



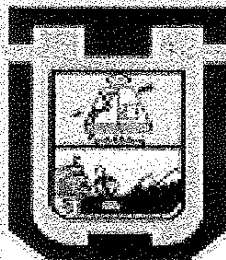
**UNIVERSIDAD DE TARAPACA**

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

**“TOPICOS DE CALCULO: El conjunto de los  
Números Reales, Funciones de una Variable  
Real Sucesiones”**

Profesor: Sra. Marlene Cisternas Riveros  
Sr. Martín Medina Díaz

Arica - Chile  
2001

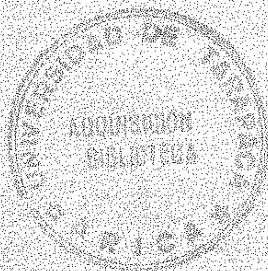


**UNIVERSIDAD DE TARAPACA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**

102465

**“TOPICOS DE CALCULO: El Conjunto de los  
Números Reales, Funciones de una Variable Real,  
Sucesiones”**

**Sra. Marlene Cisternas Riveros.**  
**Sr. Martín Medina Díaz.**



**Arica – Chile**  
**2000**

## SIMBOLOGIA UTILIZADA

|                          |               |
|--------------------------|---------------|
| $\in$                    | pertenece     |
| $\notin$                 | no pertenece  |
| $\forall$                | para todo     |
| $\exists$                | existe        |
| $\nexists$               | no existe     |
| $\Rightarrow$            | implica       |
| $\Leftrightarrow$        | si y sólo si  |
| $\wedge$                 | y             |
| $\vee$                   | o             |
| $\therefore$             | luego         |
| ssi                      | si y sólo si  |
| $\Rightarrow \Leftarrow$ | contradicción |

# INDICE

## INTRODUCCIÓN

### MATERIAS:

Páginas

### CAPITULO I:

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 1.- El Conjunto de los Números Reales.....                    | 1  |
| 1.1.- El Conjunto de los Números Naturales.....               | 1  |
| 1.2.- El Conjunto de los Números Enteros.....                 | 2  |
| 1.3.- El Conjunto de los Números Racionales.....              | 5  |
| 1.4.- El Conjunto de los Números Irracionales.....            | 9  |
| 1.5.- El Conjunto de los Números Reales.....                  | 10 |
| 1.5.1.- Propiedades del Cuerpo de los Reales.....             | 10 |
| 1.5.2.- Orden en IR.....                                      | 12 |
| 1.5.3.- Subconjuntos de IR. Intervalos.....                   | 14 |
| 2.- Valor Absoluto de un Número Real.....                     | 16 |
| 2.1.- Propiedades.....                                        | 17 |
| 3.- Desigualdades e Inecuaciones en IR.....                   | 19 |
| 3.1.- Desigualdades en IR.....                                | 20 |
| 3.2.- Ejercicios.....                                         | 22 |
| 3.3.- Inecuaciones en IR.....                                 | 22 |
| 3.3.1.- Inecuaciones de Primer Grado en una<br>Variable.....  | 22 |
| 3.3.2.- Ejemplos.....                                         | 23 |
| 3.3.3.- Inecuaciones de Segundo Grado en una<br>Variable..... | 24 |
| 3.3.4.- Ejemplos.....                                         | 27 |
| 3.3.5.- Inecuaciones Irracionales.....                        | 32 |
| 3.3.6.- Inecuaciones con Valor Absoluto.....                  | 34 |
| 4.- Axioma del Supremo.....                                   | 39 |
| 4.1.- Definiciones.....                                       | 39 |
| 4.2.- Axioma del Supremo.....                                 | 41 |
| 4.3.- Teoremas.....                                           | 41 |
| 4.4.- Ejercicio.....                                          | 43 |
| 4.5.- Existencia de Raíces Cuadradas.....                     | 44 |
| 5.- Ejercicios.....                                           | 48 |

## **CAPITULO II:**

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 1.- Funciones de una Variable Real.....             | 52  |
| 1.1.- Dominio y Recorrido de una Función.....       | 53  |
| 1.2.- Gráfica de una Función.....                   | 54  |
| 1.3.- Ejemplos.....                                 | 54  |
| 1.4.- Igualdad de Funciones.....                    | 61  |
| 1.5.- Ejemplos.....                                 | 61  |
| 1.6.- Algebra de Funciones.....                     | 62  |
| 1.7.- Ejemplos.....                                 | 63  |
| 1.8.- Clases Especiales de Funciones:               |     |
| 1.8 1.- Función Inyectiva o uno a uno.....          | 66  |
| 1.8 2.- Función Epiyectiva o Sobreyectiva.....      | 70  |
| 1.8 3.- Función Biyectiva.....                      | 71  |
| 1.8 4.- Ejemplos.....                               | 71  |
| 1.9.- Características Gráficas de una Función:      |     |
| 1.9 1.- Funciones Pares e Impares.....              | 76  |
| 1.9 2.- Funciones Acotadas.....                     | 80  |
| 1.9 3.- Funciones Monótonas.....                    | 82  |
| 1.9 4.- Funciones Periódicas.....                   | 86  |
| 2.0.- Funciones Especiales:                         |     |
| 2.0 1.- Función Constante.....                      | 89  |
| 2.0 2.- Función Idéntica.....                       | 89  |
| 2.0 3.- Función Lineal.....                         | 90  |
| 2.0 4.- Función Cuadrática.....                     | 90  |
| 2.0 5.- Función Polinómica.....                     | 94  |
| 2.0 6.- Función Racional.....                       | 94  |
| 2.0 7.- Función Valor Absoluto.....                 | 94  |
| 2.0 8.- Función Escalón Unitario.....               | 95  |
| 2.0 9.- Función Parte Entera.....                   | 95  |
| 2.10.- Funciones Circulares.....                    | 97  |
| 2.11.- Función Característica.....                  | 98  |
| 2.12.- Función Signo.....                           | 98  |
| 2.13.- Función Ex ponencial.....                    | 98  |
| 2.14.- Función Logarítmica.....                     | 99  |
| 2.15.- Ejercicios.....                              | 101 |
| 3.0.- Composición de Funciones.....                 | 105 |
| 3.0 1.- Ejemplos.....                               | 106 |
| 3.0 2.- Propiedades de las Funciones Compuestas.... | 110 |
| 3.0 3.- Ejercicios.....                             | 110 |
| 4.0.- Función Inversa.....                          | 111 |
| 4.0 1.- Teorema.....                                | 113 |
| 4.0 2.- Ejemplos.....                               | 114 |
| 5.0.- Ejercicios.....                               | 117 |

