UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

# "ALGEBRA LINEAL NUMERICA"



AUTOR: MARTÍN MEDINA DIAZ

# INDICE

# INTRODUCCIÓN

Este texto de estudio está escrito principalmente para el uso de los estudiantes de la asignatura de "Métodos Numéricos" de las carreras de la Facultad de Ingeniería y para todos aquellos que estén interesados en el tema.

Esta obra está destinada ha desarrollar, explicar y enseñar una unidad temática del curso de Métodos Numéricos como es el "Algebra Lineal Numérica".

Como prerrequisitos para poder comprender los contenidos de texto en forma eficiente, el estudiante deberá estar familiarizado con elementos de Algebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y computación.

Los Métodos introducidos en cada sección se escribieron de tal forma que el lector alcance una correcta comprensión de las ideas matemáticas, reforzadas con el desarrollo de ejemplos cuidadosamente presentados y finalizando con los algoritmos correspondientes, desarrollados en algunos casos en forma más detallados de acuerdo a la complejidad de cada uno de ellos.

El Capítulo I trata los conceptos aprendidos en Algebra Lineal de manera de recordarlos y reforzarlos para una mejor comprensión de los capítulos siguientes.

El Capítulo II trata de la solución de sistemas de ecuaciones por métodos directos, como son, la eliminación gaussiana, factorización directa y uso de la matriz inversa. También se analizan para estos métodos estrategias de pivoteo para disminuir el error de redondeo.

El Capítulo III trata de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por métodos indirectos o iterativos. Se comienza con un estudio sobre normas de vectores y matrices para poder analizar la convergencia de estos métodos, como son, Jacobi, Gauss Seidel y SOR.

El Capítulo IV estudia métodos para la obtención de valores y vectores propios (característicos). El primero de ellos consiste en determinar los coeficiente del polinomio característico para luego solucionar la ecuación no lineal.

En los otros métodos tratados como el de la Potencia y Potencia inversa se determina los valores propios en forma directa, finalizando con una presentación más general y actualizada como son el uso de reflexiones de Householder aplicada al método $QR$.

Además, quisiera dar mis agradecimientos a la Srta. Sabina Núñez Aldoney, Secretaria del Departamento de Matemática, quien transcribió los manuscritos de este texto para llevar a feliz término este libro.

**El Autor**

# CAPITULO I

## PROPIEDADES BASICAS DE LAS MATRICES

### 1.1. PRELIMINARES

Este capítulo tiene como objetivo entregar un repaso de la terminología, notación y resultados del álgebra de matrices que se necesitan para el desarrollo de los temas que se abordarán en este texto.

Los alumnos que estén familiarizados con este material pueden pasar el Capítulo II y usar esta sección para consultas cuando lo estimen necesario.

### 1.2 TERMINOLOGÍA Y NOTACIÓN

Definición 1. Se llama matriz a un arreglo rectangular de números distribuidos en filas y columnas.

Ejemplo 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En general se emplean letras mayúsculas para representar matrices y las respectivas minúsculas, con dos subíndices, para representar sus componentes o elementos.

El primer subíndice indica la fila y el segundo la columna a la cual pertenece el elemento de la matriz. Así $a_{i\,j}$ es el elemento de la fila i y de la columna j de una matriz A.

Se anotará una matriz A de $m$ filas por $n$ columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En símbolos:

$$A = A_{mxn} = A(m,n) = (a_{ij}) = \left[a_{ij}\right] \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2 \ldots\ldots m \\ j = 1, 2 \ldots\ldots n \end{array}$$

Se dice que la matriz $A_{mxn}$ tiene dimensión $m$ *por* $n$, *o* $m\,x\,n$ o que es de orden $mxn$.

Definición 2 . Las matrices con dimensión $m = 1$ están dadas por: $B = (b_1,\ b2\ldots\ldots b_n)$ se les llama vector fila.

Definición 3. Las matrices con dimensión $n = 1$ están dadas por $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$ se les llama vector columna.

Definición 4. A las matrices donde $m = n$ se les llama matrices cuadradas ejemplo una matriz 4x4.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Definición 5. En una matriz cuadrada se define la "traza de A" como la suma de los elementos de su diagonal principal. $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Definición 6. Una matriz simétrica es aquella donde $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i para todo j.

Ejemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica de 3 x 3.

Definición 7. Una matriz diagonal es una matriz donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Ejemplo 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{12} & \\ 0 & & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Definición 8. Una matriz identidad es una matriz diagonal donde los elementos de la diagonal principal son unos.

Ejemplo 4:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 9. Una matriz cero (nula) es aquella que tiene todos sus elementos iguales a cero.

Definición 10. Una matriz triangular superior es aquella donde todos sus elementos bajo la diagonal principal son ceros.

Ejemplo 5:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23}\cdots\cdots & a_{2n} \\ & & a_{33}\cdots\cdots & a_{3n} \\ 0\ldots\ldots & \ldots\ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 11. Una matriz triangular inferior es aquella donde todos sus elementos arriba de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo 6:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 12. Una matriz $n\ x\ n$ se llama matriz de banda si existen enteros $p\ y\ q,\ 1<p,q<n$ con la propiedad de que $a_{ij}=0$ siempre que $i+p\le j\ \ o\ j+p\le i$.

El ancho de banda para una matriz está dado por $w=p+q-1$

Ejemplo 7:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32}\cdots\cdots 0\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & & & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 13. Se dice que una matriz $n\ x\ n$ es estrictamente dominante diagonalmente si:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

para cada $i=1,\ 2\ldots\ldots\ldots n$

Definición 14. Igualdad de matrices: Dos matrices A y B se dicen iguales y se escribe A=B si son del mismo orden y además sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplo 8:

$$\text{Si } B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix};\ B=C \text{ si y sólo sí } C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

Simbólicamente:

A=B si y sólo si $a_{ij}=c_{ij}$ para todo i

Para todo j

Definición 15. Producto de un escalar por una matriz. Para multiplicar un escalar $\lambda$ por una matriz A se multiplica cada término de la matriz por el escalar. De modo que:

$$\lambda\,(a_{ij})=(\lambda\, a_{ij})$$

Ejemplo 9 : $\lambda=3$ $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -5 & 7\end{pmatrix}$

$$\lambda A=3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\\ -15 & 21\end{pmatrix}$$

Definición 16. Transposición de matrices. Dada una matriz $A_{mn}$ se llama "transpuesta de A" y se anota por $A^T$ a la matriz $A_{nm}$, es decir, se intercambian entre sí filas y columnas.

Ejemplo 10:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

## 1.3 OPERACIONES CON MATRICES.

Definición 1. Adición de matrices. Se pueden sumar dos matrices del mismo número de filas y de columnas sumando sus elementos correspondientes.

$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$ en que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ejemplo 1:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 3 & -5 \\ 45 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -6 \\ 49 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la adición de matrices.

Para matrices cualesquiera A, B y C se verifican:

1. $A+B=B+A$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. Para cada matriz A existe una matriz 0 tal que $A+0=A$
4. Dado las matrices $A_{mn}$ $y$ $B_{mn}$ existe una matriz $C_{mn}$ tal que : $B+C=A$, de donde $C=A-B$
5. Para toda matriz $A_{mn}$ existe $-A$, tal que : $A+(-A)=0$

Definición 2. Producto de matrices. El producto $AB$ de dos matrices $A_{mn}$ $y$ $B_{np}$ existe si y sólo si el número de columnas de $A$ es igual al número de filas de $B$. El resultado es una matriz $C_{mp}$; tal que: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

Ejemplo 2 : Si

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} a_1b_1 & + & a_2b_2 \\ a_3b_1 & + & a_4b_2 \\ a_5b_1 & + & a_6b_2 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de dos matrices. Para matrices A,B,C para las que existen los productos que se indican se tiene:

1. $AB \neq BA$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(A + B)C = AC + BC$
5. Para toda matriz cuadrada, existe I (matriz identidad) del mismo orden tal que: $AI = I\ A = A$
6. Para toda matriz cuadrada $A$ de orden $n$, no singular, existe otra matriz del mismo orden $A^{-1}$, tal que: $A \bullet A^{-1} = A^{-1}A = I$

   $A^{-1}$ se llama la matriz inversa de $A$

## 1.4 MATRICES ELEMENTALES.

Definición 1. Una matriz $n x n$ es elemental si se puede obtener de la matriz identidad $I_n$ efectuando una sola operación fila ( o columna).

Las matrices elementales resultan de la matriz $I_n$ en una de las formas siguientes.

1) Intercambio de las filas $i$ y $j$ de $I_n$ y se anota como $E_{ij}$.

2) Multiplicación de la fila i-ésima de $I_n$ por un número real $k \neq 0$.

3) Reemplazo de la fila i-ésima de $I_n$ por el resultado de sumarle la fila i-ésima multiplicado por k.

Ejemplo 1 :

$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Se obtiene de $I_3$ intercambiando las filas primera y la tercera.

$E_{2(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Se obtiene la $I_3$ multiplicando la segunda fila de $I_3$ por $k \neq 0$.

$E_{2(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ Se obtiene de $I_3$ donde la tercera fila es reemplazada por la suma de la tercera fila y la segunda multiplicada por $k \neq 0$.

Sea $E$ una matriz elemental obtenida al efectuar una operación elemental fila sobre $I_n$ y una matriz $A_{mn}$, entonces $EA$ es la matriz que resulta de realizar la misma operación fila sobre $A$.

Ejemplo 2 : Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ si multiplicamos su primera fila por 2 obtenemos:

$$E\,A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$EA$ es la matriz que resulta de efectuar la correspondiente operación elemental fila en $A$.

Las inversas de matrices elementales son también matrices elementales.

## 1.5. PLANTEAMIENTO MATRICIAL DE ALGUNOS PROBLEMAS

Ejemplo 1. Los vectores nos pueden aparecer en muchos contextos. Por ejemplo, una lista de pedido de una clínica de un laboratorio.

- 15 inyecciones desechables
- 10 sueros
- 20 cajas de penicilina
- 30 cajas de somníferos

puede escribirse como un vector $\vec{X} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

Una lista de costo unitario de los elementos pedidos puede ser representado por un vector $Y$.

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

El costo total de la lista es $X^T y$. En el caso de dos listas de pedidos $x$ e $y$ el costo será $(x+y)^T C$

Ejemplo 2: La longitud de ala promedio que resulta de aparear tres variedades de mutantes de las moscas de la fruta pueden expresarse en la forma de una matriz simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij}$ denota la longitud del ala promedio de la cria resultante de aparear un macho tipo $i$ con una hembra del tipo $j$.

El significado físico asociado con la matriz simétrica nos indica que el cruzarse un macho tipo $i$ con una hembra tipo $j$ la longitud de ala promedio de la cria es la misma que cruzar una hembra tipo $i$ con un macho tipo $j$.

## 1.6 DETERMINANTES

Los determinantes son funciones que asocia una matriz cuadrada con un número real, es decir: $f : M_{nn}(R) \to R$

Definición 1 : Para poder dar la definición formal de determinantes se requiere conocer una definición preliminar. El $i\,j$-ésimo menor, anotado como $M_{i\,j}$ de una matriz $A$ $n\,x\,n$ es la matriz $n-1$ por $n-1$ que se obtiene eliminando la fila $i$-ésima y la columna $j$-ésima.

EJEMPLO 1: Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$M_{13}$ se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 3.

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$M_{22}$ ; $M_{31}$ encuéntralos.

Definición 2 : El determinante de una matriz $A$ de $n$ por $n$ (simbolizado por la det $A$) se define como sigue:

1) Si $A=(a)$ es de 1 por 1, entonces det $A=a$
2) Si $A=(a_{ij})$ es de $n$ por $n$ y $n>1$, entonces :

det $A=a_{11}\det M_{11}-a_{21}\det M_{21}+\ldots\ldots+(-1)^{j+1}\,a_{j1}\det M_{j1}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\,a_{n1}\det M_{n1}$

Los escalares $a_{11}\,a_{21},\ldots.a_{n1}$ de la definición son precisamente los elementos de la primera columna de $A$.

Si $A=(a_{i\,j})$ llamaremos cofactor de $a_{i\,j}$ $a$ $A_{i\,j}=(-1)^{i+j}M_{i\,j}$

Entonces el determinante de la matriz $A$ nos queda:

$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{21}\,A_{21}+\ldots\ldots+a_{n1}\,A_{n1}$$

Ejemplo 2:

Para valores pequeños de $n$, es fácil calcular $\det A$ empleando la definición.

Cuando $n=1$

$\det(a)=a$

Para $n=2$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\,\det(d)-c\,\det(b)=ad-bc$$

Si $n=3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=a\,\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}-d\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix}+g\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: Encontremos:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 0 \bullet \det\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + 4 \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = 88$$

## EJERCICIOS

1. Si $\begin{pmatrix} 1 & 2x-1 & 3 \\ y+1 & 5 & z-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ 3y-3 & 5 & 2z-9 \end{pmatrix}$

   Determine el valor de $x, y, z$

   Resp.: $x=1; y=2; z=3$

2. Considerar las matrices:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Resolver la ecuación $x + B = A + 2\,C^t$

   Resp.: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

3. Sea la matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$ tal que $a_{i\,j} = 2\,i - j$ . Determine la matriz $A^t$ .

   Resp.: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Pruebe que la suma de dos matrices diagonales del mismo orden es una matriz diagonal.
5. Demuestre que la suma de dos matrices triangulares superiores del mismo orden es triangular superior.
6. Sea $A$ una matriz cuadrada. Pruebe que $A + A^T$ es simétrica.
7. Sean $A$ y $B$ matrices $n\,x\,n$, y $k$ cualquier escalar. Pruebe que:

   a) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

   b) $tr(kA) = k \quad tr(A)$

8. Exprese cada ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales.

a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentre $A^k$ donde $k$ es cualquier entero no negativo.

10. Sea $A$ una matriz 2 x 2 y si $I = I_2$. Pruebe que:

a) $(A+4I)^2 = A^2 + 8A + 16I$

b) $A^2 + 7A + 12I = (A+3I)(A+4I)$

11. Encuentre una matriz $A$ de 2 x 2 tal que $A^2 + I^2 = 0$

Resp.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

12. Una raíz cuadrada de una matriz 2 x 2 es una matriz $B$ tal que $B^2 = A$

a) Demuestre que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene raíz cuadrada

b) Encuentre las raíces cuadradas de: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $y$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. a.- Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores también es triangular superior.

b.- Demuestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores también es una matriz triangular inferior.

14. a.- Obtenga las matrices elementales: $E_{11}, E_{12}, E_{21}$ $y$ $E_{12}$, para matrices de 3 x 3.

b.- Exprese: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Como la suma, $a\,E_{11}+b\,E_{12}+c\,E_{21}+d\,E_{22}$ donde $a, b, c \; y \; d$ son escolares apropiados.

15. Encontrar la matriz inversa de:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

Resp.: a) $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -6 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{19}{3} & -\frac{1}{6} & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. Sea $A=(a_{i\,j})$ cuadrada de orden 2 con $a_{ij}=2i-j$ para $i=j$ y $a_{i\,j}=3i-2j$ para $i \neq j$. Calcular el determinante de $A$.

Resp.: 6

17. Determinar para cuales valores de x:

$\det \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ es positivo

Resp.: para $x \leq 0$ ó $x \geq 1$

# CAPITULO II

## SOLUCION DE ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS

### 2.1. PRELIMINARES

En este capítulo determinaremos los valores $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$, que satisfacen simultáneamente un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0 \\
&f_2(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0 \\
&\vdots \\
&f_n(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0
\end{aligned}
$$

Estos sistemas pueden ser lineales o no lineales, nosotros estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$ y sus distintos métodos de solución analizando sus ventajas y desventajas. Donde $A \in M_n(R)$, $x$ y $b$ son vectores:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

Los $a_{ij}$ y $b_i$ son constantes. Estos sistemas de ecuaciones aparecen en la solución de varios problema de Ingeniería, por ejemplo, en estructuras, circuitos eléctricos y redes de flujo de fuidos, aunque también se pueden encontrar en otras áreas, como aproximación de mínimos cuadrados.

Analizaremos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 1: Solución de ecuaciones diferenciales parciales.

La mayor parte de los diferentes campos de la ingeniería manejan distribuciones de temperatura en materiales sólidos. La distribución de temperatura en estado estacionario bidimensional se define por la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Calcularemos la distribución de temperatura en una varilla calentada en ambos extremos, como se muestra en la Fig.

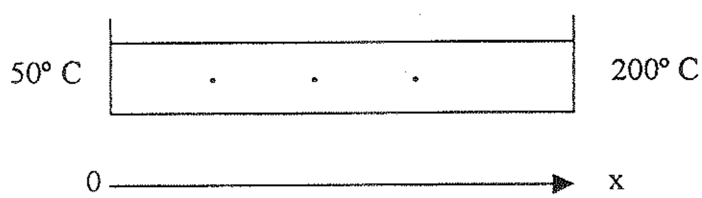



Fig. Una varilla unidimensional se mantiene aislada a una temperatura constante en sus extremos.

Para tal efecto aplicaremos la forma unidimensional de la ecuación de Laplace, incluyéndole una pérdida de calor, es decir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \lambda T = 0$$ donde $x$ es la distancia a lo largo de la varilla,

$\lambda$ es el coeficiente de pérdida de calor, igual a 0.01 cm$^{-2}$ y la longitud de la varilla es de 10 cm.

Para que podamos resolver la ecuación diferencial por métodos numéricos, es necesario que determinemos aproximaciones para $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , usando desarrollos truncados de la serie de Taylor.

Determinaremos en primer término una aproximación para:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$

Para lo cual consideraremos el desarrollo de Taylor de orden uno de la función $f(x,y)$ en torno al punto $f(x_0, y_0)$ para $h > 0$.

$$f(x_0 + h,\ y_0) = f(x_0, y_0) + h\ f_x\,(x_0\ , y_0) + \frac{h^2}{2} f_{xx}(\xi, x_0) \quad \text{con} \quad x_0 \le \xi \le x_0 + h$$

Despreciando el término en $h^2$ y despejando $f_x(x_0\ , y_0)$ obtenemos:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{f(x_0 + h,\ y_0) - f\ (x_0,\ y_0)}{h}$$

donde $\Delta x = f(x_0 + h\ , y_0) - f\,(x_0, y_0)$ llamada diferencia adelante, con lo cual:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\Delta x}{h}$$

De la misma manera remplazando $h$ por $-h$ y definiendo $\nabla x = f(x_0, y_0) - f(x_0 - h\ , y_0)$, llamada diferencia atrás, se obtiene $f_x(x_0, y_0) = \frac{\nabla x}{h}$ .

Realiza este desarrollo en detalle.

