico: potencia activa, reactiva, compleja y aparente.

5. Transformadores Monofásicos.

5.1. Concepto de transformador.
5.2. Finalidad del uso del transformador en un sistema eléctrico.
5.3. Algunos aspectos constructivos.
5.4. El transformador ideal.
5.5. Placa característica.

6. Motores de Inducción Trifásicos.

6.1. Algunos aspectos constructivos.
6.2. Principio de funcionamiento.
6.3. Característica torque - velocidad de los motores que se ofrecen en el mercado.
6.4. Comentarios sobre el arranque de los motores de inducción e inversión del sentido del giro.
6.5. Placa característica.

7. Máquinas de Corriente Continua.

7.1. Algunos aspectos constructivos.
7.2. Principio de funcionamiento.
7.3. Placa característica.

8. Máquinas Sincrónicas.

8.1. Algunos aspectos constructivos e importancia de la máquina sincrónica.
8.2. Principio de funcionamiento de motores y generadores.
8.3. Placa característica.

V. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Clases expositivas por el profesor de cátedra, con ejercicios a desarrollar por los alumnos y apoyo de sesiones de ayudantía.

VI. SISTEMA DE EVALUACIÓN

La asignatura se evaluará mediante tres pruebas, tareas y controles periódicos, con las siguientes ponderaciones:

- Promedio de tres pruebas (igual ponderación c/u) = 75% de la nota final
- Promedio de tareas y controles periódicos = 25% de la nota final

- Prueba Optativa (promedio semestre representa un 60% de la nota final) = 40% de la nota final

VII. BIBLIOGRAFÍA

1. E.Fuentes, I.Harnisch, J.L.Espinoza, "Texto Guía para el Curso de Electrotecnia, Plan Común de Ingeniería", Facultad de Ingeniería, UTA, 2004.
2. F.W. Sears, "Electricidad y Magnetismo". Aguilar, España.
3. Castejón y G. Santamaría, "Tecnología Eléctrica". McGraw-Hill, España.
4. W.H. Hayt y J.E. Kemmerly, "Análisis de Circuitos en Ingeniería", McGraw-Hill, México, 1975.
5. Dorf, "Circuitos Eléctricos"
6. S.J. Chapman, "Máquinas Eléctricas", McGraw-Hill, Colombia, 1987.
7. Ralf J. Smith, " Circuitos, dispositivos y sistemas"
8. William H. Roadstrum, Dan H. Wolaver, "Electrical Engineering for all Engineers", John Wiley & Sons, Inc.,2nd Edition, 1994.
9. McPherson, George, "An introduction to electrical machines and transformers", J. Wiley & Sons, Inc., 1981.
10. Salcedo C., José M. & López Galván, Jesús,"Análisis de circuitos eléctricos lineales, Problemas resueltos", Addison-Wesley Iberoamericana, U. de Málaga,1995, ISBN 0-201-62577-6
11. Johnson, David E. & Hilburn, John L. & otros, " Análisis básico de Circuitos Eléctricos",Prentice Hall, 5ª Edición, 1996, ISBN 0-13-059759-7
12. Boylestad, Robert L., "Introductory Circuit Analysis", Maxwell Macmillan International, 7ª Edición,1994, ISBN 0-02-313161-6

INSTRUCCIONES COMPLEMENTARIAS

1.- Evaluación de pruebas y controles

1.1.- Asistencia a pruebas y controles es obligatoria y deben ser rendidos en la sala correspondiente al profesor con el cual se inscribe el alumno al comienzo del semestre.

1.2.- La ejecución de pruebas y controles será en hojas blancas, tamaño oficio, las que serán provistas por los alumnos. No se aceptará trabajos en hojas arrancadas, con cortes irregulares o membretes.

2.- Inasistencias

2.1.- Las inasistencias a pruebas solo podran ser justificadas mediante autorización de la jefatura de carrera correspondiente. Es responsabilidad del alumno que haga uso de justificación informarse personalmente con el profesor respectivo acerca de la fecha y lugar de la recuperación.

2.2.- Las inasistencias a controles no seran recuperables. Al finalizar el semestre se eliminará al menos la peor de las notas obtenida en controles.

3.- Atención de consultas de alumnos

3.1- El lugar de atención a los alumnos fuera de horario de clases será en la oficina del profesor correspondiente y en los horarios que se establezcan y anuncien en las respectivas oficinas.