### **CAPITULO III:**

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 1.- Sucesiones.....                                         | 123 |
| 1.10.- Definición.....                                      | 123 |
| 1.11.- Ejemplos.....                                        | 123 |
| 1.12.- Convergencia de Sucesiones.....                      | 124 |
| 1.13.- Ejemplos.....                                        | 127 |
| 1.14.- Definición de Sucesión Acotada.....                  | 132 |
| 1.15.- Teorema.....                                         | 132 |
| 1.16.- Operaciones con Sucesiones.....                      | 133 |
| 1.17.- Teoremas.....                                        | 134 |
| 1.18.- Ejemplos.....                                        | 135 |
| 1.19.- Teoremas.....                                        | 136 |
| 1.20.- Ejemplos.....                                        | 136 |
| 1.21.- Teorema de Acotación.....                            | 137 |
| 1.22.- Teorema.....                                         | 138 |
| 1.23.- Ejemplos.....                                        | 139 |
| 1.24.- Criterio de la Razón.....                            | 140 |
| 1.25.- Sucesiones Monótonas.....                            | 141 |
| 1.251.- Definición.....                                     | 141 |
| 1.252.- Ejemplos.....                                       | 142 |
| 1.253.- Teorema Fundamental de Sucesiones<br>Monótonas..... | 143 |
| 1.254.- Ejemplos.....                                       | 143 |
| 1.26.- El Número e .....                                    | 145 |
| 1.261.- Ejemplos.....                                       | 146 |
| 2.- Ejercicios.....                                         | 147 |
| Bibliografía.....                                           | 150 |

## INTRODUCCIÓN

El material de este libro fue elaborado por los autores, considerando su experiencia en el desarrollo de una serie de cursos sobre teoría y aplicaciones del Cálculo y está destinado principalmente a estudiantes de Cálculo I de la Facultad de Ingeniería y para todos aquellos interesados en el tema.

El objetivo central de esta obra es presentar los conceptos del Cálculo de forma clara y simple, complementados con ejemplos resueltos, de modo que facilite la comprensión de los temas expuestos y finalizando con problemas propuestos. El orden de presentación de los temas está basado en el Programa de Cálculo I de la carrera de Ingeniería Plan Común de la Universidad de Tarapacá, por tal motivo en esta obra se utilizan algunos conceptos que no son explicados en detalle porque o son básicos (los estudiantes los han visto en la enseñanza media) o son estudiados en cursos paralelos a éste como son Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

En el Capítulo I se tratan los sistemas numéricos en general y el sistema de los números reales considerado como un cuerpo conmutativo completamente ordenado. Se tratan desigualdades e inecuaciones, usando intervalos y notación de conjunto.

En el Capítulo II se estudian las funciones y sus gráficas con énfasis en las funciones reales de una variable real y destacando sus propiedades principales como inyectividad, epiyectividad, biyectividad, monotonía, acotamiento, paridad, existencia de inversa, etc., además de la operatoria con funciones.

En el Capítulo III se tratan las sucesiones de números reales, algunas sucesiones especiales, su convergencia, algunos criterios para el cálculo de límite de sucesiones y el teorema fundamental de sucesiones monótonas.

Finalmente, los autores desean expresar su agradecimiento a los académicos del Departamento de Matemática de la Universidad de Tarapacá Sras. Verónica Rey Mas y María Sanhueza Collinao, por la colaboración prestada, como también a la Srta. Sabina Núñez Aldoney, quien transcribió los manuscritos de este texto para llevar a feliz término este libro.

# CAPITULO I

## EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

Se comenzará el estudio con el conjunto de Números Naturales:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots \}.$$

En él se definen dos leyes de composición interna (l.c.i):

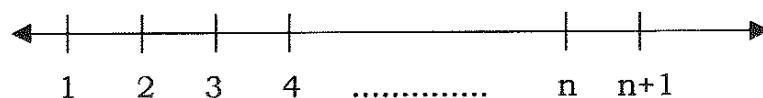
- 1) adición :  $\forall a, b \in \mathbb{N}, (a+b) \in \mathbb{N}$  y
- 2) multiplicación:  $\forall a, b \in \mathbb{N}, (a \cdot b) \in \mathbb{N}$ , usualmente llamadas propiedad de clausura.

Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades: asociatividad, conmutatividad, elemento neutro multiplicativo "1" y distributividad.

Ahora bien, en la ecuación:  $a+x=b$  con  $a, b \in \mathbb{N}$  se ve que ella tiene solución en  $\mathbb{N}$  ssi  $b > a$ .

¿Cuándo  $b$  es mayor que  $a$  en  $\mathbb{N}$ ? Para responder esta pregunta se analiza lo siguiente:

sean  $a, b \in \mathbb{N}$ , se dice que " $b$  es mayor que  $a$ " y se denota como " $b > a$ " cuando exista  $c \in \mathbb{N}$  de modo que  $a+c=b$ . Esto último corresponde a una relación de orden en  $\mathbb{N}$  y se traduce geométricamente en establecer un modelo geométrico para  $\mathbb{N}$ .



El objetivo es resolver la ecuación  $a+x=b$ , cualquiera sean  $a$  y  $b \in \mathbb{IN}$ .

- 1) Si  $a=b$  se tiene  $a+x=a$  que no tiene solución en  $\mathbb{IN}$ , entonces para que tenga solución, se extiende el campo numérico al conjunto:

$\mathbb{IN}_0 = \mathbb{IN} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ . Luego  $a+x=b$  tiene solución ssi  $b \geq a$ .

- 2) Si  $a > b$ , la ecuación  $a+x=b$  no tiene solución en  $\mathbb{IN}_0$ , por lo que se extiende el ámbito numérico al "**Conjunto de los Números Enteros**" cuyo símbolo es  $\mathbb{Z}$ .

Luego se puede caracterizar a  $\mathbb{Z}$  como el conjunto donde la ecuación:

$a+x=b$ , con  $a$  y  $b \in \mathbb{IN}$ , siempre tiene solución. Es decir,

$$\mathbb{Z} = \{x/a+x=b, \forall a, b \in \mathbb{IN}\}.$$

En términos de una descripción por extensión del conjunto  $\mathbb{Z}$ , posee los siguientes elementos:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

El conjunto  $\mathbb{Z}$  se puede expresar como la unión de 3 conjuntos:

$\mathbb{Z}^-$ : Conjunto de los enteros negativos.

$\mathbb{Z}^+$ : Conjunto de los enteros positivos.

$\{0\}$ : Singleton de Cero.

$$\text{Así } \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

#### **OBSERVACIONES:**

1)  $0 \notin \mathbb{Z}^-$  y  $0 \notin \mathbb{Z}^+$ .

2)  $\mathbb{IN} \subset \mathbb{IN}_0$  y  $\mathbb{IN} \subset \mathbb{Z}$ .

## **PROPIEDADES DE LA OPERATORIA EN $\mathbb{Z}$**

En  $\mathbb{Z}$  se definen dos operaciones : adición y multiplicación, que satisfacen las siguientes propiedades.