Como:

$$f_{xx}(x_0\,,y_0) = \frac{f_x\,(x_0 + h_0\,,y_0\,) - f_x\,(x_0\,,y_0)}{h}$$

Con aproximaciones de $f_x\left(x_0 + h,\;\; y_0\right)$, por ejemplo con diferencias atrás tenemos:

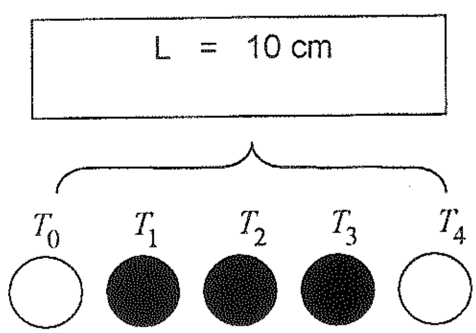
$$f_{xx}(y_0\,,x_0) = \frac{f_x\,(\,x_0 + h\,,y_0\,) - \;2f\;(x_0\,,y_0) \;+\; f\left(x_0 - h,\; y_0\right)}{h}$$

Obtiene este resultado y haga un desarrollo similar para : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

En nuestro ejemplo tenemos:

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - r\,T = 0$ con $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{T_{i+1} - 2\,T_i + T_{i-1}}{h^2}$ obtenemos :

$$\frac{T_{i+i} - 2\,T_i + T_{i-1}}{h^2} - r\,T_i = 0$$




$\Delta x^2 = d$

n = 3

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}$$

para n=3

i=1

$$\frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{d} - r\,T_1 = 0$$

$$\left(-\frac{2}{d} - r\right)T_1 + \frac{1}{d}T_2 = -\frac{1}{d}T_{inicial}$$

i=2

$$\frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{d} - r\,T_2 = 0$$

$$\left(-\frac{2}{d} - r\right)T_2 + \frac{1}{d}T_1 + \frac{1}{d}T_3 = 0$$

i=3

$$\frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{d} - r\,T_3 = 0$$

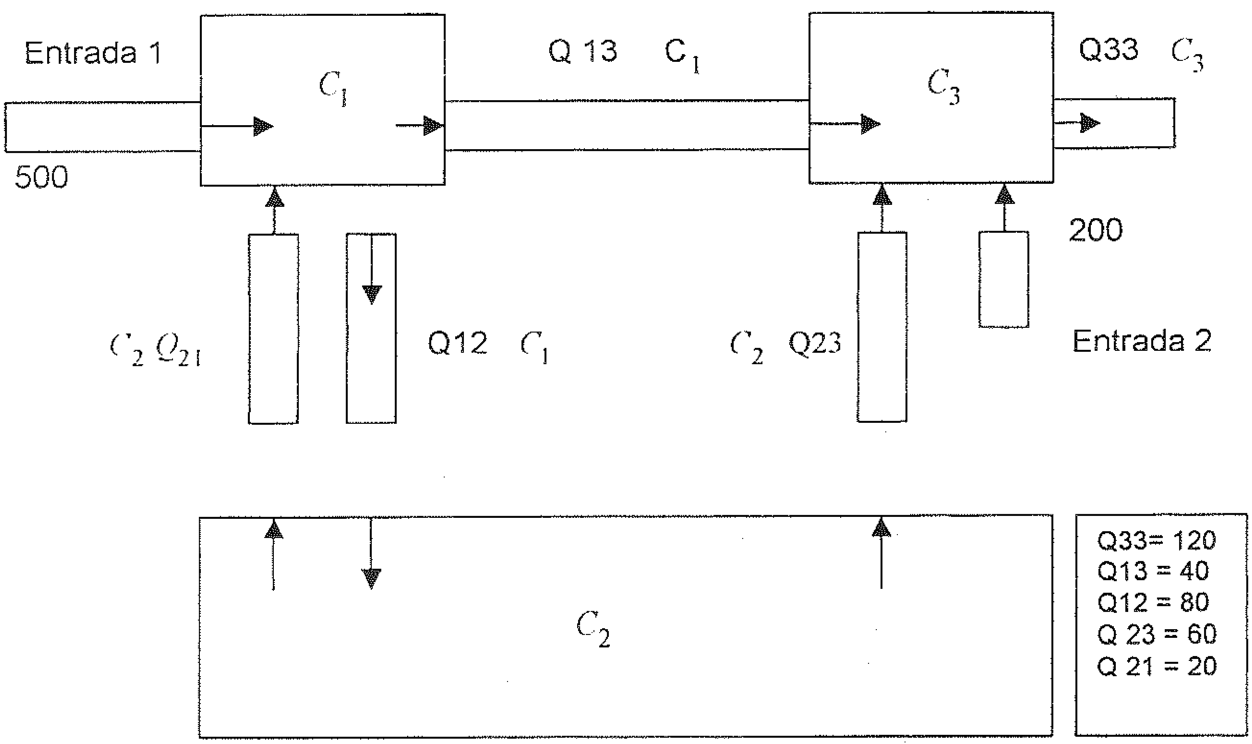
$$\left(-\frac{2}{d} - r\right)T_3 + \frac{1}{d}T_2 = -\frac{1}{d}T_{final}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-2}{d}-r & \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{1}{d} & \frac{-2}{d}-r & \frac{1}{d} \\ 0 & \frac{1}{d} & \frac{-2}{d}-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{d}T_{inicial} \\ 0 \\ -\frac{1}{d}T_{final} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}33 & 0{,}16 & 0 \\ 0{,}16 & -0{,}33 & 0{,}16 \\ 0 & 0{,}16 & -0{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -32 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: La figura nos muestra tres reactores ligados por tubos. La velocidad de transferencia de sustancias químicas a través de los tubos es igual a la velocidad del flujo ( Q. con unidades de metros cúbicos por segundo ) multiplicada por la concentración del reactor del cual surge el flujo (C. con unidades de miligramos por metro cúbico ) si el sistema es estacionario, la transferencia en cada reactor balancea la transferencia de salida.

Figura 1:




Por ejemplo. El reactor 1. (entrada) = salida , o: $500 + Q_{21}\, c_2 = Q_{12}\, c_1 + Q_{13}\, c_1$

O, usando la velocidad de flujo especificadas como en la figura:
$500 + 20c_2 = 80c_1 + 40c_1$

De donde 500 es una entrada directa (miligramos por segundo). Desarrollaremos ecuaciones de balances de masas comparables para cada uno de los otros reactores y resolveremos las tres ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para la concentración en los reactores.

Figura : Tres rectores ligados por tubos. La velocidad de masa a lo largo de cada tubo es igual al producto del flujo Q y la concentración c del reactor donde se origina el flujo.

La resolución se reduce simplemente a encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

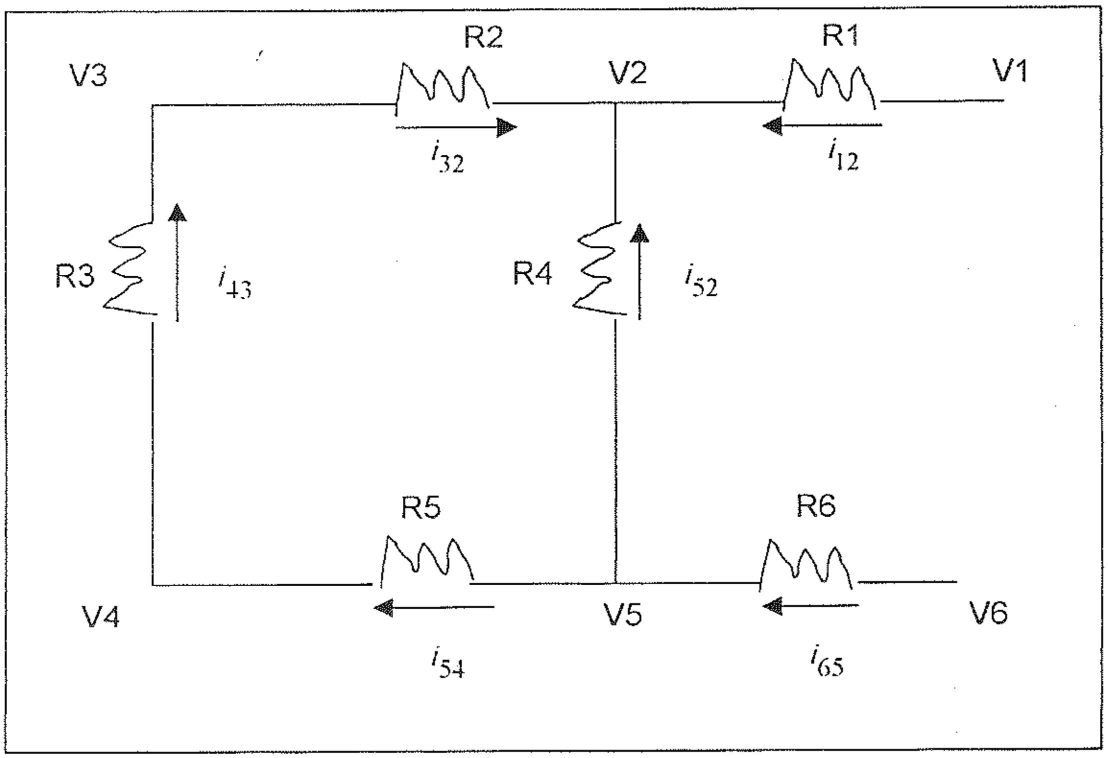
$$\begin{bmatrix} Q_{12}+Q_{13} & -Q_{21} & 0 \\ Q_{12} & -Q_{21}-Q_{23} & 0 \\ -Q_{13} & -Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ent_1 \\ 0 \\ Ent_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. En este caso los sistemas de ecuaciones lineales los obtendremos de los circuitos eléctricos resistivos de los cuales su objetivo es la determinación de corrientes de rama y voltajes de nodo (o rama), estos se resuelven mediante las leyes de corrientes de Kirchhoff y la ley de Ohm, la ley de corriente de Kirchhoff dice que la sumatoria de corrientes sobre un nodo debe ser cero $\left(\sum i = 0\right)$, la ley de Ohm dice que la corriente a través de una resistencia está dado por la relación entre el cambio de voltaje y de la resistencia $i = (v_1 - v_2)/R$.

Solucionaremos los siguientes circuitos.

Figura 2.

Circuito Nº 1:




Que aplicando las leyes de corriente de Kirchhoff y la ley de Ohm obtenemos las siguientes relaciones:

Notación: $i_{12}$ = 112 $i_{52}$ = 152 $i_{65}$ = 165

$i_{32}$ = 132 $i_{54}$ = 154

Ley de Corriente de Kirchhoff $\longrightarrow$ 112 + 132 + 152 = 0

165 - 152 - 154 = 0

143 - 132 = 0

154 - 143 = 0

Ley de Ohm ⟶

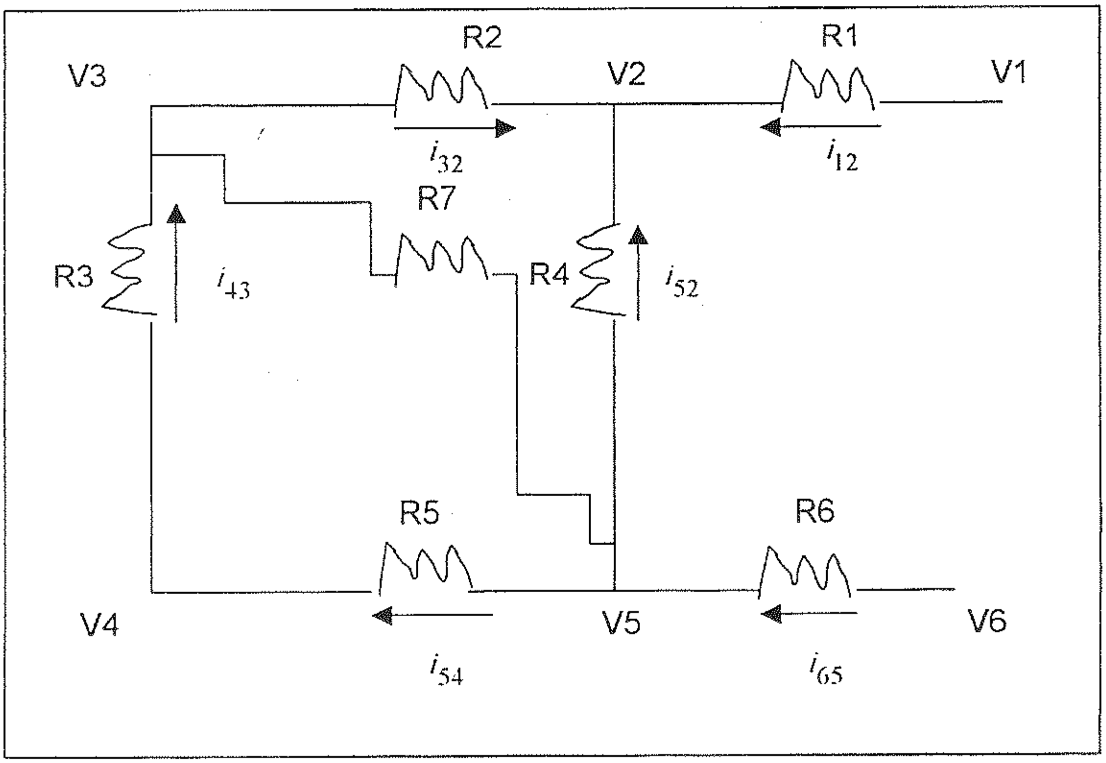
$$112=\frac{V_1-V_2}{R_1}\rightarrow 112\bullet R_1+V_2=V_1$$
$$132=\frac{V_3-V_2}{R_2}\rightarrow 132\bullet R_2+V_2-V_3=0$$
$$143=\frac{V_4-V_3}{R_3}\rightarrow 143\bullet R_3+V_3-V_4=0$$
$$154=\frac{V_5-V_4}{R_5}\rightarrow 154\bullet R_5+V_4-V_5=0$$
$$165=\frac{V_6-V_5}{R_6}\rightarrow 165\bullet R_6+V_5=V_6$$
$$152=\frac{V_5-V_4}{R_4}\rightarrow 152\bullet R_4+V_2-V_2=0$$

Relaciones de las cuales se obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ R1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R4 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 112 \\ 132 \\ 143 \\ 154 \\ 165 \\ 152 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V1 \\ 0 \\ 0 \\ V6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figura 3:

Circuito Nº 2:




Aplicando las leyes de Kirchhoff y Ohm, obtenemos las siguientes relaciones:

Ley de Corriente de Kirchhoff $\longrightarrow$

$$112 + 132 + 152 = 0$$
$$165 - 152 - 154 = 153 = 0$$
$$153 + 143 - 132 = 0$$
$$154 - 143 = 0$$

Notación: $i_{12} = 112$ $\quad i_{43} = 143$ $\quad i_{53} = 153$ $\quad i_{65} = 165$

$i_{32} = 132$ $\quad i_{52} = 152$ $\quad i_{54} = 154$

## 2.2 SISTEMAS TRIANGULARES

Resolveremos sistemas de la forma $Ax = b$ donde $A$ matriz triangular superior de orden $n \ x \ n$, es decir,

$$A = (a_{ij}) \quad \text{en que} \quad a_{ij} \neq 0 \qquad i \leq j$$

Estos sistemas tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{3n} \\ & & a_{33} & \\ 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \ x = b$$

También lo podemos anotar:

$$\begin{array}{lrl} E_1 : & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots \quad + a_{1n}x_n = & b_1 \\ E_2 : & a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots \quad + a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \\ E_n : & a_{nn}x_n = & b_n \end{array}$$

De la ecuación $E_n$ obtenemos $x_n$, en efecto: $x_n = \dfrac{b_n}{a_n}$

Despejando en las ecuaciones $E_{n-1}$ obtenemos $x_{n-1}$ y en $E_{n-2}$ obtenemos $x_{n-2}$ :

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{u-1\ n-1}} \qquad \text{y} \qquad x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2\ n-1}\, x_{n-1} - a_{n-2\ n}\, x_n}{a_{n-2\ n-2}}$$

Así, si conocemos $x_n, x_{n-1} \cdots\cdots, x_{n-k}$ podemos obtener $x_{n-k-1}$ de la ecuación $E_{n-k-1}$;

$E_{n-k-1}$; $\sum_{j=n-k-1}^{n} a_{n-k-1,j}\ x_j = b_{n-k-1}$ despejando obtenemos:

$$x_{n-k-1} = \frac{b_{n-k-1} - \sum_{j=n-k}^{n} a_{n-k-1\,,\,j}\ x_j}{a_{n-k-1\ \ n-k-1}}$$

Haciendo $k = 0,1,\ldots.n-2$, podemos con la fórmula calcular en forma recursiva la solución $x$ del problema triangular.

Este método suele llamarse de sustitución hacia atrás.

CÁLCULO DEL COSTO DEL ALGORITMO.

Mostraremos el procedimiento que emplearemos para contar las operaciones de un método.

El costo de la multiplicación y divisiones en una computadora es mayor que el requerido para realizar una suma o una resta, por esta razón, llevaremos las cuentas de las multiplicaciones y divisiones separado de la cuenta de las sumas y las restas.

Ejemplo: Calcularemos el costo del método de sustitución hacia atrás. En primer término haremos un cambio de índice en la fórmula obtenida quedando:

$$x_n = \frac{b_n}{a_n} \qquad \text{y} \qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{i=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Para $i = n-1,\ldots\ldots.1$

Tenemos al calcular $x_n$ una división.

En la sumatoria tenemos productos de $i+1$ a $n$, es decir, $n-i$ productos por una división.

Por lo tanto, entre multiplicaciones y divisiones tenemos:

$$1+\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)+1)=1+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)+(n-1)$$

$$= 1+(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots 1+(n-1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

El costo de la sustitución hacia atrás en producto y divisiones es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Procediendo en forma análoga calcula el costo de las sumas y restas.

## 2.3. <u>METODO DE GAUSS</u>

Teorema 1: Si $A$ es no singular, entonces existe L matriz triangular inferior no singular y $U$ matriz triangular superior no singular tales que: $A = L\,U$

Demostración:

Sea $A \in M_{nn}(R)$, $x, b \in R^n$ y $Ax = b$ sistema de ecuaciones, anotaremos:

$A = A^{(1)}$ y $b = b^{(1)}$ cuyos elementos los anotaremos como $a_{ij}^{(1)}$ y $b_i^{(1)}$ respectivamente.

Generaremos un algoritmo que produzca una sucesión de matrices $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots\ldots A^{(n)}$ de manera que $A^{(n)}$ sea una matriz triangular superior y de vectores $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots\ldots, b^{n}$ tal que : $A^{(n)}\ x = b^{n} \Leftrightarrow Ax = b$

Esto nos permite resolver el sistema $A\ x = b$ resolviendo el sistema lineal triangular $A^{(n)}\ x = b^{n}$

Partamos del sistema $A^{(1)}\ x = b^{(1)}$ que tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{1} & a_{12}^{1} & \cdots & a_{1n}^{1} \\ a_{21}^{1} & a_{22}^{1} & \cdots & a_{2n}^{1} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^{1} & a_{n2}^{1} & \cdots & a_{nn}^{1} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_{1}^{1} \\ b_{2} \\ \\ b_{n}^{1} \end{pmatrix}$$

Lo transformaremos en un sistema : $A^{(2)}\ x = b^{(2)}$

Haremos operaciones elementales sobre $A^{(1)}$ de tal manera que $a_{ij}^{(1)} = 0$ con $i = 2, \ldots\ldots n$

De las ecuaciones:

$$E_1 : \quad a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots\ldots\ldots \quad + a_{1n}^{(1)}x_n = \quad b_1$$

$$E_2 : \quad a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad + a_{2n}^{(1)}x_n = \quad b_2$$

Multiplicaremos $E_1$ por $\theta \in R$ cualquiera y se la restaremos a $E_2$ y obtendremos el siguiente par de ecuaciones equivalentes a las anteriores.

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots\dots\dots + \quad a_{1n}^{(1)}x_n = b_1$$

$$\left(a_{21}^{(1)} - \theta\, a_{11}^{(1)}\right)x_1 + \left(a_{22}^{(1)} - \theta\, a_{12}^{(1)}\right)x_2 \quad + \dots\dots\dots\dots + \quad \left(a_{2n} - \theta\, a_{1n}^{(1)}\right) \quad x_n = b_2^{(1)} - b_1^{(1)}$$

Elegiremos $\theta$ tal que: $a_{21}^{(1)} - \theta\, a_{11}^{(1)} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ lo anotaremos como $\theta_2^{(1)}$

Las ecuaciones quedan:

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \quad a_{1n}^{(1)}\ x_n = b_1^{(1)}$$

$$a_{22}^{(2)}\ x_2 + \dots\dots\dots\dots \qquad + \ a_{2n}^{(2)}\ x_n = b_2^{(2)}$$

donde:

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} - \theta_2^{(1)}\ a_{1j}^{(1)} \qquad j = 2\dots\dots..n$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - \theta\ b_1^{(1)}$$

Si trabajamos considerando la $E_1$ y la $E_j$ de la misma manera obtenemos: (hacerlo)

$$a_{jk}^{(2)} = a_{jk}^{(1)} - \theta_j^{(1)}\ a_{1k}^{(1)}\ ;\ k = 2,\dots\dots,n \quad \text{y} \quad j = 2,\dots\dots n$$

De lo anterior no queda el sistema: $A^{(2)}\ x = b^{(2)}$

Donde $A^{(2)}$ y $b^{(2)}$ tienen la forma:

$$a_{1k}^{(2)} = a_{1k}^{(1)} \qquad k = 1,\dots\dots\dots..n \qquad \theta_j^{(1)} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad j = 2,\dots\dots n$$

$$a_{j1}^{(2)} = 0 \qquad a_{jk}^{(2)} = a_{jk}^{(1)} - \theta_j^{(1)}\ a_{1k}^{(1)} \qquad k = 2,\dots\dots..n$$

$$b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \qquad\qquad b_j^{(2)} = b_j^{(1)} - \theta_j^{(1)}\, b_1^{(1)} \qquad j = 2,\ldots\ldots\ldots n$$

Si definimos: $$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ -\theta_2^{(1)} & 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots & \\ -\theta_n^{(1)} & 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que:

$$A^{(2)} = L^{(1)}\ A^{(1)} \qquad\qquad b^{(2)} = L^{(1)}\ b^{(1)}$$

$L^{(1)}$ es invertible:

$$\left(L^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \theta_2^{(1)} \quad 1 \quad 0\ldots\ldots 0 \\ \\ \theta_n^{(1)} \quad 0\ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

Compruébalo:

Procediendo por inducción, suponiendo que $A^k$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}^{(1)} & \\ 0 & a_{22}^{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}^{(2)} & \\ \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{kk}^{(k)} & \ldots\ldots a_{kn}^{(k)} \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{k+1,k}^{(k)} & \ldots\ldots a_{k+1\ n}^{(k)} \\ & \vdots & \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nk}^{(k)} & \ldots\ldots a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Para hacer los elementos $a_{k+1,k}^{k}, a_{k+2,k}^{k}, \ldots\ldots, a_{nk}^{k}$ utilizamos la fila k-ésima de manera de asegurar que no hagamos elementos no nulos donde los hay. Así, si tenemos la ecuación $E_k$ y $E_j$ con $j > k$ eliminaremos $a_{jk}$ reemplazando la ecuación $j$ por esta menos $\theta_j^k$ veces la fila k. $\left(E_j \leftrightarrow E_j - \theta_j^k\, E_k\right)$.

Al hacerlo obtenemos:

$$\theta_j^k = \frac{a_{jk}^k}{a_{kk}^k}$$

$$a_{jl}^{k+1} = a_{jl}^k - \theta_j^k\; a_{kl}^k \qquad\qquad l = k+1, \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$a_{jk}^{k+1} = 0$$

Proceso que repetimos para $j = k+1, \ldots\ldots\ldots\ldots n$, obteniendo la matriz $A^{k+1}$, donde los elementos quedan definidos por:

$$b_i^{k+1} = b_i^k \qquad\qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots k$$

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k \qquad\qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots k\,, \qquad j = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$a_{ij}^{k+1} = 0 \qquad\qquad i = k+1, \ldots\ldots\ldots - n, \qquad j = 1, \ldots\ldots\ldots k$$

$$i = k+1, \ldots\ldots\ldots n \left\{ \begin{array}{l} \theta_i^k = \dfrac{a_{ik}^k}{a} \\ a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \theta_i^k\; a_{kj}^k \;; \qquad j = k+1, \ldots\ldots\ldots n \\ b_i^k = b_i^k - \theta_i^k\; b_k^k \end{array} \right.$$

Donde la matriz $L^{(k)}$ es:

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0. & \ldots\ldots\ldots & 1 & 0 & \ldots\ldots \\ \vdots & & -\theta_{k+1}^{k} & \ddots & \\ 0 & & -\theta_{n}^{k} & & 1 \end{pmatrix}$$

Determina $\left(L^{k}\right)^{-1}$

Luego:

$$A^{k+1} = L^{k}\ A^{k}$$

$$b^{k+1} = L^{k}\ b^{k}$$

De esta manera se prosigue hasta $k = n-1$

Al final tenemos:

$$A^{n}\ x = b^{n}$$

$$A^{n} = L^{n-1}\ A^{n-1} = L^{n-1}\ L^{n-2}\ A^{n-2}$$

$$= L^{n-1}\ L^{n-2}\ldots\ldots L^{1}\ A^{1}$$

Si $R = L^{n-1}\ L^{n-2}\ldots\ldots L^{1}$ producto de matrices triangulares inferiores no singulares en consecuencia $R$ lo es.

$$A^n = RA^1 = RA$$

Si $L = R^{-1}$ entonces $A = LA^n$ en que $U = A^n$ triangular superior no singular.

Para resolver el sistema $Ax = b$ basta que conozcamos $A^n$ y $b^n$.

Si en algún paso obtenemos $a_{kk}^k = 0$, debemos permutar la fila $k$ con aquella en que $a_{jk}^k \neq 0$, es decir, $E_j \leftrightarrow E_k$. Siempre es posible que encontremos un $j > k$ por ser $A$ no singular, en efecto:

$$A^k = L^{k-1} \; L^{k-2} \ldots\ldots\ldots\ldots L^{(1)} A; \qquad S^{k-1} = L^{k-1} \ldots\ldots\ldots\ldots L^1$$

$$A^k = S^{k-1} A$$

Como $A$ es no singular el rango de $A$ es $n$ el de $A^k$ también lo es.

Con esta última parte queda demostrado el Teorema de Gauss.

**Algoritmo de eliminación Gaussiana con sustitución regresiva:**

Fase 1 : $a_{ii} = 0$ buscamos el primer $a_{ji} \neq 0$ con $j = i, +1, \ldots\ldots n$ e intercambiamos $E_i$ con $E_j$.

Fase 2: Triangulación superior. Reduciremos $Ax = b$ a un sistema equivalente $A^n x = b^n$.

Fase 3 : Sustitución regresiva . Resolveremos $A^n x = b^n$ para la $x$ deseada.

Desarrollo:

Entrada: Número $n$ de incógnitas y ecuaciones matriz aumentada $A=(a_{ij});\ 1\le i\le n; 1\le j\le n+1$

Salida : Solución $x_1,\ldots\ldots\ldots, x_n$ o sistema no tiene solución única.

Paso 1 : Para $i=1,\ldots\ldots\ldots n-1$

Paso 2 : Si $p$ es menor entero tal que $i\le p\le n$ y $a_{pi}\neq 0$ si no existe no hay solución única.

Paso 3: $p\neq i$ entonces $E_p \leftrightarrow E_i$

Paso 4 : $j=i+1,\ldots\ldots\ldots\ldots n$

Paso 5 : Hacer $\theta_{ji}=\dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$

Paso 6 : Efectuar $\left(E_j-\theta_{ji}\ E_i\right) \mid \to E_j$

Paso 7 : Si $a_{nn}=0$ no existe solución.

Paso 8 : Hallar $x_n=\dfrac{a_{n\,n+1}}{a_{n\,n}}$

Paso 9 : Para $i=n-1,\ldots\ldots\ldots 1$ hacer :

$$x_i=\frac{\left(a_{in+1}-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}}$$

Paso 10: Salida $x_1,\ldots\ldots, x_n$

**Conteo de operación para eliminación gaussiana.**

Costo de la eliminación gaussiana con sustitución regresiva. Del algoritmo en el paso 5 obtenemos n - i divisiones.

En el paso 6 para intercambiar filas debemos hacer un total de $(n-i)(n-i+1)$ divisiones y multiplicaciones.

Pero i = 1 ..........., n - 1 por tanto el número de operaciones requeridas en los pasos 5 y 6 es:

$$\sum_{n=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2) = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

Resultado que lo podemos obtener aplicando propiedades de sumatoria y las fórmulas:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Este es el costo de la triangulación, debemos ahora agregarle el costo de la sustitución atrás, por lo tanto, el total es:

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3+3n^2-n}{3}$$

Hace de la misma forma el cálculo de sumas y resta el cual debe darte: $\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$, inténtalo.

Ejemplo 1 :

Aplicamos el algoritmo al siguiente sistema de ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\
E_2 &: 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 34 \\
E_3 &: \quad 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 27 \\
E_4 &: -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 = -38
\end{aligned}
$$

La matriz aumentado $[A:b]$ es:

$$
\begin{bmatrix}
6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\
12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\
3 & -13 & 9 & 3 & 27 \\
-6 & 4 & 1 & -18 & -38
\end{bmatrix}
$$

Para que obtengamos el primer sistema derivado hacemos:

$E_1$ la multiplicamos por 2 y se la restamos a $E_2$

$E_1$ la multiplicamos por ½ y se la restamos a $E_3$

$E_1$ la multiplicamos por –1 y se la restamos a $E_4$

El número 6 es el elemento pivote de esta primera etapa y la primera fila que no sufre cambio se llama fila pivote.

Primer sistema derivado : $\left[A^2 : b^2\right]$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & 21 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -26 \end{bmatrix}$$

De la misma forma anterior obtenemos:

Segundo sistema derivado : $\left[A^3 : b^3\right]$

$$\left[\begin{array}{cc:ccc} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{array}\right]$$

Tercer sistema derivado : $\left[A^4 : b^4\right]$

$$\left[\begin{array}{cc:ccc} 6 & -2 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right].$$

Completa el desarrollo para obtener el cuarto sistema derivado.

Si aplicamos la fórmula regresiva, la solución obtenida es: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ resuélvelo.

De acuerdo al teorema de Gauss podemos factorizar $A$ en la forma $A = L \bullet U$, $L$ lo obtenemos con los multiplicadores y $U = A^n$:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

## 2.6 **ESTRATEGIA DE PIVOTEO:**

1. PIVOTE PARCIAL.

En un computador es poco probable que : $a_{kk}^k = 0$ pero $\left| a_{kk}^k \right| < \varepsilon$ para $\varepsilon$ pequeño en este caso buscamos $j = k+1, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$ tal que : $\left| a_{jk}^k \right| > \left| a_{kk}^k \right|$

Ahora si $\left| a_{jk}^k \right| < \varepsilon \quad \forall j = k+1, \ldots\ldots\ldots\ldots n$ la matriz es numéricamente singular y debemos buscar otro método para resolver.

Esto lo podemos lograr con el pivoteo parcial o de columna.

Sea $j$ tal que $\left| a_{jk}^k \right| > \left| a_{lk}^k \right| \; l = k, \ldots\ldots\ldots\ldots n$

Si $E_{jk}$ es la matriz de permutación de los elementos $j$ y $k$ cambiamos $A^k$ y $b^k$ a la forma : $A^k \to E_{jk}\, A^k$ cambio de fila $j$ con la $k$

$$b^k \to E_{jk}\, b^k$$

Luego el sistema: $Ax = b \Leftrightarrow E_{jk}\, A^k\, x = E_{jk}\, b^k$ y continuamos el algoritmo en forma normal.

2. PIVOTE TOTAL.

Dos números reales, los podemos anotar:

$$a^* = (1 + \varepsilon a)\, a$$

$$b^* = (1 + \varepsilon b) b$$

en que $\varepsilon_a < \varepsilon$ y $\varepsilon_b < \varepsilon$ sumando, obtenemos: (desarróllala)

$$a^* + b^* = (a+b)\left(1 + \frac{\varepsilon_a\, a + \varepsilon_b\, b}{a+b}\right)$$

luego: $\varepsilon_{a+b} = \dfrac{\varepsilon_a\, a + \varepsilon_b\, b}{a+b}$

$$\left|\varepsilon_{a+b}\right| \leq \frac{\varepsilon\,(|a| + |b|)}{|a+b|}$$

De esta desigualdad podemos concluir que si $a$ y $b$ tienen el mismo signo, el error se mantiene, si el signo de $a$ y $b$ es distinto, el error crece en forma difícil de controlar. Esto se agrava si $|a|$ o $|b|$ es una cantidad grande, de allí la necesidad que mantengamos cantidades pequeñas para las operaciones de sumas algebraicas.

El algoritmo de Gauss se basa fundamentalmente en cálculos de la forma:

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} - \theta_i^k \, a_{kj}^{k}$$

Por lo tanto si $\theta_i^k$ es pequeño, tenemos más posibilidades de controlar el error que si es grande.

En este caso para disminuir el error se elige :

$$\left| a_{lm}^{k} \right| \geq \left| a_{ij}^{k} \right| \quad i = k,\ldots\ldots\ldots n \qquad j = k,\ldots\ldots n$$

que es el mayor elemento de la submatriz:

$$\begin{pmatrix} a_{kk}^{k}\cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{kn}^{k} \\ \hline \hline a_{nk}\cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{nn}^{k} \end{pmatrix}$$

Si encontramos este elemento, sea $E_{kl}$ y $E_{km}$ las matrices que permutan las filas $k$ y $l$ y las columnas $k$ y $m$ respectivamente, es decir: $E_{kl}\,A^k\,E_{km}$ con lo que colocamos el elemento $a_{lm}^{k}$ en la posición $(k,k)$.

En el sistema para obtener este cambio haremos:

$$A^k\,x = b \quad / \bullet E_{ke}$$

$$E_{ke}\,A^k x = E_{ke}\,b$$

Con lo que cambiamos la fila $k$ con la $\ell$ en $A$ y en $b$.

Para que intercambiemos columnas consideramos que: $E_{km}E_{km}=I$ y lo agregamos a nuestra ecuación:

$$E_{ke}\,A^k\,x=E_{ke}b$$

$$E_{ke}\,A^k\,E_{km}E_{km}x=E_{ke}b$$

Esto nos produce cambio de columna en $A$ pero además cambio de fila en $x$, es decir, $E_{km}x=y$

Luego en cada etapa $k$ si hacemos la permutación de la columna $k$ y $m(k)$ tendremos:

anotando: $\pi^k=E_{km(k)}$ $\quad y=\pi^{n-1}\pi^{n-2}\ldots\ldots\ldots\pi^1x$

Se tiene $\quad x=\pi^1\pi^2\ldots\ldots\pi^{n-1}y$

**ALGORITMO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA CON PIVOTE:**

Fase 1 : Aplicaremos triangulación superior con Pivote.

Fase 2 : Aplicaremos sustitución regresiva.

Entrada : número de incógnita y de ecuaciones $n$ matriz aumentada $[A:b]$ donde $1\le i\le n$ y $1\le j\le n+1$

Salida : Solución $x_1,\ldots\ldots,x_n$ o mensaje de que el sistema no tiene solución.

Paso 1 : Reduce $[A:b]$ a $\lfloor A^n : b^n \rfloor$

Para $m=1$ $a$ $n$ si $a_{mn}, a_{m+1n},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{nm}$ son todos ceros.

Mensaje $A$ es singular

Paso 2 : Si $m < n$

Seleccione $a_{pm} \neq 0$ de entre $a_{mn}, a_{m+1n}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_{nn}$

Paso 3 : Si $p > m$ realizaremos un pivoteo $mp$ en $[A:b]$

Paso 4 : Para $i = m+1\ a\ n$ hacer $a_{im} = \dfrac{a_{im}}{a_{mm}}$

Paso 5 : Para $j = m+1\ a\ n+1$ hacer $a_{ij} = a_{ij} - a_{im}\, a_{mj}$

Paso 6 : Sustitución regresiva.

Ejemplo 1 : Resolver el sistema

$$\begin{array}{lllll|}
2x_2 & +x_4 & & = & 0 \\
2x_1 + 2x_2 & +3x_3 + & 2x_4 & = & -2 \\
4x_1 - 3x_2 & & +x_4 & = & -7 \\
6x_1 + x_2 & -6x_3 & +5x_4 & = & 6
\end{array}$$

Matriz aumentada $[A:b]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\
4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\
6 & 1 & -6 & -5 & 6
\end{array}\right]$$

Como $a_{11}=0$, buscamos el max $|a_{i1}|$ con $i=2\ a\ 4$, en este caso max $|a_{i1}|$=6 e intercambiamos la fila 1 con la 4.

Obtenemos el sistema derivado.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Hacemos ceros:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Siguiendo el procedimiento para mayor precisión intercambiamos la fila 2 con la 3 y hacemos ceros.

Obtenemos el segundo sistema derivado:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & -9.0001 \\ 0 & 0 & 0.218176 & 3.3636 & -5.9999 \end{array}\right]$$

Sin intercambio, obtenemos el tercer sistema derivado.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & -9.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5600 & -3.1199 \end{array}\right]$$

Aplicamos sustitución regresiva:

$x_4 = -1.999$ $\qquad$ $x_3 = 0.33325$ $\qquad$ $x_2 = 1.0000$ $\qquad$ $x_1 = -0.50000$

## 2.7. MATRIZ INVERSA:

Consideremos $A^{-1} = \left(x^1, x^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x^n\right)$ donde $x^i$ es la columna $i$ de la matriz inversa de $A$, es decir:

$$A \bullet A^{-1} = A\left(x^1, x^2, \ldots\ldots\ldots x^n\right) = \left(Ax^1, Ax^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, Ax^n\right)$$

Sea $I = \left(e^1, e^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, e^n\right)$ la matriz identidad donde $e^i$ es la columna $i$ y su componente $i$ es 1, las otras componentes son ceros.