1.- Adición : i) clausura

ii) Asociatividad

iii) Elemento neutro ( $0 \in \mathbb{Z}$ )

iv) Conmutatividad

v) Elemento Inverso ( $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}$ )

Luego, como la adición cumple las propiedades i), ii), iii), iv) y v), se dice que  $\mathbb{Z}$  con la adición tiene estructura de grupo abeliano, es decir,  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo abeliano.

2.- Multiplicación: i) Clausura

ii) Asociatividad

iii) Posee elemento neutro multiplicativo ( $1 \in \mathbb{Z}$ )

**OBSERVACION:** ¡En  $\mathbb{Z}$  no existen números inversos multiplicativos!

3.- La multiplicación distribuye con respecto a la adición en  $\mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, por tener  $\mathbb{Z}$  con  $+$  y  $\cdot$  las propiedades citadas anteriormente, se dice que  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  tiene estructura de anillo conmutativo con unidad.

## **ALGUNAS CONSECUENCIAS:**

1) El elemento neutro es único (ya sea aditivo o multiplicativo).

2) La ley de cancelación para la adición es válida en  $\mathbb{Z}$ .

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

En efecto:  $a + b = a + c$

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$$

$$(-a + a) + b = (-a + a) + c$$

$$0 + b = 0 + c$$

$$b = c$$

3) Si en  $\mathbb{Z}$  se tiene la ecuación:  $a + x = b$ ;  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$(-a) + (a + x) = (-a) + (b)$$

$$[-a + a] + x = (-a) + (b)$$

$$0 + x = (-a) + (b)$$

$$x = (-a) + (b) \text{ ó } x = (b) + (-a)$$

**“Aparece la resta”** como una escritura o símbolo distinto, es decir:

$$a, b \in \mathbb{Z} : (b) + (-a) = b - a.$$

**NOTACION:**  $b + (-a) = b - a.$

### ALGUNOS CONCEPTOS QUE SE CONOCEN EN $\mathbb{Z}$ :

1) Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , se dice que **“b es divisible por a”**, si existe  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = a \cdot c$ , esto se escribe  $a/b$  y se lee  $a$  “divide a”  $b$ . Que  $b$  sea divisible por  $a$  es equivalente a: “ $b$  es múltiplo de  $a$ ” o “ $a$  es un divisor de  $b$ ” o “ $a$  es un factor de  $b$ ”.

2) Es importante mencionar los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{Z}$  :

a) El conjunto de los enteros pares:

$$\text{IP} = \{ a \in \mathbb{Z} / a \text{ es un múltiplo de } 2 \} = \{ a \in \mathbb{Z} / a = 2k, k \in \mathbb{Z} \}.$$

**Por ejemplo:**

$$164 \in \mathbb{Z} \text{ es par, ya que existe } 82 \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } 164 = 82 \cdot 2.$$

b) Conjunto de los enteros impares:  $\text{Impares} = \{ a \in \mathbb{Z} / a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \}.$

3) Números Primos: Se dice que un entero " $b$ " es primo, si siendo distinto de cero y distinto de  $\pm 1$ , solamente admite de divisores a  $\pm 1$  y  $\pm b$ .

Se analizará si la ecuación  $a \bullet x = b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  tiene siempre solución en  $\mathbb{Z}$ :

- a) Si  $b$  es múltiplo de  $a$ , la ecuación tiene solución en  $\mathbb{Z}$ .
- b) Si  $b$  no es múltiplo de  $a$ , la ecuación no admite solución en  $\mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, se crea otro conjunto: "**el Conjunto de los Números Racionales**", denotado por  $\mathbb{Q}$ . Dicho conjunto se crea con el objetivo de tener un conjunto en el cual siempre tenga solución la ecuación  $a \bullet x = b$ ;  $a$  y  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ .

$$\mathbb{Q} = \{x / ax = b, \forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}.$$

Por lo tanto,  $x$  es número racional si puede escribirse en la forma:  $a \bullet x = b$ .

Una forma cómoda de expresar un número racional es la decimal, que se obtiene al efectuar la división  $b : a$ , por lo tanto:

$$\mathbb{Q} = \left\{x / x = \frac{b}{a}, \forall a, b \in \mathbb{Z}; a \neq 0\right\}$$

### **IGUALDAD DE NUMEROS RACIONALES:**

**DEFINICIÓN:** Sean  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ , entonces:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \bullet d = b \bullet c$ .

Así por ejemplo,  $\frac{3}{7}$  y  $\frac{24}{56}$  representan el mismo número racional.

Por lo tanto, esta igualdad en  $\mathbb{Q}$ , introduce el concepto de fracciones equivalentes.

En  $\mathbb{Q}$ , también es posible definir dos leyes de composición interna (l.c.i.): adición y multiplicación:

$$1.- \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$2.- \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

### **PROPIEDADES DE LA ADICION EN $\mathbb{Q}$ :**

$$1.- \text{ Clausura : } \forall x, y \in \mathbb{Q}: (x + y) \in \mathbb{Q}$$

$$2.- \text{ Asociatividad : } \forall x, y, z \in \mathbb{Q}: (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$3.- \text{ Elemento Neutro : } \forall x \in \mathbb{Q}, \exists 0 \in \mathbb{Q}: x + 0 = x \vee 0 + x = x$$

$$4.- \text{ Elemento Inverso: } \forall x \in \mathbb{Q}, \exists (-x) \in \mathbb{Q}: x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

$$5.- \text{ Conmutatividad: } \forall x, y \in \mathbb{Q}: x + y = y + x$$

Por lo tanto (  $\mathbb{Q}, +$  ) es grupo abeliano.

### **PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION EN $\mathbb{Q}$ :**

$$1.- \text{ Clausura : } \forall x, y \in \mathbb{Q}: (x \cdot y) \in \mathbb{Q}$$

$$2.- \text{ Asociatividad: } \forall x, y, z \in \mathbb{Q}: (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$3.- \text{ Elemento Neutro : } \forall x \in \mathbb{Q}, \exists 1 \in \mathbb{Q}: x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$$

$$4.- \text{ Elemento Inverso : } \forall x \in \mathbb{Q} - \{0\}, \exists (x^{-1}) \in \mathbb{Q}: x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$$

$$5.- \text{ Conmutatividad : } \forall x, y \in \mathbb{Q}: x \cdot y = y \cdot x$$

Por lo tanto, (  $\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot$  ) es también un grupo abeliano. Además existe una propiedad que relaciona estas dos propiedades.

### **PROPIEDAD DISTRIBUTIVA EN $\mathbb{Q}$ :**

$$1.- \forall x, y, z \in \mathbb{Q}: x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ (propiedad distributiva izquierda)}$$

$$2.- \forall x, y, z \in \mathbb{Q}: (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \text{ (propiedad distributiva derecha)}$$

Luego, por todas las propiedades anteriormente enunciadas para ambas operaciones, se establece que  $\mathbb{Q}$  posee una estructura de cuerpo conmutativo.