Por definición de matriz inversa tenemos: $A \bullet A^{-1} = I$

Esto es:

$\left(Ax^1, \ldots\ldots\ldots\ldots, Ax^n\right) = \left(e^1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, e^n\right)$ igualando :

$Ax^1 = e^1$

$Ax^2 = e^2$

$Ax^3 = e^3$

$Ax^n = e^n$

Con lo cual obtenemos $n$ sistemas de ecuaciones, en la cual, la matriz de coeficiente es siempre $A$.

Específicamente obtenemos la siguiente matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_n & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ a_{21} & & & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ & & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

A la cual le aplicamos el algoritmo de triangulación de Gauss.

Donde: $a_{1j}^2 = a_{ij}^1 - \dfrac{a_{i1}^1}{a_{11}^1}\, a_{ij}^1$ con $2 \le i \le n$ ; $2 \le j \le 2n$

A partir del algoritmo de Gauss genera un algoritmo para calcular la inversa de $A$.

Ejemplo 1:

1.- Encontremos $A^{-1}$ si existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Anotemos la matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer sistema derivado.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segundo sistema derivado

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La última fila nos muestra que $A$ no tiene inversa, es decir, la ecuación:

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_5 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} = I_3$$

No tiene solución.

Ejemplo 2:

Encontremos la inversa de:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 8 & 6\\ 5 & 1 & 35\end{bmatrix}$$

Si existe

Matriz aumentada

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 1 & 35 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Primer sistema derivado.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -14 & 15 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Segundo sistema derivado.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

Si aplicamos sustitución atrás a cada sistema obtenemos:

$$A=\begin{bmatrix}137 & \frac{-101}{2} & -7\\ -20 & \frac{15}{2} & 1\\ -19 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

Comprueba el resultado.

## 2.8 SISTEMAS TRIDIAGONALES:

Tienen la forma:

$$
\begin{array}{lllr}
d_1 x_1 & + c_1 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & = b_1 \\
a_1 x_1 & + d_2 x_2 + c_3 x_3 & & = b_2 \\
 & a_{n-2} x_{n-2} + d_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n & & = b_{n-1} \\
 & & a_{n-1} x_{n-1} + d_n x_n & = b_n
\end{array}
$$

### ALGORITMO DE SISTEMA TRIDIAGONAL:

Tomamos el coeficiente $d_1$ como pivote para eliminar el coeficiente de $x_1$ en la segunda ecuación, donde:

$$d_2^{(1)} = d_2 - \frac{a_1}{d_1} c_1 \qquad b_2^1 = b_2 - \frac{a_1}{d_1} b_1$$

$d_2^1$ lo elegimos como pivote para obtener el segundo sistema derivado eliminando el elemento $x_2$ de la tercera ecuación.

Continuaremos de la misma forma obteniendo el sistema derivado k-esimo.

$$d_{k+1}^k = d_{k+1} + \frac{a_k}{d_k^{k-1}} c_k \; ; \quad b_{k+1}^k = b_{k+1} - \frac{a_k}{d_k^{k-1}} b_k^{k-1}$$

Si hacemos k = 1 , 2 ............., n – 1. Obtenemos un sistema triangular inferior.

Calculamos : $x_n = \dfrac{b_n^{n-1}}{d_n^{n-1}}$

Las ecuaciones precedente nos entregan los valores de las otras incógnitas:

$$x_k = \frac{b_k^{k-1} - c_k\ x_{k+1}}{d_k^{k-1}} \qquad (k = n-1,\ldots\ldots\ldots\ldots,1)$$

Desarrolla el algoritmo en forma detallada paso a paso.

Ejemplo 1 :

Resolveremos el sistema:

$$\begin{array}{lllll} x_1 + x_2 & & & & = 2 \\ 2x_1 - x_2 & + x_3 & & & = 3 \\ & x_2 + x_3 & - 3x_4 & & = 2 \\ & & x_3 + x_4 & & = 0 \end{array}$$

Sistema original.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Primer sistema derivado.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Segundo sistema derivado

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Tercer sistema derivado.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{4} & \frac{-5}{4} \end{array}\right]$$

Por el método sustitución atrás obtenemos.

$$x_4 = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{13}{4}} = \frac{-5}{13} \qquad x_3 = \frac{\frac{5}{3} - \frac{15}{13}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{13} \qquad x_2 = 2 - \frac{5}{13} + \frac{15}{13} = \frac{36}{13} \qquad x_1 = \frac{-10}{13}$$

## 2.9 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Para calcular el determinante de una matriz también lo podemos hacer usando eliminación gaussiana. Después de triangulizada la matriz procedemos a multiplicar los elementos de la diagonal haciendo cambio de signo al intercambiar filas en ella, o sea:

$$\det A = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{n}$$

donde $p$ es el número de intercambio de filas.

Ejemplo 1:

Determinemos el determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^0\, 2 \bullet 2 \bullet 4 = 16$$

## 2.10 FACTORIZACION DIRECTA DE MATRICES

El problema que enfrentamos ahora es de factorizar una matriz $A$ $n$ por $n$ en la forma $A = L \bullet U$ donde $L$ es una matriz triangular inferior y $U$ una matriz triangular superior, en forma directa, sin aplicar el teorema de Gauss.

Si consideramos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

y deseamos factorizarla de la forma $L \cdot U$ donde:

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Como solo conocemos 16 elementos de $A$ para determinar 20 elemento entre $L$ y $U$, para poder resolver el problema en forma única necesitamos 4 condiciones adicionales.

Una posibilidad es que usemos $\ell_{11} = \ell_{22} = \ell_{33} = \ell_{44} = 1$, este es conocido como método de Doolittle, además, consideraremos otros dos métodos de factorización, uno que requiere que los elementos de la diagonal de $U$ sean uno, Método de Crout, y otro que hace $\ell_{ii} = u_{ii}$ para todo $i$, Método de Choleski.

Factorizado $A$ en la forma $L\ U$ podemos resolver el sistema $Ax = b$, si hacemos las sustituciones:

$LUx = b$ donde $Lz = b$ y $Ux = z$ de tal manera que:

1) Calculamos $z$ a partir de $Lz = b$ por sustitución adelante.
2) Calculamos $x$ a partir de $Ux = z$ por sustitución atrás.

## 1. FACTORIZACION DE DOOLITLE.

Si

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \ell_{12} & & & \\ & & & 0 \\ \ell_{1n} & & \ell_{n-1n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & & \cdots\cdots & u_{1n} \\ 0 & & & \\ & & & \\ 0 & & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Si hacemos el producto e igualamos las matrices se puede concluir que:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} \ell_{ik} u_{kj}$$

para $k > j$ ; $u_{kj} = 0$ y para $i < k$ ; $\ell_{ik} = 0$

Si $i \leq j$

$$a_{ij} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}$$

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \;; \qquad j = i, \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

En forma similar para i > j

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ij}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} \right) ; \qquad j = 1 \;;\; i-1$$

Encontraremos las matrices L y U a partir de A.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Primera fila de $U$.

$$(1,0,0,0)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = 1x\, u_{11} = a_{11} \Rightarrow u_{11} = 6$$

$$(1,0,0,0)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = 1x\, u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = 2$$

$$(1,0,0,0)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{23} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = 1x\, u_{13} = a_{13} \Rightarrow u_{13} = 1$$

$$(1,0,0,0)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{pmatrix}_{4x1} = 1x\, u_{14} = a_{14} \Rightarrow u_{14} = -1$$

Primera columna de $L$:

$$(\ell_{21}, 1, 0, 0)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{21}\, u_{11} = a_{21} \Rightarrow \ell_{21} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\ell_{31},\ \ell_{32},\ 1,\ 0\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{31}\, u_{11} = a_{31} \Rightarrow \ell_{31} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\ell_{41},\ \ell_{42},\ \ell_{43},\ 0\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{41}\, u_{11} = a_{41} \Rightarrow \ell_{41} = -\frac{1}{6}$$

Segunda fila de $U$ :

$$\left(\ell_{21},\ 1,\ 0,\ 0\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{21}\, u_{12} + 1u_{22} = a_{22} \Rightarrow \frac{1}{3}(2) + u_{22} = 4 \Rightarrow u_{22} = \frac{10}{3}$$

$$\left(\ell_{21},\ 1,\ 0,\ 0\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{21}\, u_{13} + 1u_{23} = a_{23} \Rightarrow \frac{1}{3}(1) + u_{23} = 1 \Rightarrow u_{23} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\ell_{21},\ 1,\ 0,\ 0\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{21}\, u_{14} + 1u_{24} = a_{24} \Rightarrow \frac{1}{3}(-1) + u_{24} = 1 \Rightarrow u_{24} = \frac{1}{3}$$

Segunda columna de $L$:

$$\left(\ell_{31}, \ell_{32}, 1, 0\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{31}\, u_{12} + \ell_{32} u_{22} = a_{32}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(2) + \ell_{32}\left(\frac{10}{3}\right) = 1 \Rightarrow \ell_{32}\left(\frac{10}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow \ell_{32} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\ell_{41}, \ell_{42}, \ell_{43}, 1\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{41}\, u_{12} + \ell_{42} u_{22} = a_{42}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(2) + \ell_{42}\left(\frac{10}{3}\right) = 0 \Rightarrow \ell_{42}\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \ell_{42} = \frac{1}{10}$$

Tercera fila de $U$:

$$\left(\ell_{31}, \ell_{32}, 1, 0\right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = \ell_{31}\, u_{13} + \ell_{32} u_{23} + u_{33} = a_{33}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + u_{33} = 4 \Rightarrow \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{15}\right) + u_{33} = 4 \Rightarrow u_{33} = \frac{111}{30} = \frac{37}{10}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -27/30 \\ 0 & 0 & 0 & 2.543 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{lllll} 1.00x_1 & +0.333x_2 & +1.5x_3 & -0.333x_4 & =3.0 \\ -2.01x_1 & +1.45x_2 & +0.5x_3 & +2.95x_4 & =5.4 \\ 4.32x_1 & -1.95x_2 & +2.08x_4 & & =0.13 \\ 5.11x_1 & +4.00x_2 & +3.33x_3 & -1.11x_4 & =3.77 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.33 & 1.5 & -0.33 \\ -2.01 & 1.45 & 0.5 & 2.95 \\ 4.32 & -1.95 & 0 & 2.08 \\ 5.11 & 4.00 & 3.33 & -1.11 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.01 & 1.0 & 0 & 0 \\ 4.32 & -1.60 & 1.00 & 0 \\ 5.11 & -2.69 & -6.04 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.00 & 0.33 & 1.5 & -0.33 \\ 0 & 2.12 & 3.52 & 2.28 \\ 0 & 0 & -0.85 & 7.17 \\ 0 & 0 & 0 & 50.0 \end{pmatrix}$$

Haz un desarrollo detallado de la factorización y encuentra la solución al sistema.

$$\left(l_{31},\ l_{32},\ 1,\ 0\ \right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{pmatrix}_{4x1} = l_{31}\,u_{14}\ + l_{32}\,u_{24} + u_{34} = a_{34}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(-1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + u_{34} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{15}\right) + u_{34} = -1 \Rightarrow u_{34} = \frac{-27}{30}$$

Tercera columna de L:

$$\left(l_{41},\ l_{42},\ 1_{43},\ 1\ \right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1} = l_{41}\,u_{13}\ + l_{42}\,u_{23} + l_{43}u_{33} = a_{43}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(1) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + l_{43}\left(\frac{37}{10}\right) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{30}\right) + l_{43}\left(\frac{37}{10}\right) = -1 \Rightarrow l_{43} = \frac{-9}{37}$$

Cuarta fila de U:

$$\left(l_{41},\ l_{42},\ l_{43},\ 1\ \right)_{1x4}\begin{pmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{pmatrix}_{4x1} = l_{41}\,u_{14}\ + l_{42}\,u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} = a_{44}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(-1) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{9}{37}\right)\left(\frac{37}{30}\right) + u_{44} = 3 \Rightarrow \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{30}\right) + \frac{333}{1110} + u_{44} = 3 \Rightarrow u_{44} = 2.523$$

$\therefore A = LU$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -27/30 \\ 0 & 0 & 0 & 2.543 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{lllll} 1.00x_1 & +0.333x_2 & +1.5x_3 & -0.333x_4 & =3.0 \\ -2.01x_1 & +1.45x_2 & +0.5x_3 & +2.95x_4 & =5.4 \\ 4.32x_1 & -1.95x_2 & +2.08x_4 & & =0.13 \\ 5.11x_1 & +4.00x_2 & +3.33x_3 & -1.11x_4 & =3.77 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.33 & 1.5 & -0.33 \\ -2.01 & 1.45 & 0.5 & 2.95 \\ 4.32 & -1.95 & 0 & 2.08 \\ 5.11 & 4.00 & 3.33 & -1.11 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.01 & 1.0 & 0 & 0 \\ 4.32 & -1.60 & 1.00 & 0 \\ 5.11 & -2.69 & -6.04 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.00 & 0.33 & 1.5 & -0.33 \\ 0 & 2.12 & 3.52 & 2.28 \\ 0 & 0 & -0.85 & 7.17 \\ 0 & 0 & 0 & 50.0 \end{pmatrix}$$

Haz un desarrollo detallado de la factorización y encuentra la solución al sistema.

**Algoritmo de factorización de Doolitle.**

Fase 1 : Ingresar matriz $A$ y $l_{ii}=1$.

Fase 2 : Calcular las columnas de $U$.

Fase 3 : Calcular las columnas de $L$.

Entrada : Dimensión $n$; ingresar las $a_{ij}$, la diagonal $l_{ii}=1$

Salida : Los elementos $l_{ij}$, $1\le j\le i$; $1\le i\le n$ de $L$.

Los elementos $u_{ij}$, $i\le j\le n$; $1\le i\le n$ de $U$.

Paso 1 : Hacer $u_{11}=a_{11}$ ; si $a_{11}=0$ parar mensaje no hay solución.

Paso 2 : Para $j=2,\ldots\ldots\ldots n$

Hacer $u_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{l_{11}}$

$$l_{j1}=\frac{a_{j1}}{u_{11}}$$

Paso 3 : $i=2,\ldots\ldots\ldots j$

$SUM=a_{ij}$

$k=1,\ldots\ldots i-1$

$SUM=SUM-l_{ik}\,u_{kj}$

$u_{ij}=SUM$

Paso 4 : Si $j<n$

$i=j+1,\ldots\ldots\ldots n$

$SUM=a_{ij}$

$k=1,\ldots\ldots\ldots,j-1$

$SUM=SUM-l_{ik}\,u_{kj}$

$l_{ij} = SUM$

Si $u_{jj} = 0$ parar no hay solución

Si no

$$l_{ij} = \frac{l_{ij}}{u_{jj}}$$

Paso 5 : Hacer $u_{ij} = 0$; $l_{ij} = 0$ para $i = 2,\ldots\ldots\ldots n$

$j = 1,\ldots\ldots\ldots i-1$

Paso 6 : Salida de $u_{ij}$ ; $l_{ij}$

Paso 7 : Parar

## 2. FACTORIZACION DE CROUT:

Este algoritmo es similar al de Doolitle sólo que los $u_{ii}$ son 1.

Hace las modificaciones necesarias en el algoritmo anterior para obtener el de factorización de Crout.

Ejemplo 2 : Aplicaremos el algoritmo de Crout para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 9 & 10 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}} * \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

Factorizando tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} A & & L & & A \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 9 & 10 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 9 & -8 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 13{,}25 & 93 \end{pmatrix} & * & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 5{,}75 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

de $L\ z = b$

$$\begin{array}{ccccc} L & & z & & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 9 & -8 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 13{,}25 & 93 \end{pmatrix} & * & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 6 \\ 6{,}25 \\ -3 \\ 0{,}64 \end{pmatrix} \end{array}$$

Finalmente nos queda resolver el sistema $Ux = z$ donde encontraremos la solución $x$ de la matriz $A$, como se ilustra a continuación:

$$\begin{array}{ccccc} u & & x & & z \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 5{,}75 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & * & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 6 \\ 6{,}25 \\ -3 \\ 0{,}64 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & & \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1{,}31 \\ -1{,}45 \\ 0{,}84 \\ 0{,}64 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resuélvelo en detalle.

## 3. METODO DE CLOLESKI

En el caso que $A$ sea una matriz real y simétrica definida positiva la descomposición $LU$ podemos hacerla de manera que: $A = UU^T$ donde $U$ es matriz triangular inferior.

Usando los mismos argumentos que para la reducción de Doolitle, podemos verificar que los elementos de $U$ se pueden obtener de las siguientes fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} u_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2\right)^{1/2} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}\right) \quad j > i \end{aligned}}$$

Ejemplo 3 : Factoricemos aplicando Cholesky.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 10 & 6 & 54 \end{bmatrix}$$

Para $i = 1$

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{3}$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Para $i = 2$

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12}\, u_{13}}{u_{22}} = \frac{6 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

Finalmente para $i = 3$

$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{54 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{58}{3}}$$

$$U^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{58}{3}} \end{pmatrix}$$

**Algoritmo para resolver el sistema $Ax = b$ usando factorización de Choleski.**

Fase 1 : Factorizar $A$.

Fase 2 : Aplicar para resolver $Uz = b$ fórmula progresiva y

$U^T x = b$ fórmula regresiva

obteniendo la $x_i \quad i = 1, \ldots\ldots\ldots. n.$.

Entrada : dimensión $n, A, b$ sólo se necesita la parte inferior de $A$.

Salida : valores $u_{ij}$

Paso 1 : Hacer $u_{11} = \sqrt{a_{11}}$

Para $j = 2, \ldots\ldots\ldots n$ hacer $\ell_{j1} = a_{j1} / u_{11}$

Paso 2 : Para $m = 2a\ n$ hacer

SUB : = $a_{mn} - \sum_{j=1}^{m-1} u_{mj}^2$

Si SUB $\leq 0$ parar; mensaje $A$ no es definida

$u_{mm} = \sqrt{SUB}$

Paso 3 : Para $i = m+1, \ldots\ldots\ldots n$ hacer $u_{im} = \dfrac{1}{u_{mm}} \left( a_{im} - \sum_{j=1}^{m-1} u_{ij}\, u_{mj} \right)$

Paso 4 : hacer $z_1 = \dfrac{b_1}{u_{11}}$

Paso 5 : Para $i = 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$ hacer $z_i = \dfrac{1}{u_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, z_j \right]$

Paso 6 : Hacer $x_n = \dfrac{z_n}{u_{nn}}$

Paso 7 : para $i = n \ldots\ldots\ldots\ldots 1$ hacer $x_i = \dfrac{1}{u_{ii}} \left[ z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j \right]$

Paso 8 : Salida $x_1, \ldots\ldots\ldots. x_n$

## EJERCICIOS

1. Resolver usando sustitución progresiva o regresiva.

a) $$\begin{array}{llll} x & & & = 3 \\ 2x & +3y & & = 0 \\ 4x & +5y & +6z & = 4 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lllll} 2x & +y & +z & & = -1 \\ & 3y & & -2u & = 2 \\ & & z & & = -1 \\ & & & 2u & = -2 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 6 \\ & x_2 & +5x_3 & -3x_4 & = -10 \\ & & x_3 & -2x_4 & = -5 \\ & & & x_4 & = 2 \end{array}$$

Respuestas:

a) $\left[\, 3, -2, \tfrac{1}{3} \,\right]^T$  b) $[0, 0, -1, -1]^T$  c) $[3, 1, -1, 2]^T$

2. ¿Cuántas operaciones se necesitan para resolver los sistemas del ejercicio 1?
3. Haga un algoritmo para la sustitución progresiva.
4. Resolver las siguientes ecuaciones lineales usando eliminación gaussiana.

a) $$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & = 12 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 8 \\ 2x_1 & 4x_2 & 9x_3 & = 8 \\ 4x_1 & 3x_2 & 2x_3 & = 2 \end{array}$$

Respuesta:

a) $[\,6, 0, 0]^T$ b) $\left[\,-\frac{20}{3}, \frac{34}{3}, \frac{-8}{3}\right]^T$

5. Resolver los ejercicios 4 usando eliminación gaussiana con pivote parcial.
6. Considere el sistema de ecuaciones.

$$Ax = b\,;\ \text{con}$$

$$a_{ij} = \left(\frac{i}{n}\right)^{j-1}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots\ldots\ldots n \\ j = 1,\ldots\ldots\ldots n \end{matrix}$$

Usar el algoritmo de Gauss y obtener la solución para $n = 3,5,7,9$.

Respuesta: El valor correcto es $[\,1, 1,\ldots\ldots 1\,]^T$

7. Para resolver el sistema $Ax = b$ hacemos que la matriz aumentada $\left[\,A^n : b^n\right]$ quede la forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^1 & 0 & \cdots & 0 & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & 0 & b_2^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^n & b_n^n \end{array}\right]$$

y la solución es : $x_i = \dfrac{a_{i,\,n+1}^i}{a_{ii}^i}$ $\qquad i = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots n$

Este método se llama de Gauss Jordan.

a) Construya un algoritmo para este procedimiento modificando el algoritmo de eliminación gaussiana.
b) Aplique el método a los sistemas del ejercicio 4.

8. a) Encuentre la inversa de las matrices de coeficiente del ejercicio 4.

   b) Resuelva los sistemas mediante $x = A^{-1}\, b$

9. Si deseamos resolver $m$ sistemas de ecuaciones.

$$Ax^{p} = b^{p} \quad ; \; p = 1,2,\ldots\ldots\ldots n$$

cada uno con la matriz de coeficiente $A$.

a) Si aplicamos eliminación gaussiana a la matriz aumentada

$$\left[A : b^{1} \quad b^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots b^{m}\right]$$

pruebe que el número de operaciones es el siguiente:

$\dfrac{n^3}{3} + mn^2 - \dfrac{n}{3}$ multiplicación y divisiones

$\dfrac{n^3}{3} + mn^2 - \dfrac{n^2}{2} - mn + \dfrac{n}{6}$ sumas y restas

b) Determine un algoritmo a partir de eliminación gaussiana para resolver los sistemas.
c) Aplíquelo a los sistemas.

$$A\,x^3 = b^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad b^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 15 \\ 3 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Respuesta: $\left[\frac{1}{2}, -1, 1\right]$ $\quad [1, -1, 1]$ $\quad [1, 1, -1]$

10. Resolver los sistemas tridiagonales.

a)
$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & +3x_2 & & & = 2 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 2 \\ & x_2 & -x_3 & & = 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{llllr} x_1 & +2x_2 & & & = 10 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & & = -2 \\ & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 8 \\ & & x_3 & -x_4 & = 0 \end{array}$$

11. Factorizar aplicando Doolittle.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -15 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4.5 & 5 \end{bmatrix}$

12. Factorizar las matrices del ejercicio 11 aplicando Crout.

13. Factorizar usando Choleski.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & 6 \\ 10 & 6 & 54 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

14. Resolver los sistemas de ecuaciones aplicando Factorización de Crout.

a)
$$\begin{array}{rrrl} x_1 & x_2 & & = 0 \\ -2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = -1 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 1.5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrl} 0.5x_1 & +0.25x_2 & & & = 0.35 \\ 0.35x_1 & +0.8x_2 & +0.4x_3 & & = 0.77 \\ & 0.25x_2 & +x_3 & +0.5x_4 & = -0.5 \\ & & x_3 & -2x_4 & = -2.25 \end{array}$$

Respuesta: $[0.5, 0.5, 1]$

$[-0.0935, 1.5871, -1.1674, 0.5412]$

15. Haga un programa y resuelva los sistemas obtenidos en el ejemplo motivacional 3 capítulo I, aplicando Gauss-Jourdan para los valores siguientes.

a) circuito 1.

$R_1 = R_3 = 5$ ; $R_2 = R_4 = 10$ ; $R_5 = 15$ ; $R_6 = 20$

$V_1 = 200$

$V_0 = 0$

Respuesta: $V_2 = 169.23$ : $V_3 = 153.85$ $V_4 = 146.15$ $V_5 = 123.08$

b) circuito 2.

$R_1 = 20$ ; $R_2 = 30$ ; $R_3 = R_6 = 5$ ; $R_4 = 10$ ; $R_5 = 15$; $R_7 = 7$

$V_1 = 25$

$V_6 = 200$

Respuesta: $V_2 = 169.23$ : $V_3 = 153.85$ $V_4 = 146.15$ $V_5 = 123.08$

# CAPITULO III

## METODOS ITERATIVOS

### 3.1 NORMAS VECTORIALES Y MATRICIALES.

Para que podamos estudiar entidades, como los vectores y matrices, necesitamos una forma de expresar la magnitud de ellos, y poder dar una definición de distancia, que nos permita hablar de convergencia de vectores y matrices.

Definición 1 : Norma de vectores.

Una norma vectorial es una función de $R^n$ en $R$, que anotaremos simbólicamente como:

$\|\bullet\|: R^n \to R$ tal que

1) $\|x\| \geq 0\,;\ \forall x \in R^n$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $|\alpha|\,\|x\| = |\alpha|\,\|x\|\ ;\ \forall x \in R^n$

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|;\ \forall x, y \in R^n$ (Desigualdad triangular)

Algunas normas vectoriales.

Definición 2 : La norma $p$ de un vector $x$ es: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Si $p = 1$

$$\|x\|_p = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{suma de magnitudes}$$

Si $p = 2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{norma euclidiana}$$

y

$$\|x\|_\infty = \max_{1<i<n} |x_i| \quad \text{norma de máxima magnitud.}$$

Definición 3 : La distancia entre dos vectores $x, y$ en $R^n$ es $\|x - y\|$

Ejemplo 1 : Calcularemos las normas de los vectores $x = (1, 2, 10)$, $y = (-5, -1, 2)$ y la distancia entre ellos.

$$\|x\|_1 = |1| + |2| + |10| = 13$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{115}$$

$$\|x\|_\infty = 10$$

Calcula las normas de $y$.

Determinemos la distancia en las distintas normas.

$$\|x - y\|_1 = \|(6, 3, 8)\|_1 = 17$$

$$\|x - y\|_2 = \|(6, 3, 8)\|_2 = \sqrt{109}$$

$$\|x - y\|_\infty = 8$$

Con la distancia podemos definir convergencia de vectores en cualquier norma.

Definición 4 : Se dice que una sucesión $\{K^k\}_{k=0}^{\infty}$ de vectores en $R^n$ converge a $x$ con respecto a la norma $\|\bullet\|$, si dado, cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que:

$$\left\| x^k - x \right\| < \varepsilon \;\; ; \;\; \forall K \geq N(\varepsilon)$$

Definición 5 : La norma de una matriz $A$ en $M_n\,(R^n)$ en una función real dada por:

$$\|\bullet\| : M_n(R^n) \rightarrow R$$

tal que cumple las siguientes propiedades:

1) $\|A\| \geq 0 \quad \forall\, A \in M_n(R^n)$

2) $\|A\| \geq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; A = 0$

3) $\|KA\| = |K| \;\; \|A\|\,;\; k \in R$

4) $\| A + B \| \leq \|A\| + \|B\| \;\;:\; \forall \;\; A, B \in \; M_n\,(R^n)$

5) $\|A \bullet B\| \leq \|A\| \bullet \|B\| \; : \forall\; A\,,\, B \in M_n\left(R^n\right)$

Con el concepto de norma matricial podemos definir distancia.

Definición 6 : La distancia entre dos matrices $A, B$ en $M_n\left(R^n\right)$ está dada por: $\|A - B\|$

Algunas normas matriciales se desarrollan por una correspondencia con las normas vectoriales, las que se llaman normas naturales.

En general, definiremos una norma natural (inducida) como: $\|A\| = \underset{\|x\|=1}{máx}\|Ax\|$

Así tenemos:

$$\|A\|_1 = \underset{\|x\|_1=1}{máx}\|Ax\|_1$$

$$\|A\|_2 = \underset{\|x\|_2=1}{máx}\|Ax\|_2$$

$$\|A\|_\infty = \underset{\|x\|_\infty=1}{máx}\|Ax\|_\infty$$

Es posible demostrar que:

$\|A\| = \underset{1 \leq j = n}{máx} \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right|$ suma columna máxima

$\|A\|_\infty = \underset{1 \leq i = n}{máx} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|$ suma fila máxima

Ejemplo 2 : Calcularemos las normas de las matrices $A$ y $B$ y la distancia entre ellas.

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = máx\{\ |6|+|7|, |-3|+|-5|\ \} = máx\ \{13{,}8\} = 13$$

$$\|A\|_1 = máx\{|6|+|-3|, |7|+|-5|\} = máx\ \{9, 12\} = 12$$

Calcula las normas de $B$

Distancia:

$$\|A-B\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 14$$

$$\|A-B\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\|_1 = 10$$

Conociendo los resultados de las normas de $B$ podrás determinar cual de las dos matrices es la mayor.

En una matriz diagonal todas las normas $p$ tienen el mismo valor, compruébalo.

El cálculo de la norma 2 de una matriz está relacionada con los valores característicos de la matriz (los cuales estudiaremos a continuación). La magnitud de esta norma tiene una utilidad especial debido a que ninguna otra norma es menor, pero tiene el inconveniente de ser más "cara" que las otras, requiere mayor número de operaciones.

Definición 7 : Sea $A \in M_n(R^n)$ el polinomio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Se llama polinomio característico de $A$

Definición 8 : Si $p$ es un polinomio característico de la matriz $A$ los ceros de $p$ se llaman valores característicos de la matriz $A$. Si $\lambda$ es un valor característico de $A$ y $x \neq 0$, tiene la propiedad que $(A - \lambda I)x = 0$ entonces $x$ es el vector característico de $A$ correspondiente al valor característico $\lambda$.

Definición 9 : El radio espectral $\rho(A)$ de una matriz $A$ es: $\rho\ (A) = \max |\lambda|$

Donde $\lambda$ es un valor característico de $A$.

Teorema 1 : Si $A$ es una matriz real $n \times n$ entonces:

1) $\left(\rho\left(A^T A\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2$

2) $\rho(A) \leq \|A\|$ para cualquier norma natural

Ejemplo 3 : Calcularemos la norma 2 de una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $A$ es simétrica $A^T A$

$$A^T A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Valores característicos de $A^T A$

$$\det\left(A^T A - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 8 & 13-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(13-\lambda) - 64 = 65 - 5\lambda - 13\lambda + \lambda^2 - 64$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 1$$

$$\lambda_1 = 9 + 4\sqrt{2} = 14{,}6 \qquad\qquad \lambda_2 = 9 - 4\sqrt{2} = -3.4$$

por lo tanto $\rho\,(\lambda) = 14.6$

$$\|A\|_2 = \sqrt{14.6}$$

Como ya hemos definido distancia podemos ahora hablar de convergencia de matrices.

Definición 10 : $A$ es una matriz convergente si:

$$\lim_{k\to\infty} \left(A^k\right)_{ij} = 0 \quad \text{para cada} \quad \begin{matrix} i = 1,\ldots\ldots\ldots n \\ j = 1,\ldots\ldots\ldots n \end{matrix}$$

Teorema 2 : Las siguientes afinaciones son equivalentes :

1. $A$ es matriz convergente

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$

3. $\rho(A) < 1$

4. $\lim_{n\to\infty} A^n \cdot x = 0 \qquad \forall x \in R^n$

## 3.2. METODOS ITERATIVOS

Usaremos los métodos iterativos cuando los métodos directos de solución de sistemas de ecuaciones, como la eliminación gaussiana y factorización directa LU, no son recomendables, por ejemplo:

- Los sistemas son de gran tamaño
- Cuando la matriz de los coeficientes es poco densa (tienen muchos ceros que no siguen un patrón).

Además, los podemos utilizar para reducir el error de redondeo en las soluciones calculadas por métodos directos.

Describiremos en esta sección los mejores y más conocidos métodos iterativos.

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{l}
E_1 : a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
E_2 : a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
E_n : a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots + a_{nn} x_n = b_n
\end{array}
$$

Escribiremos el sistema de manera que de la ecuación $E_i$ despejamos $x_i$.

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots\ldots\ldots - a_{1n}\,x_n + b_1\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots\ldots\ldots - a_{2n}\,x_n + b_2\right)$$
$$\vdots$$
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 \ldots\ldots\ldots - a_{i-1i}\,x_i - a_{i+1,i}\,x_i \ldots - a_{in}x_n + b_i\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{1}{a_n}\left(-a_{n1}\,x_1 - a_{n2}\,x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - a_{n,n-1}\,x_{n-1} + b_n\right)$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \ddots & & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Con este desarrollo hemos transformado el sistema $Ax = b$ en uno equivalente de la forma $x = Tx + C$ con $T \in M_n(R)$ y C vector.

Si nos damos al azar un vector $x^0$ podemos generar una sucesión de vectores $\{x^k\}$, a partir de $x^{k+1} = T\,x^k + C$ que converjan a la solución $x$ del sistema.

Para calcular un vector $x_i$ en la iteracción $k+1$, de lo anteriormente expuesto obtenemos:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^k}{a_{ii}} \qquad \text{para} \quad \begin{array}{l} i = 1,\ldots\ldots n \\ k = 1,\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Este es llamado método iterativo de Jacobi.

Al aplicar métodos iterativos se sugiere que las ecuaciones sean arregladas de tal manera que la suma de los $a_{ii}$ en valor absoluto sea lo más grande posible de manera de acelerar la convergencia.

Ejemplo 1 :

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Ordenamos las ecuaciones de manera que la suma de los $|a_{ii}|$ sea máxima.

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{8} \left(-x_2^k + x_3^k + 8\right) = 1 - 0.125x_2^k + 0.125x_3^k \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{7} \left(+x_1^k + 2x_3^k + 4\right) = 0.571 + 0.143x_1^k + 0.266x_3^k \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{9} \left(-2x_1^k - x_2^k + 12\right) = 1.333 - 0.222x_1 - 0.111x_2 \end{aligned}$$

Para $k=0$ consideremos $x^0=(0,0,0)$, luego :

$x_1^1=-1$

$x_2^1=0.571$

$x_3^1=1.333$

Para $k=1$: $x^{(1)}=(-1;\ 0.571;\ 1.333)$, y obtenemos : $x^2=(1.095;\ 1.095;\ 1.048)$

Las estimaciones sucesivas son:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1^k$ | 0 | 1.000 | 1.095 | | | |
| $x_2^k$ | 0 | 0.571 | 1.095 | | | |
| $x_3^k$ | 0 | 1.333 | 1.048 | | | |

Completa las otras iteracciones, la solución exacta es $x=(1,1,1)$

Como criterio de término en los métodos iterativos podemos usar:

$$\frac{\left\|x^{k+1}-x^k\right\|}{\left\|x^{k+1}\right\|}<\varepsilon \quad ó \quad \left\|x^{k+1}-x^k\right\|<\varepsilon$$

Además, debemos colocar un contador de iteraciones, para que en el caso que sea divergente el programa se detenga.

Si anotamos la matriz A de coeficiente como $A = D - L - U$ donde:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \ldots\ldots\ldots & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{2n} & \ldots\ldots\ldots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & -a_{13} \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{bmatrix}$$

y lo reemplazamos en $Ax = b$ de donde podemos encontrar una forma para la iteración de Jacobi.

$x^{k+1} = Tx^k + C$ : en efecto $Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)\, x = b$ teniendo finalmente:

$$x^{k+1} = D^{-1}(L+U)\, x^k + D^{-1} b \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots\ldots\ldots$$

Determina esta última ecuación.

Igualando tenemos: $T = D^{-1}(L+U)$ $\qquad\qquad C = D^{-1} b$

Es posible mejorar el algoritmo siguiendo la siguiente metodología cuando calculamos la segunda estimación para $x_2$ ya conocemos el nuevo valor de $x_1$ y si deseamos calcular $x_3$ tenemos los nuevos valores de $x_1$ y $x_2$. Casi en todos los casos los nuevos valores son mejores que los anteriores y es preferible usar estos en el cálculo de los $x_i$ , en general, para calcular un $x_i$ en la iteración $k+1$, es decir $x_i^{k+1}$, para los índices menores que $i$ usamos la iteración actual $x_1^{k+1}\ x_2^{k+1},..........,x_{i-1}^{k+1}$ y para los mayores que $i$ usamos los valores $x_{i+1}^k\ x_{i+2}^k,...........x_n^k$ correspondiente a la iteración anterior.

Este método se conoce con el nombre de Gauss-Seidel o Jacobi mejorando el cual acelera la convergencia de Jacobi.

Su fórmula es:

$$\boxed{x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k}{a_{ii}} \qquad i = 1,.......n}$$

Ejemplo 2: Encontremos las soluciones del sistema resuelto por Jacobi mediante Gauss-Seidel.

$$x_1^{k+1} = 1 - 0.125\, x_2^k + 0.125 x_3^k$$

$$x_2^{k+1} = 0.571 + 0.143\, x_1^{k+1} + 0.266 x_3^k$$

$$x_3^{k+1} = 1.333 - 0.222\, x_1^{k+1} - 0.111 x_2^{k+1}$$

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1^k$ | 0 | 1 | 1.041 | | | |
| $x_2^k$ | 0 | 0.714 | 1.014 | | | |
| $x_3^k$ | 0 | 1.032 | 0.990 | | | |

Completa la tabla y analiza los resultados de Jacobi y Gauss Seidel, que puedes afirmar sobre la convergencia.