En consecuencia, cuando se trabaja en  $\mathbb{Q}$ , debe tenerse presente que cuenta con todas estas propiedades.

### **OBSERVACIONES:**

- 1.- El elemento neutro es único: 0 para la adición y 1 para la multiplicación.
- 2.- El elemento inverso de cada elemento es único.
- 3.- La ley de cancelación es válida tanto para la adición como para la multiplicación.

O sea:

$$a) \forall a, b, x \in \mathbb{Q} : a + x = b + x \Rightarrow a = b$$

$$b) \forall a, b \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q} - \{0\} : a \cdot x = b \cdot x \Rightarrow a = b$$

- 4.- Se entiende por :  $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$  . Análogamente  $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$  .

En este conjunto numérico se distinguen otras características:

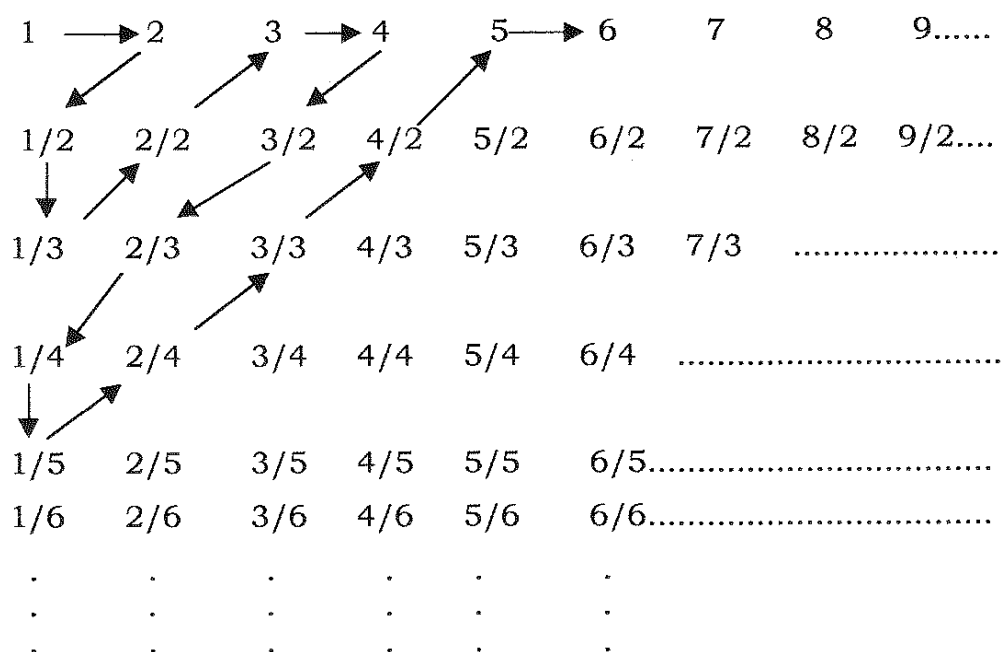
- 1.- **Es ordenado:** es decir, existe un ordenamiento entre sus elementos, que permite establecer, dados dos racionales cualesquiera, cual es el mayor. Esta relación se establece de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c, \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

Esta relación de orden permite establecer un modelo geométrico para  $\mathbb{Q}$ , en la recta numérica.

2.- **Es numerable:** es decir, existe una correspondencia uno a uno entre los números naturales y números racionales, dada de la siguiente forma:

Todo número racional se puede escribir en la forma  $\frac{a}{b}$ , con  $a$  y  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Si estos números se ubican en un cuadro donde  $\frac{a}{b}$  está en la fila  $b$  y columna  $a$ , se tiene:



Para enumerar los racionales se sigue el esquema indicado por las flechas. Como por ejemplo: en el 2do. lugar está el 2, en 3er. lugar el  $\frac{1}{2}$ , en 4to. lugar el  $\frac{1}{3}$ , etc. Se puede apreciar que los racionales positivos no están colocados en orden de magnitud, como ocurre con los números naturales.

3.- **Es denso:** quiere decir que siempre se encuentra un número racional entre dos racionales dados.

Existen otros números que no son racionales y que se ubican en la recta numérica, como por ejemplo  $\sqrt{2}$ .

En efecto, si  $\sqrt{2}$  fuese racional, según la descripción de  $\mathbb{Q}$  se tendrá que:

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ;  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$  y sea  $\frac{p}{q}$  irreducible, es decir no tiene factores

comunes; elevando al cuadrado la igualdad anterior, se tiene:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2 q^2 \quad (*)$$

con lo cual  $p^2$  es número par, y por lo tanto  $p$  es un número par.

O sea:  $p = 2n$ ,  $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p^2 = 4n^2$

Reemplazando en (\*) se obtiene:  $2 q^2 = 4 n^2$  (¿Porqué?)

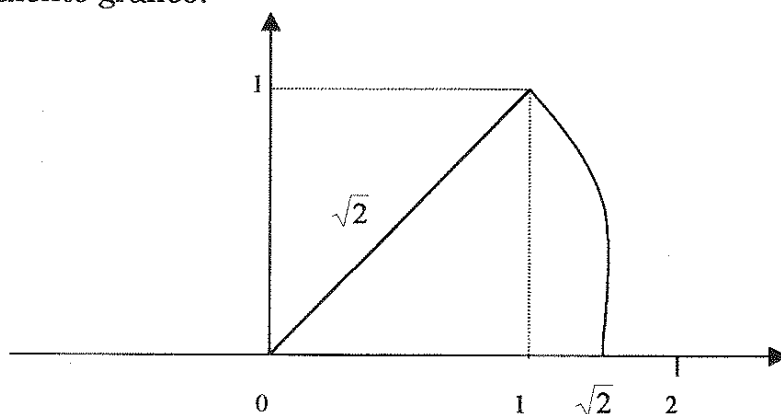
$$q^2 = 2n^2$$

Es decir,  $q^2$  también es par entonces  $q$  es par.

**CONCLUSION:** Siendo  $p$  y  $q$  números pares, la fracción  $\frac{p}{q}$  no sería

irreducible, lo cual es una contradicción con lo que se ha supuesto.

Así,  $\sqrt{2}$  no puede ser un número racional. Si se piensa en el modelo geométrico usual para  $\mathbb{Q}$ , es decir una recta en la cual se han distribuido convenientemente los números racionales, se ve que el número  $\sqrt{2}$  (que no es racional) se encuentra exactamente en el lugar que muestra el siguiente gráfico.