Ejemplo 3 :

Resolveremos el siguiente sistema por el método de Gauss Seidel dándonos como criterio de término $\varepsilon = 0.001$

$$0.1x_1 + 7.0x_2 - 0.3x_3 = -19.30$$

$$3.0x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 - 10.0x_3 = 71.40$$

Primero ordenaremos las ecuaciones de modo que la diagonal principal estén los coeficientes mayores en valor absoluto.

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7.0x_2 - 0.3x_3 &= -19.30 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 - 10.0x_3 &= 71.40 \end{aligned}$$

Despejando tenemos:

$$x_1^{k+1} = \frac{7.85}{3} - \frac{0.1}{3}x_2^k + \frac{0.2}{3}x_3^k$$

$$x_2^{k+1} = \frac{-19.3}{7} - \frac{0.1}{7}x_1^{k+1} + \frac{0.3}{3}x_3^k$$

$$x_3^{k+1} = \frac{-71.14}{10} + \frac{0.3}{10}x_1^{k+1} - \frac{0.2}{10}x_2^{k+1}$$

Consideremos como vector inicial $x^0 = (0\,;0,\ 0)$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0^k$ | 0 | 2.616666 | 2.2427 | 2.252157 | 2.25218 |
| $x_1^k$ | 0 | -2.794523 | -3.08936 | -3.08974 | -3.08973 |
| $x_2^k$ | 0 | -7,005 | -7.01093 | -7.01064 | -7.01056 |

Determina si se da el criterio de término en la cuarta iteración, en caso contrario sigue iterando hasta que obtengas: $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$

**Algoritmo de Gauss-Seidel.**

Entrada : n número de ecuaciones e incógnita

A matriz de coeficiente

b vector

$\varepsilon$ parámetro de término

$x_{(0)}$ vector inicial

Salida : $x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n$ aproximación, número de iteraciones excedidos.

Paso 1 : Para k = 1

Si $k \leq N$

Paso 2 : Para i = 1 ,................, n

$$x_i = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, xo_j + b_i}{a_{ii}}$$

Paso 3 : Si $\| x - xo \|_\infty < \varepsilon$

Paso 4 : Si no tomar k = k + 1

Paso 5 : Para i = 1,................n ; $xo_i = x_i$

Paso 6 : Número iteraciones excedido.

Haz un algoritmo para Jacobi.

### 3.3. **Convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel**

Si definimos $e^k = x^k - x$ donde $x = Tx + c$ es la solución al sistema $Ax = b$, y

$$x^k = Tx^{k-1} + C$$

tenemos $$e^k = Tx^{k-1} + C - Tx - C = T\left(x^{k-1} - x\right) = Te^{k-1}$$

por lo tanto $$e^k = Te^{k-1}$$

continuando inductivamente tenemos que:

$$e^k = T^k e^0,\ \text{realizalo.}$$

Analizaremos la convergencia en cualquier norma natural. Es claro que si $e^k \to 0$ cuando $k \to \infty$ se tendrá que $x^k \to x$.

Para que :

$$\lim_{k\to\infty} e^k = \lim_{k\to\infty} T^k e^0 = 0$$

se debe tener que $\rho(T) < 1$.

Teorema 1: La sucesión $\{x^k\}$ generada por $x^k = Tx^{k-1} + C$ converge a la solución $x = Tx + C$ del sistema de ecuaciones $Ax = b$ si $p(T) < 1$.

Corolario 1 : Si $\| T \| < 1$ para cualquier norma natural, entonces la sucesión $\{x^k\}$ generada por $x^k = Tx^{k-1} + C$ converge para cualquier vector inicial $x^0 \in R^n$, a un vector $x \in R^n$ y se satisfacen las siguientes cota de error.

$$\left\|x - x^k\right\| \leq \| T \|^k \left\|x^0 - x\right\|$$

$$\left\|x - x^k\right\| \leq \frac{\| T \|^k}{1 - \| T \|} \left\|x^1 - x^0\right\|$$

Demostración:

Si aplicamos norma a:

$e^k = T^k e^0$ se tiene

$$\left\|e^k\right\| \leq \| T^k \| \left\|e^0\right\| = \| T \|^k \left\|e^0\right\|$$

Si $\| T \| < 1$ tenemos que $\lim_{k \to \infty} \| T \|^k e^0 = 0$

$\therefore \lim_{k \to \infty} \left\|e^k\right\| = 0$

Demuestra las dos desigualdades.

La matriz de iteración de Jacobi y Gauss-Seidel están dadas por:

$$T_j = D^{-1}(L + U) \quad \text{y} \quad T_g = (D - L)^{-1} U$$

Si $p(T_j) < 1$ ó $p(T_g) < 1$, la sucesión $\{x^k\}$ converge a la solución $x = Tx + C$.

### 3.3. **Métodos de Relajación.**

Una vez conocido un nuevo valor $x_i^{k+1}$ mediante el método de gauss-seidel, podemos lograr una mejor aproximación usando el valor promedio ponderado de los valores actuales y anteriores.

De esa manera $x_i^{k+1}$ está dado por:

$$x_i^{k+1} = w\, x_i^{k+1} + (1-w)x_i^k$$

donde $x_i^{k+1}$ es el valor que se obtiene de G-S.

Se tiene:

$$\boxed{x_i^{k+1} = (1-w)\,x_i^k + \frac{w}{a_{ii}}\left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k \right]}$$

Donde $w > 0$ es un valor arbitrario y debe ser menor que 2 para evitar divergencia, es decir, $0 < w < z$. Para $0 < w < z$ los procedimientos se llaman métodos de sub-relajación y se pueden emplear para que obtengamos la convergencia en algunos sistemas no convergentes por Gauss Siedel.

Para $w > 1$ los procedimientos son de sobre relajación y los usaremos para acelerar la convergencia de sistema convergente por Gauss-Siedel, estos últimos se abrevian por SOR (sucesión-over, relaxation).

La matriz de iteración del método SOR está dada por $T_w = (D - wL)^{-1}\left[(1-w)D + wU\right]$ la cual la puedes obtener a partir de la última fórmula, hazlo .

Ejemplo 1 :

$$\begin{array}{lllr} 10x_1 & -x_2 & & = 9 \\ -x_1 & +10x_2 & -2x_3 & = 7 \\ & -2x_2 & +10x_3 & = 7 \end{array}$$

$$x_1^{k+1} = (1-w)x_1^k + \frac{w}{10}\left[9 + x_2^k\right] = (1-w)\,x_1^k + \frac{wx_2^k}{10} + \frac{9}{10}w$$

$$x_2^{k+1} = (1-w)x_2^k + \frac{w}{10}\left[7 + x_1^{k+1} + 2x_3^k\right] = (1-w)\,x_2^k + \frac{w}{10}\,x_1^{k+1} + \frac{w}{5}x_3^k + \frac{7}{10}w$$

$$x_3^{k+1} = (1-w)x_3^k + \frac{w}{10}\left[7 + 2x_2^{k+1}\right] = (1-w)\,x_3^k + \frac{w}{5}\,x_2^{k+1} + \frac{7}{10}w$$

Si w=1.37

Si hacemos 6 iteraciones obtenemos:

$$x = (0.97761,\ 0.77240,\ 0.85446)^T$$

Hace una tabla con las iteraciones hasta obtener la sexta a partir $x^0 = (0,0,0)^T$

El algoritmo del método SOR lo puedes hacer a partir de algunos pequeños cambios al algoritmo Gauss-Seidel. Realizalo.

El valor de $w$ óptimo no se puede calcular para un sistema de ecuaciones, pero en ciertas situaciones especiales se puede determinar.

Teorema 1 : Si $A$ es positiva definida tridiagonal entonces $p(T_G) = (p(T_j))^2 < 1$, la elección óptima de $w$ para el método SOR es:

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (p(T_j))^2}}$$

y con este valor de $w$, $p(T_w) = w - 1$

Ejemplo 2 : Calcularemos el valor óptimo de $w$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & 0 & 2/10 \\ 0 & 2/10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(T_j - \lambda I\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1/10 & 0 \\ 1/10 & -\lambda & 2/10 \\ 0 & 2/10 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{420}{2000}\right)$$

como $w = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-(p(T_0))^2}} = 1.37$

## 3.4. ERRORES EN LA SOLUCION Y NUMERO DE CONDICION.

Definición 1 : Sea $\overline{x} \in R^n$ una aproximación de la solución del sistema $Ax = b$, el vector residual $r$ está dado por: $r = A\overline{x} - b$

Ejemplo 1 : Calcularemos $r$ en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 1.01\,x_1 + 0.99\,x_2 = 2 \\ 0.99\,x_1 + 1.01\,x_2 = 2 \end{array}\right|$$

cuya solución es $x_1 = x_2 = 1$

Consideremos la solución aproximada:

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}1.01\\1.01\end{bmatrix}$$

$$r=\begin{bmatrix}1.01 & 0.99\\0.99 & 1.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.01\\1.01\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2.00\\2.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.02\\0.02\end{bmatrix}$$

Consideremos como una aproximación a la solución:

$\bar{x}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ que difiere bastante de la solución exacta.

$$r=\begin{bmatrix}1.01 & 0.99\\0.99 & 1.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.00\\0.00\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2.00\\2.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.02\\-0.02\end{bmatrix}$$

Este ejemplo nos enseña que no siempre se puede probar la precisión de la solución de un sistema, por lo pequeño de su valor residual.

Estos sistemas se llaman mal condicionados y se pueden detectar también haciendo cambios pequeños en los coeficientes.

Ejemplo 2 : El sistema lineal

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\1.0001 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3.001\end{bmatrix}$$

Tiene solución $x_1=x_2=1$. Si hacemos un pequeño cambio en $A$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

y resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.001 \end{bmatrix}$$

Su solución es $[-1.000;\ 2.000]$

Calcula esta nueva solución, compara el error real con la estimación.

¿Por lo obtenido puedes afirmar que el sistema es mal condicionado?

En Los dos ejemplos anteriores el conjunto de ecuaciones pueden ser representado por dos líneas rectas que se intersectan en $(1,1)$. Las rectas son prácticamente paralelas, lo explica que para aproximaciones que estén lejos de la solución, el vector residual sea pequeño.

Por lo anterior si tenemos una matriz es importante determinar si es mal condicionada, por lo tanto es necesario que tengamos una medida cuantitativa de ellas.

Si $\bar{x}$ es una aproximación del sistema $Ax = b$

$$r = A\bar{x} - b = A\bar{x} - A\bar{x} = A(\bar{x} - x)$$

luego $$r = A(\bar{x} - x) \;/\bullet\; A^{-1}$$

$$A^{-1} r = \bar{x} - x$$

Aplicando norma ha esta última igualdad:

$$\|\bar{x} - x\| \le \|A^{-1}\| \|r\|$$

Desigualdad que nos entrega el error absoluto, entre la aproximación al sistema y su solución exacta en términos de $A^{-1}$ y $r$.

Determinemos el error relativo.

$$\|\bar{x}-x\| \leq \|A^{-1}\|\|r\| \,/\, \bullet \frac{1}{\|x\|}$$

$$\frac{\|\bar{x}-x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|x\|} \quad (1)$$

Además tenemos de:

$b = Ax$ aplicando norma

$$\|b\| \leq \|A\|\|x\|$$

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{\|\bar{x}-x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \bullet \|r\| \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

Esta desigualdad nos da una conexión entre el error relativo y el error residual.

Definición 1 : El número condición $K(A)$ de la matriz no singular $A$ relativo a la norma $\|\bullet\|$ se define como: $K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

Con lo cual las desigualdades nos quedan:

$$\frac{\left\| \bar{x} - x \right\|}{\| x \|} \leq K\ (A)\ \frac{\| r \|}{b} \quad y \quad \left\| \bar{x} - x \right\| \leq K\ (A)\ \frac{\| r \|}{\| A \|}$$

Nosotros diremos que una matriz es mal condicionada si K (A) es un número grande. La pregunta es cuan grande debe ser, como regla general para las normas estudiadas si K (A) es mayor que 1000 podría tenerse problemas.

Siempre K (A) ≥ 1 , en efecto:

$$K(A) = \| A \| \bullet \left\| A^{-1} \right\| \geq \left\| A \bullet A^{-1} \right\| = \| I \| = 1$$

Ejemplo 3 : Si tenemos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3.3330 & 15.920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.1701 x\ 10^{-4} & -1.4983\ x\ 10^{-1} & 8.5416\ x\ 10^{-1} \\ 6.2782\ x\ 10^{-5} & 1.21224\ x\ 10^{-4} & -3.0662\ x\ 10^{-4} \\ -8.6631\ x\ 10^{-5} & 1.3846\ x\ 10^{-1} & -1.9689\ x\ 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\| A \|_{\infty} = 15.933.666 \qquad \left\| A^{-1} \right\|_{\infty} = 0.45115$$

K (A)= 7272

K(A) > 1000

Matriz mal condicionada

Ejemplo 4 : Se define la matriz de Hilbert como:

$$H^{n}_{i\,j} = \frac{1}{i + j - 1} \qquad i = 1\ ;\ldots\ldots\ldots\ldots n\ ;\quad j = 1,\ldots\ldots\ldots n$$

Esta matriz es mal condicionada, estudiaremos el ejemplo 4 x 4, que está dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0.500000 & 0.33333 & 0.250000 \\ 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 \\ 0.25000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 \end{bmatrix}$$

Calcularemos su número de condición $K(H) = \|H\|_\infty \left\|H^{-1}\right\|_\infty$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 15.999908 & -119.999248 & 239.998535 & -139.999146 \\ -119.999245 & 1199.945234 & -2699.991455 & 1679.995605 \\ 239.998474 & -2699.991699 & 6479.986816 & -4199.994141 \\ -139.999115 & 1679.995728 & -4199.994841 & 2799.997803 \end{bmatrix}$$

$\|H\|_\infty = 2.083333$ $\qquad\qquad$ $\left\|H^{-1}\right\|_\infty = 13619.971130$

$$K(H) = 28374.941406$$

que es mayor que 1000 por lo que debería presentar un mal comportamiento.

## EJERCICIOS

1. Resuelva aplicando Jacobi y Gauss-Seidel los siguientes sistemas de ecuaciones. Usa $\mathcal{E} = 10^{-2}$ y un número fijo de iteraciones.

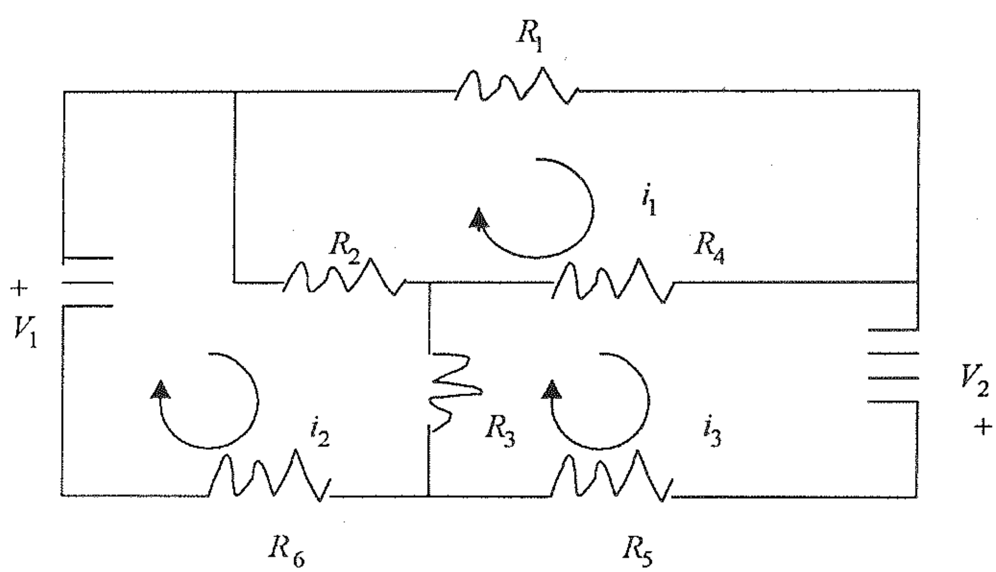
a) $$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & =-1 \\ 3x_1 & +3x_2 & +9x_3 & =0 \\ 3x_1 & +3x_2 & +5x_3 & =4 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & & =-11 \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & =-11 \\ 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & =\ \ 6 \\ -x_1 & -11x_2 & -x_3 & +3x_4 & =\ \ 25 \end{array}$$

Respuesta: $[-0.65, -1.75, 1.89]^T$

$[-2.85.666, -87.777, 1414.4, 706.443]^T$

2. Considere el circuito de la figura:



La ecuación asociada es:

$$\begin{array}{cccc|}
(R_1+R_2+R_4)i_1 & -R_2 i_2 & -R_4 i_3 & =0 \\
-R_2 i_1 & +(R_2+R_3+R_6)i_2 & -R_3 i_3 & =V_1 \\
-R_4 i_1 & +R_3 i_2 & +(R_3+R_4+R_4)i_3 & =V_2 \\ \hline
\end{array}$$

a) Determine la solución para $R_1=R_2=R_3=1,\ R_4=R_5=R_6=2$ y $V_1=V_2=1$ por el método de Jacobi.

b) Haga el problema por Gauss-Seidel.

Respuesta: $[\,0.3137, 0.4314, 0.4118]$

3. Para el sistema.

$$\begin{array}{cccc|}
4x_1 & -x_2 & & =2 \\
-x_1 & +4x_2 & -x_3 & =6 \\
 & -x_2 & +4x_3 & =2 \\ \hline
\end{array}$$

a) Determine $T_j\ y\ T_G$

b) Calcule $\rho(T_j)\ y\ \rho(T_G)$ analiza el resultado.

c) Calcule cuatro iteraciones por Jacobi y Gauss-Seidel.

Respuesta: solución exacta $(1,2,1)^T$

4. Demuestre que si $A$ es estrictamente dominante diagonalmente, entonces $\|T_j\|<1$

5. Resuelva el sistema $Ax=b$ exactamente si

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b=\begin{bmatrix}-13\\ -8\end{bmatrix}$$

a) Muestre que $A$ es positiva definida.

b) Use la iteración de Gauss Seidel comenzando con $x^0 = [0,0]^T$ para obtener $x^1, \ldots\ldots\ldots, x^4$.

c) Repitalo con $x^0 = \begin{bmatrix} 5000 \\ 5000 \end{bmatrix}$ que puede decir de los resultados obtenidos en a) y c).

d) Obtenga $K(A)$

6. Resuelva el ejercicio 1 usando el método SOR con $w = 1.2$

7. Demostrar que $T_w = (D - wL)^{-1}\,[(1-w)D + wU]$

8. Dados los sistemas:

a) $\begin{array}{rrrl} 10x_1 & -x_2 & & = 9 \\ -x_1 & +10x_2 & -2x_3 & = 7 \\ & -2x_2 & +10x_3 & = 6 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrrl} 4x_1 & -2x_2 & & & = 0 \\ -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & & = 2 \\ & -x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = 3 \\ & & 2x_3 & +3x_4 & = -2 \end{array}$

Calcule el $w$ óptimo y resuélvalos por el método SOR.