Así como  $\sqrt{2}$ , existen muchos otros números con esta característica ( $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ , etc.). Sin embargo, además de estos números conocidos como irracionales, existen otros que también son irracionales pero cuya caracterización es diferente y que no serán motivo de estudio en este curso (ej.:  $\pi$ ,  $\log 2$ , y otros) conocidos como números trascendentes.

Si se designa por  $I\mathbb{R}$ , al conjunto de todos los números irracionales, se puede efectuar la unión de  $\mathbb{Q}$  con  $I\mathbb{R}$ , lo que da origen al “**Conjunto de los Números Reales**”, que se simboliza por  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I\mathbb{R}$$

Así se puede completar la cadena de inclusiones antes citada colocando:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Luego, se define la adición y multiplicación en  $\mathbb{R}$  de tal forma que:

1.  $(\mathbb{R}, +)$  es grupo abeliano.
2.  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  es grupo abeliano.
3. La multiplicación distribuye sobre la adición.

Luego de 1) 2) y 3), se concluye que  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  tiene estructura de cuerpo conmutativo.

### **PROPIEDADES DEL CUERPO DE LOS REALES:**

- 1)  $-0=0$
- 2)  $a + b = a \Rightarrow b = 0$
- 3)  $a \cdot 0 = 0$
- 4)  $-a = (-1) a$
- 5)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a(-b) = -(ab) = (-a)b$

**Demostración:**  $a(-b) = a[(-1)b] = a(-1)b = [(-1)a]b = (-a)b$

6)  $\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$

7)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, (-a)(-b) = ab$

8)  $1^{-1} = 1$

9)  $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0$

10)  $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

11)  $a \bullet b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$

12)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c$  (ley cancelativa para la adición)

**Demostración:**

$$\begin{aligned} a + b = a + c &\Rightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) \Rightarrow [(-a) + a] + b = [(-a) + a] + c \\ &\Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c \end{aligned}$$

13)  $a \bullet c = b \bullet c$  y  $c \neq 0 \Rightarrow a = b$  (ley cancelativa para la multiplicación)

**Demostración:**

$$\begin{aligned} a \bullet c = b \bullet c &\Rightarrow (a \bullet c) \bullet c^{-1} = (b \bullet c) \bullet c^{-1} \Rightarrow a \bullet (c^{-1} \bullet c) = b \bullet (c^{-1} \bullet c) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \bullet 1 = b \bullet 1 \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

14)  $-a - b = -(a + b)$

15) Si  $a \bullet b \neq 0 \Rightarrow (a \bullet b)^{-1} = a^{-1} \bullet b^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$

16)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, b \neq 0$  y  $d \neq 0$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= a \bullet b^{-1} + c \bullet d^{-1} = (a \bullet b^{-1}) \bullet 1 + (c \bullet d^{-1}) \bullet 1 = (a \bullet b^{-1})(d \bullet d^{-1}) + \\ &(c \bullet d^{-1})(b \bullet b^{-1}) = (a \bullet d)(b^{-1} \bullet d^{-1}) + (c \bullet b)(d^{-1} \bullet b^{-1}) = (a \bullet d)(b \bullet d)^{-1} + \\ &(c \bullet b)(d \bullet b)^{-1} \Rightarrow (a \bullet b + b \bullet c)(b \bullet d)^{-1} = \frac{a \bullet b + b \bullet c}{b \bullet d} \end{aligned}$$

17)  $\forall a \neq 0 \Rightarrow (-a)^{-1} = -a^{-1}$

**DEFINICION:**

- 1) Resta :  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a - b = a + (-b)$ .
- 2) División:  $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 : \frac{a}{b} = a \bullet \frac{1}{b} = a \bullet b^{-1}$ .

**OBSERVACION:** La división por cero no está definida.

**ORDEN EN  $\mathbb{R}$ :**

Se sabe que existe  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ , que cumple con los siguientes axiomas:

- 1)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, (x + y) \in \mathbb{R}^+, (x \bullet y) \in \mathbb{R}^+$
- 2)  $\forall x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}^+ \text{ ó } x = 0 \text{ ó } -x \in \mathbb{R}^+ \text{ (ley de tricotomía).}$

Esto permite definir la siguiente relación de orden:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , se dice que  $x$  es menor que  $y$ , simbolizado como  $x < y$ , si y solo si  $(y - x) \in \mathbb{R}^+$ .

**OBSERVACIONES:**

- 1)  $(y - x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow y - x > 0$
- 2)  $y > x \Leftrightarrow x < y$
- 3)  $x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ ó } x = y$
- 4)  $y \geq x \Leftrightarrow x \leq y$
- 5)  $x$  es positivo  $\Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$
- 6) Existe  $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}$ , llamado "subconjunto de reales negativos", es decir :  
 $x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow x$  es negativo  $\Leftrightarrow x < 0$ .
- 7)  $0 \notin \mathbb{R}^+, 0 \notin \mathbb{R}^-$ , o sea,  $0 \in \mathbb{R}$  no siendo positivo ni negativo.

### ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS DE ORDEN:

1.-  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b \text{ ó } a = b \text{ ó } a > b \text{ (ley de tricotomía)}$$

2.-  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$  (transitividad)

3.-  $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

4.-  $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

5.-  $a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

**Demostración:**  $a < b \Rightarrow b - a > 0$

$$c < 0 \Rightarrow -c > 0 \quad \text{Por axioma de orden } (b - a)(-c) > 0$$

$$\Rightarrow -bc + ac > 0 \Rightarrow ac - bc > 0$$

$$\Rightarrow ac > bc$$

6.-  $a < b \Leftrightarrow -a > -b$

7.- Si  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

**Demostración:** Si  $a \neq 0$ , entonces:

$$\text{i) } a > 0 \Rightarrow a \cdot a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

$$\text{ii) } a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

8.- Si  $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

**Demostración:**  $a < b \Rightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+$

$$c < d \Rightarrow (d - c) \in \mathbb{R}^+. \text{ Luego por axioma de orden}$$

$$(b - a + d - c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow [b + d - (a + c)] \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + c < b + d$$

9.-  $0 \leq a < b, 0 \leq c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$

10.-  $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

11.-  $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

12.-  $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0)$

13.-  $\frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow (a \leq 0 \wedge b > 0) \vee (a \geq 0 \wedge b < 0)$

14.-  $a \geq 0, b \geq 0$  y  $a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b$

Por lo anterior se dice que  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo conmutativo ordenado.

### SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}$ . INTERVALOS:

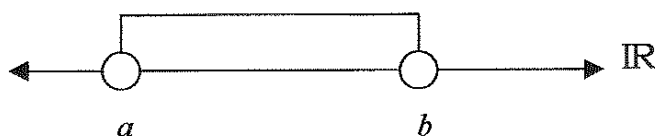
Para representar algunos subconjuntos especiales de  $\mathbb{R}$ , se usa la notación de **Intervalos**. En efecto: sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $a < b$ . Entonces se definen los siguientes intervalos:

- 1.-  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ . Intervalo cerrado con extremos  $a$  y  $b$  (incluye los extremos).

Usualmente su representación es un gráfico del tipo siguiente:

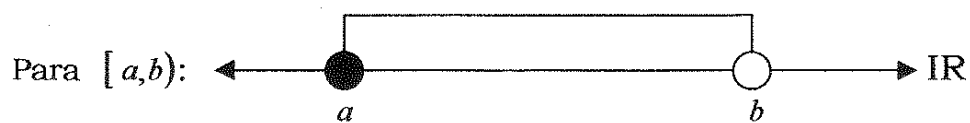


- 2.-  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ . Intervalo abierto con extremos  $a$  y  $b$  (no incluye los extremos). Otra notación aceptada para este conjunto es  $]a, b[$ , cuya representación es:



- 3.-  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$   
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

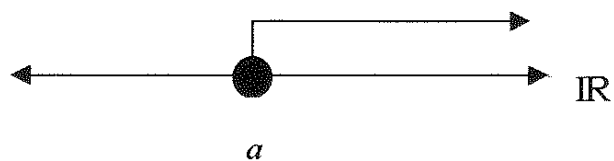
Intervalos semi-abiertos a semi-cerrados con extremos  $a$  y  $b$ , cuya representación es:



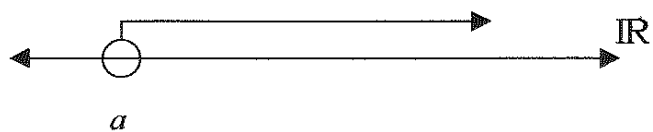
**Nota:** Se observa que cada uno de los intervalos definidos posee longitud finita igual a  $(b - a)$ , que es un número positivo.

#### 4.- Intervalos infinitos:

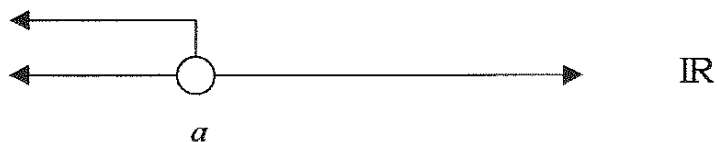
- i)  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ , gráficamente



- ii)  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ , gráficamente:



- iii)  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ , gráficamente:



iv)  $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ , gráficamente:



v)  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

**OBSERVACION:** El símbolo  $+\infty$ , indica que  $x$  crece indefinidamente y  $-\infty$ , que  $x$  decrece indefinidamente. Se observa también que estos intervalos poseen longitud infinita.

### VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

El valor absoluto de un número real  $x$ , denotado por  $|x|$ , se define del modo siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

#### **EJEMPLOS:**

1.-  $|5| = 5$

2.-  $|-3| = -(-3) = 3$

3.-  $|0| = 0$

4.-  $|\sqrt{-2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

**OBSERVACIONES:**

1. Es fácil observar que el valor absoluto de un número real es siempre positivo o cero.
2.  $|x|$  se interpreta geométricamente como la distancia medida desde el origen al punto  $x$ . ( $|x| = \sqrt{x^2}$ ).

A continuación se enunciará una serie de propiedades fundamentales del valor absoluto, demostrando algunas de ellas.

**PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO:**

- 1.-  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$
- 2.-  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$
- 3.-  $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$ , o sea,  $-|x| \leq x \leq |x|$

**Demostración:**

- i) Si  $x > 0 \Rightarrow -x \leq x \leq x \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$ , ya que  $x = |x|$
- ii) Si  $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ . Luego por i) se tiene:  $x \leq -x \leq -x \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

Así,  $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$

- 4.-  $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 = x^2$
- 5.-  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$
- 6.-  $\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \quad \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$
- 7.- Sea  $a > 0$ . Entonces  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

**Demostración:**

- i) Por demostrar:  $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x \geq 0 \text{ y } |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a \\ \text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x \leq a \Rightarrow x \geq -a \Rightarrow -a \leq x \leq a \end{array} \right\} -a \leq x \leq a, \forall x \in \mathbb{R}$$

Por demostrar :  $-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a$

Si  $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq a$  (por hipótesis)  $\Rightarrow |x| \leq a$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x \text{ y como } -a \leq x \text{ (por hipótesis)} \\ \text{Se tiene que } -x \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow |x| \leq a$$

De i) y ii) queda demostrado.

$$8.- \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ó } x \geq a$$

$$9.- \forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|$$

En efecto:

Se sabe que :  $-|x| \leq x \leq |x|$

$$\frac{-|y| \leq y \leq |y|}{- (|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|}$$

$\therefore |x+y| \leq |x| + |y|$  y como  $|x| + |y| > 0$ , se tiene

$$- (|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$10.- \forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

**Demostración:**  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x - y + y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

Por lo tanto  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$

Luego:  $|x| - |y| \leq |x - y|$  (\*)

Por otro lado :  $y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = y - x + x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$|y| \leq |y - x| + |x|$$

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

$$|x| - |y| \geq -|x - y| \quad (**)$$

En consecuencia de (\*) y (\*\*) se tiene :  $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$

$\Updownarrow$

$$||x| - |y|| \leq |x-y|$$

### **DESIGUALDADES E INECUACIONES EN $\mathbb{R}$**

Existen dos tipos de expresiones que involucran a la relación de orden en los reales: **Desigualdad** e **Inecuación**.

Se dice que desigualdad en  $\mathbb{R}$  (ó en  $A \subset \mathbb{R}$ ) es cualquier proposición matemática que involucra una relación de orden, en cualquiera de sus cuatro formas ( $>, <, \geq$  ó  $\leq$ ), permaneciendo válida para todo  $x \in \mathbb{R}$  ( ó para todo  $x \in A \subset \mathbb{R}$ ).

Por ejemplo  $(a+b)^2 \geq 0$ , es una desigualdad en  $\mathbb{R}$ , ya que es una proposición matemática que involucra a la relación de orden  $\geq$ , que es válida cualquiera sean  $a, b \in \mathbb{R}$ .

De la misma manera se puede describir lo que se entenderá por una inecuación en  $\mathbb{R}$ : es una proposición matemática que tiene variables, que involucra una relación de orden en  $\mathbb{R}$  (en cualquiera de sus formas) y que es válida sólo para algún subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Tal subconjunto recibe el nombre de "**conjunto solución de la inecuación**".

Por ejemplo  $3x+4 \geq x-2$  es una inecuación de variable  $x$ , y es válida sólo para un subconjunto de números reales. Por ejemplo si  $x = -4$  entonces  $3x+4 \geq x-2$  es una proposición falsa. Utilizando propiedades conocidas de

la relación de orden se puede establecer que el conjunto solución es  $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\} = [-3, +\infty)$

A continuación se verán ejemplos de desigualdades e inecuaciones en  $\mathbb{R}$ , teniendo en cuenta siempre que el modo de demostrar una desigualdad o resolver una inecuación, se basa principalmente en las propiedades conocidas de la relación de orden en  $\mathbb{R}$ .