Respuesta: $(0.9957, 0.9578, 0.7915)^T\ w = 1.012$

$(0.5034, 1.001, 2.0011, -20004)^T\ w = 1.8691$

9. El ejercicio siguiente proporciona un ejemplo que el vector residual $r$ no es un valor confiable en la exactitud de la solución cuando $A$ está severamente mal condicionada.

a) Verificar que $\bar{x} = [1, -1]^T$ es la solución exacta de:

$$\begin{bmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{bmatrix}$$

b) Obtener los valores de $r$ para $\bar{x} = [0.999, -1.001]^T$ (exacta) y $\bar{x} = [0.341, -0.087]^T$ (muy inexacta) ¿Eran estos resultados previstos?

c) Halle el $\det A$ y las pendientes de las gráficas de las dos ecuaciones. ¿Qué puedes decir, basado en los resultados, acerca del condicionamiento de la matriz de las coeficientes?.

10. Calcular el número de condición de las siguientes matrices, relativos a $\|\circ\|_\infty$.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.000 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{bmatrix}$

Respuesta: 60.002

339.866

11. Demuestre que si B es singular, entonces:

$$\frac{1}{K(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$$

Ayuda: Existe un vector $x \neq 0$, con $\|x\| = 1$, tal que $Bx = 0$. Derive la estimación usando $\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$

12. Encuentre el número de condición de las matrices del ejercicio 8.

13. Refinamiento iterativo. Si $\bar{x}$ es una solución del sistema $Ax = b$, $r = A\bar{x} - b$.

La solución al sistema $\bar{x}$ puede ser refinada por la aproximación : $x = \bar{x} - y$

Donde $y$ es la solución al sistema: $Ay = r$

a) Haga un algoritmo para el refinamiento iterativo.
b) Aplíquelo al ejercicio 6 del capítulo I usando eliminación gaussiana.
c) $LU$ descomposición.

14. Resuelva los sistemas lineales dados en el Ejercicio 1, usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial para calcular $\bar{x}$ con 3 dígitos significativos. Vuelve a usar descomposición $LU$ para realizar un mejoramiento iterativo de $\bar{x}$ obtenido.

15. Resuelva el sistema del ejemplo motivacional 1 del Capítulo II aplicando Gauss-Seidel.

Respuesta: En la iteración 9

$$T_1 = 77{,}76 \ ; \ T_2 = 110.66 \ ; \ T_3 = 250{,}62$$

# CAPITULO IV

## VALORES Y VECTORES PROPIOS

4.1. Preliminares.

En muchos problemas de aplicación como, teoría dinámica de oscilaciones, máximos y mínimos condicionados, resolución de ecuaciones operacionales y otros, la determinación de valores y vectores propios son indispensable para su solución. Nuestro objetivo en este capítulo es analizar los diferentes métodos numéricos utilizados en la determinación de valores y vectores propios.

Definición 1: Sea $A$ una matriz $n \times n$, con valores reales, se dice que $\lambda$, es un valor propio (característico) asociado a la matriz $A$, si existe un vector $v \in R^n$, no nulo, tal que: $A\,v = \lambda\,v$

Definición 2: $v$ se dice vector propio (característico) asociado al valor propio $\lambda$.

Para determinar $\lambda$ es necesario determinar las raíces del polinomio: $\det(A - I\lambda)$, en efecto:

$$Ax = \lambda\,x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

De esta manera tenemos un sistema de $n$ ecuaciones lineales homogénea con $n$ incógnitas:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \quad a_{23}\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ & \\ & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tendrá una solución no nula si solo si $\det(A - \lambda I) = 0$

Definición 3: El desarrollo de $\det(A - \lambda I)$ será un polinomio de la forma:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} \quad - p_{n-1}\lambda - p_n\right]$$

que corresponde al polinomio característico de $A$, luego:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad - p_{n-1}\lambda - p_n = 0$$

Las raíces de esta ecuación serán los valores propios, no necesariamente todos diferentes entre si.

Si $x$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda$, $kx$ con $k \neq 0$ también es un vector propio asociado a $\lambda$.

Se puede demostrar que el número de vectores propios linealmente independiente asociados a un valor propio $\lambda$, no excede la multiplicidad de $\lambda$.

Ejemplo 1 : Determinemos los valores y vectores propios de la matriz.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)\,x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\,(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$$

polinomio característico, de donde: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=1$; $\lambda_3=-1$
Ecuación que tiene una raíz doble $\lambda_1=\lambda_2=1$ , luego podremos encontrar 1 ó 2 vectores linealmente independiente asociados con este valor $\lambda$.

Vectores propios.

Para $\lambda_1=\lambda_2=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\lambda$ es de multiplicidad 2 puede tener 1 ó 2 vectores independiente, en este caso existe sólo uno.

$$x_2 = x_1$$

$$x_3 = -x_1$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en general } k\,x = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad k \neq 0$$

es solución:

$\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -x_1$$
$$x_3 = -x_1$$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector solución y $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, con $k \neq 0$ es solución.

Ejemplo 2: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficiente constante.

Sea

$$y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}y_n$$

$$y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}y_n$$

..............................................

..............................................

$$y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}y_n$$

donde $y_i' = \dfrac{dy_i}{dt}$ ; $i = 1, \ldots\ldots\ldots, n$

$t$ ; variable independiente.

$y_i$ ; variables dependientes.

$a_{ij}$ ; constante

Definamos:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \\ \\ \\ y_n' \end{bmatrix} = Y'$$

y anotando:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \\ \\ y_n \end{bmatrix} \; : \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tendremos:

$$\frac{dY}{dt} = AY \Rightarrow Y' = AY$$

Una ecuación diferencial de la forma $\dfrac{dY}{dt} = \lambda Y$ tiene solución de la forma $y = ce^{\lambda t}$ luego la solución al sistema $\dfrac{dY}{dt} = AY$ debería ser una combinación lineal de soluciones de esa forma.

$$Y = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda t} \\ c_2\, e^{\lambda t} \\ \\ \\ c_n\, e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \\ \\ c_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = c\, e^{\lambda t}$$

luego :

$$\frac{dY}{dt} = Y' = c\,\lambda e^{\lambda t}$$

Reemplazando en : $Y' = AY$ se tiene

$$\lambda c e^{\lambda t} = A c e^{\lambda t}$$

$$(A - \lambda I) c e^{\lambda t} = 0$$

De esta última ecuación obtenemos los $n$ valores característicos $\lambda$ de $A$, para los cuales el sistema tiene solución.

Ejemplo 3: Resolvamos

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2 + y_3$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_1 - y_2 + y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = 4y_1 - y_2 - y_3$$

Sujeto a las condiciones iniciales.

$y_1(0) = 5$ ; $y_2(0) = 1$ ; $y_3(0) = 30$

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad t = 0$$

En forma matricial tendremos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

$$AY = Y'$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ ; $\lambda_2 = 3$ ; $\lambda_3 = -2$

Los vectores propios son, para:

$$\lambda_1 = 1 \qquad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \qquad c_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Determina los valores y vectores propios encontrados.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} k_1 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k_2 e^{3t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 21 \end{pmatrix} k_3 e^{-2t}$$

Si $t = 0$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = -2 \;;\; k_2 = 11 \;;\; k_3 = 1$$

Resuélvalo en detalle.

La solución es:

$$y_1 = -2e^t + 11e^{3t} - 4e^{-2t}$$

$$y_2 = -4e^t + 5e^{-2t}$$

$$y_3 = -2e^t + 11e^{3t} + 21e^{-2t}$$

Estudiaremos algunos métodos para determinar valores propios de una matriz.

## 4.2. **Método de Leverrier – Faddeev.**

Podemos observar que la traza de $A$ corresponde al coeficiente del polinomio característico $p_1$ de $A$, los otros coeficientes $p$ se pueden obtener en forma inductiva, en efecto:

$$A_1 = A \Rightarrow p_1 = tr(A_1) \Rightarrow B_1 = A_1 - p_1 I$$

$$A_2 = AB_1 \Rightarrow p_2 = \frac{tr(A_2)}{2} \Rightarrow B_2 = A_2 - p_2 I$$

$$A_3 = AB_2 \Rightarrow p_3 = \frac{tr(A_3)}{3} \Rightarrow B_3 = A_3 - p_3 I$$

$$\vdots$$

$$A_n = AB_{n-1} \Rightarrow p_n = \frac{tr(A_n)}{n}$$

Ahora tenemos: $\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots - p_n = 0$

Para resolver esta ecuación existen varios métodos iterativos como por ejemplo, de la secante, punto fijo, Newton-Raphson, que nos permitirá determinar los valores propios. Investiga alguno de ellos.

Ejemplo 1 : Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow tr\,(A_1) = 3 = p_1$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 4 & -7 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

donde $B_1 = A_1 - 3I$ ; $p_2 = \frac{1}{2}\, tr\,(A_2) = -5$

$$A_3 = AB_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \frac{1}{3}\, tr\,(A_3) = 12$$

La ecuación característica : $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5\lambda + 12 = 0$

Resolviendo encontramos los valores propios, para lo cual, debemos aplicar un método de resolución de ecuaciones no lineales por ejemplo Newton-Raphson.

Investiga en la bibliografía y resuelve la ecuación cúbica.

**Algoritmo de Leverrier – Faddeev.**

Entrada : dimensión $n$; matriz $A$
Salida : $p_k$ coeficientes de ecuación característica
Paso 1 : Hacer $A = A_1$
Paso 2 : $k = 1$
formar $p_k^{'} = tr(A_k)$
Calcular $p_k = \frac{1}{k} p_k^{'}$
Paso 3 : Formar $B_k = A_k - p_k I$
Paso 4 : Si $k \leq n-1$, si no pasar 6
Formar $A_{k+1} = AB_k$
Paso 5 : Hacer $k = k+1$
Paso 6 : Hacer $p_n$ primer elemento de $A_n$
Paso 7 : Fin

## 4.3. **Método de la Potencia.**

Sean los valores propios de una matriz $n \, x \, n$ dados en forma decreciente :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq .........\geq |\lambda_n|$$

Los valores que tengan la máxima y la mínima magnitud se llamaran respectivamente dominante y menos dominante. El método de la potencia nos permite hallar el valor propio dominante.

Se tienen $x_1, ............. x_n$ vectores propios de una matriz $A$ y $\lambda_1, \lambda_2, ........\lambda_n$ sus valores propios.

Sea v una combinación lineal no nula:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad / . \; A$$

$$Av = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ax_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i x_i)$$

$$A^2 v = A(Av) = A\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i x_i \quad = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i Ax_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^2 \; x_i$$

Generalizando:

$$A^k v = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \lambda_i^k x_i$$

Si $\alpha_1 \neq 0$ y como $\lambda_1$ es dominante se tiene:

$$A^k v = \alpha_1 \; \lambda_1^k x_1 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_i \lambda_i^k x_i \quad / \bullet \; \frac{1}{\lambda_1^k}$$

$$\frac{A^k v}{\lambda_1^k} = \alpha_1 x_1 + \sum_{i=n}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i$$

Si $k \to \infty \; \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$

De donde: $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(A^k v\right)i}{\left(A^{k-1} v\right)i} = \lambda_1$ el subíndice $i$ indica la $i$-ésima componente del vector.

En cada iteración normalizaremos el vector $A^k v$, es decir: $v_{k+1} = \frac{Av_k}{\left\| Av_k \right\|_\infty}$

La convergencia depende de la elección de $v_0$, si está cerca o lejos de la solución.

Ejemplo 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$v_0 = [1,0,1]^T$

$$Av_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ; \quad \alpha_0 = 2$$

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_0}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 \\ -1.000 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ; \quad \lambda_1 = \frac{(Av_0)_1}{(v_0)_1} = \frac{1}{1} = 1$$

Iteración 2:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ -5.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \qquad ; \quad \alpha_1 = 5$$

$$Av_2 = \frac{1}{\alpha_1}\begin{bmatrix} 1.5000 \\ -5.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3000 \\ -1.0000 \\ 0.2000 \end{bmatrix} \qquad ; \quad \lambda_2 = \frac{(Av_1)_1}{(v_1)_1} = \frac{1.500}{0.500} = 3$$

Iteración 3:

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 1.3000 \\ -5.0000 \\ 1.2000 \end{bmatrix} \qquad ; \quad \alpha_2 = 5$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0.2600 \\ -1.0000 \\ 0.2400 \end{bmatrix} \qquad ; \quad \lambda_3 = \frac{(Av_2)_1}{(v_2)_1} = \frac{1.3000}{0.3000} = 4.333$$

Iteración 4 :

$$Av_3 = \begin{bmatrix} 1.2600 \\ -5.0000 \\ 1.2400 \end{bmatrix} \qquad ; \quad \alpha_3 = 5$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0.2520 \\ -1.0000 \\ 0.2480 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda_4 = \frac{(Av_3)_1}{(v_3)_1} = \frac{1.2600}{0.2600} = 4.8461$$

Iteración 5:

$$Av_4 = \begin{bmatrix} 1.2520 \\ -5.0000 \\ 1.2480 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha_4 = 5$$

$$v_5 = \begin{bmatrix} 0.2504 \\ -1.0000 \\ 0.2496 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda_5 = \frac{(Av_4)_1}{(v_4)_1} = \frac{1.2520}{0.2520} = 4.96825$$

Iteración 6:

$$Av_5 = \begin{bmatrix} 1.2504 \\ -5.0000 \\ 1.2496 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha_5 = 5$$

$$v_6 = \begin{bmatrix} 0.2501 \\ -1.0000 \\ 0.2499 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda_6 = \frac{(Av_5)_1}{(v_5)_1} = \frac{1.25040}{0.2504} = 4.9027$$

Iteración 7:

$$Av_6 = \begin{bmatrix} 1.2501 \\ -5.0000 \\ 1.2499 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha_6 = 5$$

$$v_7 = \begin{bmatrix} 0.2500 \\ -1.0000 \\ 0.2500 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda_7 = \frac{(Av_6)_1}{(v_6)_1} = \frac{1.2501}{0.2501} = 4.9984$$

De las iteraciones realizadas podemos observar que el valor propio dominante tiende $\lambda = 5$ y el vector correspondiente a $v = [\ 1.25\ ;\ -5.00\ ; 125]^T$

**Algoritmo Método de la Potencia**

Entrada : Dimensión $n, A$ matriz, vector inicial $v_0$ normalizado, $\varepsilon$ término de corte.
Salida : $\lambda$ valores propios $v$ vectores propios

Paso 1 : $k = 1$; $\lambda^0 = 0$
Paso 2 : Calcular $A\, v_{k-1}$
Paso 3 : Hacer $\alpha_{k-1} = \|A\, v_{k-1}\|_\infty = \max\limits_{1<i<n} \| (A\, v_{k-1})\, i \|_\infty$
Paso 4 : $\lambda^k = \dfrac{(A v_{k-1})_1}{(v_{k-1})_1}$
Paso 5 : Si $|\lambda^k - \lambda^{k-1}| < \varepsilon$ parar , si no

Paso 6 : $v_k = \dfrac{A v_{k-1}}{B_{k-1}}$

Paso 7 : $k = k + 1$

## 4.4. **Método de la potencia inverso**

Si $A$ es no singular, como $A^{-1} x_{k-1}$ es la solución del sistema $Ay = x_{k-1}$ podemos aplicar el método de la potencia sin calcular $A^{-1}$, en efecto:

Resolvemos el sistema $Ay = x_{k-1}$ por algún método ya estudiado, puede ser una descomposición $LU$ de $A$, así para encontrar y, utilizamos sustitución progresiva y regresiva.

Para $y_k$; hacemos $B_k$ = una componente dominante de $y_k$ ; $x_k = \dfrac{1}{B_k} y_k$

Por otra parte si $v$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda$ de una matriz $A$, entonces $v$ y $\dfrac{1}{\lambda}$ son un vector y valor propio de la matriz $A^{-1}$ .

Luego la convergencia que esperamos es:

$\beta_k \to \dfrac{1}{\lambda_n}$ y $x_k \to x_n$ donde $v_n$ es el vector propio correspondiente al valor propio menos dominante $\lambda$ de $A$.

Ejemplo 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad x_0 = [\,1,0,0]^T$$

Iteración 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};\ \beta_1 = 3 \qquad yx_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6667 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$$

Iteración 2.

$$AY = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6667 \\ 0.3333 \end{bmatrix} \Rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 4.1667 \\ 3.1667 \\ 3.7917 \end{bmatrix};\ \beta_2 = 4.16667 \quad yx_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.7600 \\ 0.4300 \end{bmatrix}$$

Iteración 3.

$$\beta_3 = 4.1900 \ ; \ x_3 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.7613 \\ 0.4320 \end{bmatrix}$$

Iteración 4.

$$\beta_4 = 4.1933 \ ; \ x_4 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.7615 \\ 0.4323 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\lambda \approx \dfrac{1}{4.1933} = 0.2384$ y $x = [\,1.000,\ 0.7615\,,\ 0.4323\,]^T$

Haga dos iteraciones más para confirmar el resultado.

**Algoritmo método de la Potencia inverso.**

Entrada : Dimensiones, $A$ matriz , $x_0$ vector inicial, $\mathcal{E}$ término de corte.
Salida : $\beta$ valores propios $x$ vectores propios.
Paso 1: $k=1$
Paso 2: Resolver sistema $Ay_k = x_{k-1}$
Paso 3: Hacer $\beta_k$ =componente dominante de $Y_k$
Paso 4: $\left\|\beta_k - \beta_{k-1}\right\| < \mathcal{E}$ si no parar
Paso 5: Hacer $x_k = \dfrac{1}{\beta_k} Y_k$
Paso 6: Tomar $k = k+1$

## 4.5. **Similaridad, Ortoganilidad y Factorización** $QR$.

Definición 1 : Dos matrices $A$ y $B$ son similares si y sólo si existe una matriz $P$ tal que:

$$B = PAP^{-1}$$

Teorema 1 : Dos matrices similares tienen los mismos valores propios.

Existen métodos que se basan en que a toda matriz $A$ que deseemos calcular sus valores propios, efectuemos transformaciones de similitud de manera que obtengamos una matriz $B$ similar a $A$, para la cual sea más fácil calcular sus valores propios.

En el caso que $A$ sea una matriz real simétrica, entonces $B = T^T AT$ también lo es.

Esta igualdad nos dice, que es conveniente elegir $T^T = T^{-1}$.

Definición 2 : Una matriz $Q$ es ortogonal si y sólo si : $Q^T = Q^{-1}$
Y una transformación de la matriz simétrica $A$ y $B = Q\,A\,Q^T$ se llama transformación de similitud ortogonal, $A$ y $B$ se dicen ortogonalmente similares.

Teorema 2 : Toda matriz real simétrica es ortogonalmente similar a una matriz diagonal.

Ejemplo 1 : Un ejemplo de una matriz ortogonal es la matriz de rotación.

$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\ sen\ \theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\left(R(\theta)\right)^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & sen\theta\\ -sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=R(-\theta)$$

Esta matriz permite rotar un vector $x$ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del origen en $\theta$ radianes y $R(-\theta)$ regresa $x$ a su posición original.

Además puedes comprobar que $R(\theta)\bullet\left(R(\theta)\right)^T=I$

Definición 3 : Si un vector $x$ tiene una componente distinto de cero, digamos $x_i$, si el producto de $Qx$ hace la componente $x_i=0$ se dice que $Q$ aniquila a $x_i$.

Ejemplo 2 : Consideremos

$$Q=\begin{bmatrix}\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} & \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\\ \dfrac{-a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} & \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\end{bmatrix} \quad \text{se tiene } \quad Q\bullet\begin{bmatrix}a_1\\ \\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{a_1^2+a_2^2}\\ \\ 0\end{bmatrix}$$

Si $a_2\neq 0$ , $Q$ aniquila $a_2$

Además la matriz $Q$ puede usarse para hacer triangular superior una matriz de 2 x 2.

Si $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 8\end{bmatrix}$ $\qquad Q=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ $\qquad QA=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 0 & 7\end{bmatrix}$

Un problema importante de resolver es factorizar una matriz $A$ en la forma $A=QR$ donde $Q$ es una matriz ortogonal y $R$ es matriz triangular superior.

La mayoría de las matrices tienen muchas factorizaciones $QR$, que es posible obtener usando:

- Rotaciones de Givens
- Reflexiones aniquiladores de Householder
- El proceso de ortoganilización de Gramm Schmidt

Esta factorización nos permite resolver:

- Sistemas de ecuaciones como:

$Ax = b$ ; haciendo $A = QR$ obteniendo:

$$QRx = b \;/\bullet\, Q^T \quad ya \;\; que \quad Q^T = Q^{-1}$$
$$Rx = Q^T b$$

Usando sustitución regresiva obtenemos el valor de x.

- Determinación de valores y vectores propios.
-

## 4.6. **Ortogonalización de Gramm-Schmidt**

Teorema 1: Sea $A \in M_n(R)$ no singular, entonces existe $Q$ ortogonal y $R$ matriz triangular superior no singular tal que $A = QR$.

Demostración : Sean $a^1, a^2, \ldots\ldots a^n$ las columnas de $A$ que son linealmente independientes, por lo tanto, forman una base de $R^n$, a partir de esta base construiremos una base ortogonal de $R^n$.

$$q^1 = \frac{1}{r_{11}} a^1 \qquad ; \; r_{11} = \left\| a^1 \right\|_2$$

$$q^j = \frac{1}{r_{jj}} \left( a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q^i \right)$$

en que:

$$r_{ij} = \left\langle a^j \; , \; q^i \right\rangle \qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots, j-1$$

$$r_{jj} = \left\| a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} \; q^i \right\|_2$$

de donde obtenemos:

$$a_1 = r_{11}\, q^1$$

$$a_j = r_{jj}\, q^j + \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij}\, q^i \qquad j = 2,\ldots\ldots\ldots,n$$

$$A = \left[a^1,\ a^2,\ldots\ldots\ldots\ldots,a^n\right] = \left[q^1,\ldots\ldots\ldots,q^n\right]\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{2n} \\ & & \\ 0 & & 0 r_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 : Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \left\| a^1 \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ ; $q_1$ vector ortogonal $\left\| q_1 \right\|_2 = 1$

$$r_{12} = \left\langle a^2, q^1 \right\rangle = (0,1,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r_{13} = \left\langle a^3, q^1 \right\rangle = (1,0,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_1 = a^2 - r_{12}\, q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = \left\| t_1 \right\|_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$q^3 = \frac{t_1}{r_{22}} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad q_2 \text{ vector ortonormal } \left\|q^2\right\|_2 = 1$$

$$r_{23} = \left\langle a^3, q^2 \right\rangle = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$t_2 = a^3 - r_{13}\, q^1 - r_{23}\, q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

$$r_{23} = \| t_2 \|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$q^3 = \frac{t_2}{r_{23}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$ $q^3$ vector ortonormal $\| q^3 \|_2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Comprueba el resultado. Si $b = (1, 1, 2)^T$ aplica la factorización para resolver el sistema $Ax = b$

**Algoritmo** $QR$

Entrada : Dimensión $n$, matriz $A$

Salida : $q^i$ columnas de $Q$

$r_{ij}$ elementos de $R$

Paso 1 : $q_1 = \dfrac{1}{r_{11}}$; $r_{11} = \| a^1 \|_2$

Paso 2 : $i = 1$

$j = i+1, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$

$r_{ij} = \langle a^j , q^i \rangle$

Paso 3 : Calcular

$$t_i = a^j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij}\, q^i$$

Paso 4 : Hacer

$$r_{ji} = \| t_i \|_2$$

Paso 5 : $i < n$ si no parar

Paso 6 : $i = i+1$

La factorización $QR$ la podemos realizar también en forma eficiente utilizando matrices ortogonales que aniquilen elementos de un vector dado en el espacio $n$.

Este procedimiento lo podemos efectuar por medio de reflexiones Hauseholder $Hn$.

Definición 1: Las reflexiones de Hauseholder $Hn$ se definen por:

$H_n = I_n - 2u\ u^T$, donde $u$ es un vector unitario en el espacio $n$, es decir, $\| u \|^2 = u\ u^T = 1$ y es ortogonal, en efecto:

$H^T = H$ demuéstralo y

$$H \quad H^T = \left(I_n \; 2u \; u^T\right)\left(I - 2u \; u^T\right) = I$$ completa la demostración

La reflexión de Householder $H_j$ que aniquila todas las componentes por debajo de $a_j$ de un vector dado $a$, la podemos construir como:

Sea $\eta = \sqrt{a_j^2 + \dots\dots\dots + a_n^2} \neq 0$ $\quad y \quad sig(a_j) = \pm$, entonces:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2\eta \; \left(\left|a_j\right| + \eta\right)}} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ 0 \\ a_j \pm n \\ a_j + 1 \\ \\ \\ a_n \end{bmatrix} \Rightarrow H_j = H_n \;\; satisface \;\; H_j = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_j \\ \\ \\ 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ -(\pm) \;\; \eta \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 : Hallaremos las reflexiones de Householder que aniquilen las componentes indicadas del vector $a$:

a) $a = [-1, -2, 2\;]$ aniquile los elementos bajo $a_1 = -1$

b) $a = [\;2, 3, -4\;]$ aniquile los elementos bajo $a_2 = 3$

$$j = 1 \;\; signo \;\; (a_1) = - \quad y \qquad \eta = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{6+18}} \bullet \begin{bmatrix} -1-3 \\ -2 \\ +2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$H_n = I_3 - 2u \; u^T = I_3 - 2 \bullet \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{24}} [\,-4, -2, 2\;] =$$

$$= I_3 - \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 16 & 8 & -8 \\ 8 & 4 & -4 \\ -8 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & -8 & 8 \\ -8 & 8 & 4 \\ +8 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & -8 & 8 \\ -8 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 36 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$i = 3 \quad sg\,(a_j) = +$ y $\quad \eta = \sqrt{9+16} = 5$

$$u = \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I - 2\frac{1}{4\sqrt{5}} \bullet \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}[\,0, 8, -4\,] = I - \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & -32 \\ 0 & -32 & 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 32 \\ 0 & 32 & 24 \end{bmatrix}$$

$$H_2 a = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 32 \\ 0 & 32 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 80 \\ -200 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para realizar la factorización $QR$ en una matriz $A$ podemos usar matrices aniquiladoras de acuerdo al siguiente algoritmo:

$A_0 = A$

para $j = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$ $\quad p_j =$ matriz ortogonal que aniquila todos los elementos debajo de la diagonal de $col\ j\ A_{j-1}$, pero no altera los ceros de las aniquilaciones anteriores.

$A_j = p_j A_{j-1}$

$A_{n-1} = (p_{n-1}\ldots\ldots\ldots p_2\ p_1)A$ $\quad$ es matriz triangular inferior y $p_{n-1}\ldots\ldots\ldots\ldots p_1$ es un producto de matrices ortogonales que es ortogonal.

Luego $\quad A = QR$ donde $R = A_{n-1}$ y

$$Q = (p_{n-1}\ldots\ldots\ldots p_2\ p_1)^T = p_1^T\ p_2^T\ldots\ldots\ldots p_{n-1}^T$$

como matriz $p_j$ podemos usar la matriz Householder $p_j = H_j$

Ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 14 & 1 \\ 2 & -14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$sig = - \,;\ \eta = \sqrt{1+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{24}}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = I - 2\frac{1}{\sqrt{24}} \bullet \frac{1}{\sqrt{24}}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}[-4.\ 2,\ 2\ ] = I - \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -16 & 8 & -8 \\ -8 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = H_1 A_0 = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 14 & 1 \\ 2 & -14 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 36 & -12 & 12 \\ 0 & 192 & 24 \\ 0 & -144 & 36 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 16 & 2 \\ 0 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

$$sig = + \qquad \eta = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$$

$$H_2 = I - 2 \bullet \frac{1}{\sqrt{10}} \bullet \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} [0, 3, -1] = I - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$H_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = H_2\ A_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 16 & 2 \\ 0 & -12 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 & -5 & 5 \\ 0 & -100 & 1 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -100 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -100 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

$$Q = H_1 H_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -4 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & 8 \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} -20 & -8 & 56 \\ 40 & -44 & 8 \\ 40 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

Comprueba que $Q \cdot Q^T = I$ y $A = QR$

## 4.7. **Método** $QR$

Este método utiliza la propiedad "que los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal".

El algoritmo que es iterativo parte con $A_0 = A$ y crea una secuencia de matrices similares a $A$ que convergen a una matriz triangular cuyos valores propios son los de $A$

Si hacemos:

$A_0 = A$, donde $A = QR$

considerando la transformación de similitud se tiene $A_1 = Q\,A\,Q$ procediendo inductivamente se tiene:

$$A_{k+1} = Q_k^T\; A_k\, Q_k$$

como $A_k = Q_k\, R_k$ , entonces :

$$A_{k+1} = R_k\, Q_k$$

Es posible demostrar que la matriz $A_k$ tiende a una matriz triangular superior, cuando $k$ tiende a infinito, en cuya diagonal aparecen los valores propios en orden decreciente de magnitud.

Ejemplo 1 : Sea

$$A = \begin{bmatrix} -40.1107 & 9.6 & -7.2 \\ -5 & -24-1107 & -3 \\ 0 & -25 & -3.1107 \end{bmatrix}$$

Haciendo $A_0 = A$ una factorización $QR$ de $A_0$ es:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.9923 & 0.0877 & 0.0873 \\ -0.1237 & -0.7033 & -0.7001 \\ 0 & -0.7055 & 0.7087 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40.421 & -6.5438 & 7.5158 \\ 0 & 35.4354 & 3.6732 \\ 0 & 0 & -0.7326 \end{bmatrix} = Q_0 R_0$$

$$A_1 = R_0 Q_0 = \begin{bmatrix} -39.3012 & 2.8430 & 13.4354 \\ -4.3833 & -27.5116 & -22-2048 \\ 0 & 0.5169 & -0.5192 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = Q_1 R_1 = \begin{bmatrix} -0.9938 & 0.1108 & -0.0021 \\ -0.1108 & -0.9937 & 0.0186 \\ 0 & 0.0187 & 0.9998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39.5449 & 0.2240 & -10.8912 \\ 0 & 27.6621 & 23.5434 \\ 0 & 0 & -0.9593 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} -39.3261 & 3.9565 & -10.9671 \\ -3.0661 & -27.0469 & 24.0529 \\ 0 & -0.0179 & -0.9591 \end{bmatrix}$$

De la misma forma tenemos:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -39.1892 & 4.8967 & 9.0675 \\ -2.1199 & -27.1738 & -24.8499 \\ 0 & 0.0006 & -0.9754 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal convergen a :

$\lambda_1 = -38.4253$ $\lambda_2 = -28.1107$ $\lambda_3 = -0.9761$

## EJERCICIOS

1. Encuentre los valores propios por el método de Leverrier-Faddeev. Determine los vectores propios, de las matrices del ejercicio 2.

2. Use el método de la potencia para calcular el valor propio dominante y el correspondiente vector propio.

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Respuesta: Valor propio vector propio

$A = 9.60555$ $(1.0,\ 0.6056,\ -0.3944)$

$B = 8.86988$ $(-0.6043,\ 1.0,\ 0.1509)$

3. Aplique el programa anterior a las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Usar $x^0 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$

Respuesta: Valor propio vector propio

$A : 6$ $(1,\ 1,\ 0,\ 1)$

$B : 4$ $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$

4. Aplique el método de la potencia inverso con $x^0 = [\ 0, 1, 2\ ]^T$ a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Respuesta : $\lambda = 2 \quad v = (1, 0, 1)^T$

5. El método de la potencia inverso podemos modificarlo para encontrar el valor propio más próximo a un escalar $\sigma$ fijo. En efecto:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (\ A - \sigma\ I\ )\ v = (\ \lambda - \sigma\ )\ v$$

donde $\lambda$ es valor propio de $A \Leftrightarrow \lambda - \sigma$ es valor propio de $A - \sigma\ I$ y $v$ un valor propio.

Así si $\lambda_0$ es el valor propio de $A$ más próximo $\sigma$ entonces $\lambda_0$ - $\sigma$ es el valor menos dominante de $A$.

Luego el valor dominante de $(A - \sigma\ I\ )^{-1}$ es $\overline{\lambda_0} = \dfrac{1}{\lambda_0 - \sigma}$

Por lo tanto para calcular el valor propio más próximo a $\sigma$ de $A$ procederemos de la siguiente forma:

1) Hallar el valor propio dominante de $(A - \sigma\ I\ )^{-1}$, $\overline{\lambda_0}$ cuyo vector asociado es $v_0$

2) El valor propio $\lambda$ de $A$ más próximo a $\sigma$ es $\lambda_0 = \dfrac{1}{\overline{\lambda_0}} + \sigma$ y su vector propio es $v_0$.

a) Aplique el método para calcular con $x^0 = [\ 1, 1, 1\ ]^T$ y el valor propio de $A$ más próximo $\sigma = -\dfrac{5}{2}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Respuesta: $\begin{array}{l} \lambda_0 = -3 \\ v_0 = [\ 0, 1, 0]^T \end{array}$

b) Modifica el algoritmo de la potencia inversa y obtiene el algoritmo correspondiente a este método.

6. Cómo están relacionados los valores y vectores característicos de $\alpha A$ con los de $A$.

7. Pruebe que si $A$ es similar a $B$, entonces $\det A = \det B$.

8. Aniquila las segundas componentes de vector $x$ usando la matriz aniquiladora de Householder.

   a) $x = [-5, 12]^T$  b) $x = [12,5]^T$  c) $x = [0,2]^T$

9. a) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

   Haga la factorización $QR$ usando el método de Gramm-Schmith.

   a) Resuelva usando la factorización $QR$ el sistema $Ax = b$ donde $b = [1, 0, 0]^T$

10. Haga la factorización $QR$ de $A$ usando reflexión aniquiladora de Householder.

   a) $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$  b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   d) $A = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

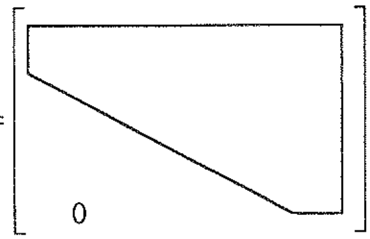
11. Use la factorización $QR$ de $A$ y resuelva los sistemas $Ax = b$.

   a) $b = [-13, 32]^T$  b) $b = [1, 0]^T$

   c) $b = [1, 1]^T$  d) $b = \left[\frac{1}{2}, 0\right]^T$

12. Haga el algoritmo para calcular los valores y vectores propios de $A$ usando el método $QR$.

13. Se define una matriz de Hesseuberg superior, como una matriz que contiene sólo ceros en los componentes debajo de la subdiagonal inferior, es decir, tiene la forma:

$H =$ 


$H = (h_{ij})$ tal que $h_{ij} = 0 \qquad \forall i > j+1$

Dele forma Hussenberg a las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & 1.5 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

14. Use el método de la potencia inverso para determinar los valores propios y vectores propios del ejercicio 13, con $10^{-5}$ de precisión.

Respuesta: $A = 20.19841 \qquad [1, 0.8224536, -0.6527870\, x\, 10^{-2}]^T$

7.99995

-5.198410

$C: 4.999997 \qquad [1, -0.999999, 1, -1]^T$

$3.999999 \qquad [0.9999995, 0.999999, 1, 0.99999]^T$

$8.999987 \qquad [-0.9999992, 0.9999992, 1, -1]^T$

$2.000001 \qquad [-0.9999989, -0.9999985, 0.9999994, 1]^T$

15. Use el algoritmo para determinar los valores propios de las matrices del ejercicio 13, con $10^{-5}$ de precisión.

16. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

a) $y_1' = 4y_1 + 5y_2 \quad ; y_1(0) = 1$

$y_2' = 3y_1 + 2y_2 \quad ; y_2(0) = 0$

b) $y_1' = y_2 \quad ; \quad y_1(1) = 2$

$y_2' = y_1 \quad ; \quad y_2(1) = 1$

Respuesta: $\quad b) \quad y_1(t) = \frac{1}{2}e^{t-1} + \frac{3}{2}e^{1-t}$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}e^{t-1} - \frac{3}{2}e^{1-t}$$

17. Una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n$, con coeficiente constantes tiene la forma $a_0\, y^n + a_1\, y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} y = 0$

La podemos resolver transformándola a un sistema de ecuaciones diferenciales haciendo la sustitución adecuada, por ejemplo si tenemos:

$$a_1\, y'' + a_2\, y' + a_3 y = 0 \qquad / : \; a_1\, (a_1 \neq 0)$$

$$y'' + b_1\, y' + b_{2-} y = 0$$

$y = y_1$

$y' = y_1' = y_2$

$y' = y_2'$

tenemos: $y_1' = y_2$

$y_2' = -b_1 y_2 - \; b_2 y_1$

Resuelve la ecuación : $\quad y''' - 3y'' + 2y = 0$

## BIBLIOGRAFÍA


1) Anthony Ralston
Introducción al Análisis Numérico
Limusa – Wiley, S.A. 1970

2) Sydney Yakowitz, Ferenc Sgidarovszky
An Introduction to numerical Computations
Macmillan Publishing Company 1989

3) Shoichiro Nakamura
Métodos Numéricos Aplicados con Software
Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1992

4) Melvin J. Maron, Robert J. López
Análisis Numérico
Compañía Editorial Continental, S.A. De C.V. 1995

5) W. Allen Smith
Análisis Numérico
Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. 1988