### **DESIGUALDADES EN $\mathbb{R}$ :**

#### **EJEMPLOS:**

1.- Si  $a \wedge b \in \mathbb{R}$ , demostrar que  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

#### **Demostración:**

Se sabe que  $(a-b)^2 \geq 0 \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 2ab$$

2.-  $\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R}$ , demostrar que:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ac + ab$

#### **Demostración:**

Por 1) Se sabe que:  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$a^2 + c^2 \geq 2ac$$

Por lo tanto,  $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc) \quad / : 2$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

3.- Si  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , demostrar que:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

#### **Demostración:**

Se sabe que  $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$  dividiendo por  $a \bullet b > 0$  (¿Por qué  $a \bullet b > 0$ ?)

$$\text{Se tiene: } \frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

4.- Si  $a \geq 0, b \geq 0$  demostrar que  $\Rightarrow \frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

Un método bastante frecuente para demostrar una desigualdad, consiste en suponer verdadera la proposición que se requiere demostrar de manera que trabajando con ella se pueda llegar a una expresión que, sin lugar a dudas, sea verdadera, lo que se llama análisis de la desigualdad.

Se puede así entonces revertir el proceso hecho y partir ahora de esa expresión que es verdadera, para llegar a concluir la proposición que se requiere demostrar.

Por ejemplo, en este caso se efectúa el siguiente análisis:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, \text{ expresión que,}$$

sin lugar a dudas es verdadera, ya que siendo ;  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ ,  $\sqrt{a}$  y  $\sqrt{b}$  son números reales.

Revirtiendo el proceso, se comienza la demostración:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

5.- Demostrar que :  $a^2 + \frac{9}{a^2} \geq 6$ , para  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

**Demostración:**

**Análisis:**  $a^2 + \frac{9}{a^2} \geq 6 \Rightarrow a^4 + 9 \geq 6a^2 \Rightarrow a^4 - 6a^2 + 9 \geq 0 \Rightarrow (a^2 - 3)^2 \geq 0,$

expresión que es verdadera  $\forall a \in \mathbb{R}$ . En particular lo será para  $a \in$

$\mathbb{R} - \{0\}$ . Así se puede comenzar de  $(a^2 - 3)^2 \geq 0, a \neq 0$ .

Entonces:  $a^4 - 6a^2 + 9 \geq 0 \Rightarrow a^4 + 9 \geq 6a^2 \Rightarrow a^2 + \frac{9}{a^2} \geq 6.$

**EJERCICIOS:**

1.- Demostrar las siguientes desigualdades:

a)  $\forall a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$

b)  $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow ax + by \leq 1$

c)  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

2.- Dados  $3ab^2$  y  $a^3 + 2b^3$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , determinar cual de las expresiones es mayor.

**INECUACIONES EN  $\mathbb{R}$  :**

Aunque es difícil clasificar todas las inecuaciones en  $\mathbb{R}$ , se puede distinguir algunos tipos clásicos:

**I.- INECUACIONES DE PRIMER GRADO EN UNA VARIABLE.**

Son todas aquellas inecuaciones que se pueden llevar a una de las siguientes cuatro formas:

i)  $ax + b > 0$       ii)  $ax + b \geq 0$       iii)  $ax + b < 0$       iv)  $ax + b \leq 0$

Es decir, después de efectuadas todas las reducciones posibles basadas en las propiedades conocidas de la relación de orden en  $\mathbb{R}$ , la inecuación toma una de las cuatro formas antes señaladas.

Es claro entonces que si la inecuación propuesta toma, por ejemplo, la forma i) se tiene:

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{b}{a}, & \text{si } a > 0 \\ x < -\frac{b}{a}, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de i) será:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} / x > -\frac{b}{a} \right\} = \left( -\frac{b}{a}, +\infty \right), \text{ si } a > 0 \quad \text{ó}$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R} / x < -\frac{b}{a} \right\} = \left( -\infty, -\frac{b}{a} \right), \text{ si } a < 0$$

### EJEMPLOS:

1.- Resolver  $5x + 7 \geq 3x + 15$ .

**Solución:**  $5x + 7 \geq 3x + 15 \Rightarrow 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$

El conjunto solución es:  $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\} = [4, +\infty)$ .

2.- Resolver :  $\frac{2x-3}{4} + 6 > 2 + \frac{4x}{3}$ .

**Solución:**  $\frac{2x-3}{4} + 6 > 2 + \frac{4x}{3} \quad / 12$

$$6x - 9 + 72 > 24 + 16x$$

$$-10x > -39 \quad / (-1)$$

$$10x < 39$$

$$x < \frac{39}{10}$$

Conjunto solución:  $\{x \in \mathbb{R} / x < \frac{39}{10}\} = \left( -\infty, \frac{39}{10} \right)$ .

3.- Resolver:  $\frac{2x-3}{2} < \frac{x}{2} \leq \frac{4-x}{4}$ .

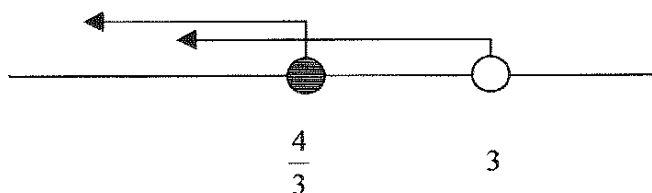
**Solución:**  $\frac{2x-3}{2} < \frac{x}{2} \quad \wedge \quad \frac{x}{2} \leq \frac{4-x}{4}$

$$\frac{2x-3}{2} - \frac{x}{2} < 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{2} - \frac{4-x}{4} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{2} < 0 \quad \wedge \quad \frac{2x-4+x}{4} \leq 0$$

$$x-3 < 0 \quad \wedge \quad 3x-4 \leq 0$$

$$x < 3 \quad \wedge \quad x \leq \frac{4}{3}$$



$$\therefore C.S. = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$$

## II.- INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE.

Son todas las inecuaciones que pueden ser colocadas en alguna de las siguientes cuatro formas:

i)  $x^2 + px + q > 0$

ii)  $x^2 + px + q \geq 0$

iii)  $x^2 + px + q < 0$

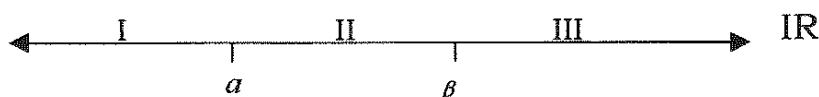
iv)  $x^2 + px + q \leq 0$

Se propondrá un método general que permita resolver cualquiera de las 4 inecuaciones propuestas. Para ello se tiene que si  $x = \alpha$  y  $x = \beta$  son las raíces de la ecuación  $x^2 + px + q = 0$ , entonces es posible escribir:  $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$ .

Ahora, la naturaleza de las raíces  $\alpha$  y  $\beta$  depende del signo del discriminante de la ecuación  $D = p^2 - 4q$ . Se distinguen entonces los siguientes casos:

**Primer Caso:**  $D = p^2 - 4q > 0$

En este caso,  $x = \alpha$  y  $x = \beta$  son ambas raíces reales y distintas. Así, sin pérdida de generalidad se supone que  $\alpha < \beta$ . Este hecho permite dividir la recta real en 3 regiones.



Entonces:

i) Si  $x \in I$  se tiene que  $x < \alpha \wedge x < \beta$ .

Luego,  $x - \alpha < 0$  y  $x - \beta < 0$ .

Así:  $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) > 0$

ii) Si  $x \in II$ , se tiene que  $\alpha < x < \beta$ . Luego,  $x - \alpha > 0 \wedge x - \beta < 0$ .

Así:  $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) < 0$

iii) Si  $x \in III$ , se tiene que  $x > \alpha \wedge x > \beta$ . Luego,

$x - \alpha > 0$  y  $x - \beta > 0$

Así:  $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) > 0$

Así, se puede concluir lo siguiente:

Si para  $x^2 + px + q = 0$ ,  $D = p^2 - 4q > 0$  entonces:

a)  $x^2 + px + q > 0$ ,  $\forall x \in I$  ó  $\forall x \in III$ .

Luego, el conjunto solución de  $x^2 + px + q > 0$  será:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \in I\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x \in III\}$$

o bien:  $\{x \in \mathbb{R} / x < \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x > \beta\} = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$

b)  $x^2 + px + q \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq \alpha$  ó  $\forall x \geq \beta$ .

Luego, el conjunto solución de  $x^2 + px + q \geq 0$  será:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \leq \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x \geq \beta\} = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, \infty)$$

c)  $x^2 + px + q < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Luego, el conjunto solución de  $x^2 + px + q < 0$  será:

$$\{x \in \mathbb{R} / \alpha < x < \beta\} = (\alpha, \beta).$$

d)  $x^2 + px + q \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha \leq x \leq \beta$ .

El conjunto solución de  $x^2 + px + q \leq 0$  será:

$$\{x \in \mathbb{R} / \alpha \leq x \leq \beta\} = [\alpha, \beta].$$

**Segundo caso:**  $D = p^2 - 4q = 0$ .

En este caso, las raíces  $x = \alpha$  y  $x = \beta$  son reales e iguales. O sea  $x = \alpha = \beta$ . De manera que  $x^2 + px + q = (x - \alpha)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  entonces, se puede concluir lo siguiente:

Si para  $x^2 + px + q = 0, D = p^2 - 4q = 0$ , entonces:

a)  $x^2 + px + q > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$

Así, el conjunto solución de  $x^2 + px + q > 0$  es:  $\mathbb{R} - \{\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \alpha\}$ .

b)  $x^2 + px + q \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, el conjunto solución de  $x^2 + px + q \geq 0$ , es:  $\mathbb{R}$ .

c)  $x^2 + px + q < 0$ , es falsa cualquiera sea  $x \in \mathbb{R}$ .

Por lo tanto, el conjunto solución de  $x^2 + px + q < 0$  es  $\emptyset$ .

d)  $x^2 + px + q \leq 0$  sólo es verdadera si  $x = \alpha$ .

Por lo tanto, el conjunto solución de  $x^2 + px + q \leq 0$  es:  $\{\alpha\}$ .

**Tercer Caso:**  $D = p^2 - 4q < 0$ .

En este caso las raíces  $x = \alpha$  y  $x = \beta$  son números complejos (más aún son complejos conjugados).

Sin embargo:  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$ .

Pero  $4q - p^2 > 0$  (ya que  $D = p^2 - 4q < 0$ ).

Luego  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} > 0$  siempre!!

Luego si  $D = p^2 - 4q < 0$ , el conjunto solución de:

- i)  $x^2 + px + q < 0$  es  $\phi$
- ii)  $x^2 + px + q > 0$  es IR
- iii)  $x^2 + px + q \geq 0$  es IR
- iv)  $x^2 + px + q \leq 0$  es  $\phi$

### **EJEMPLOS:**

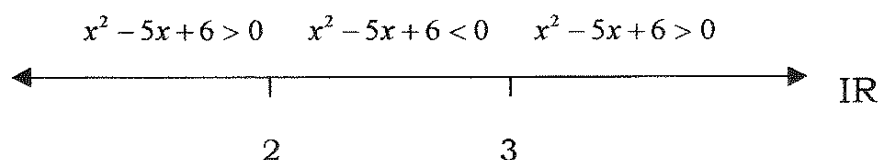
1) Resolver  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ .

**Solución:**  $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$ ; raíces reales y distintas!

Las raíces son  $x = 3$  y  $x = 2$

Así,  $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ .

Procediendo como en el caso general, se tiene:



Luego, el conjunto solución de  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$  es:  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ .

Se puede proceder también de la siguiente manera:

una vez encontradas las raíces se tiene que:  $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ .

Luego:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} i) & x-2 \geq 0 \wedge x-3 \geq 0 \\ ii) & x-2 \leq 0 \wedge x-3 \leq 0 \end{cases} \quad \text{ó}$$

Entonces el análisis para i) es:

$$x-2 \geq 0 \wedge x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \wedge x \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$$

Por otra parte el análisis para ii) es:

$$x-2 \leq 0 \wedge x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \wedge x \leq 3 \Rightarrow x \leq 2$$

En consecuencia  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$  si ocurre que  $x \geq 3$  ó  $x \leq 2$

Así el conjunto solución es:  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ .

2) Resolver :  $2x^2 - 3x - 5 < 0$ .

**Solución:** Esta inecuación es de la forma  $ax^2 + bx + c < 0$ .

Luego el discriminante de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  es  $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2(-5) = 49 > 0$ , raíces reales y distintas, que se pueden determinar utilizando la forma general de la ecuación de 2do. grado, es decir,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \alpha \\ x_2 = \frac{-4}{4} = -1 = \beta \end{cases}$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 5 = (2x-5)(x+1) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+1) < 0$$

$$\therefore C.S. = \left(-1, \frac{5}{2}\right),$$

3) Determinar el conjunto solución de la inecuación fraccionaria.

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 3} > 0$$

**Solución:**

En este caso, dado que el numerador de la expresión es siempre positivo, bastará que  $x^2 - 2x + 3$  sea positivo para que la expresión también lo sea.

Así el problema se reduce a resolver la inecuación  $x^2 - 2x + 3 > 0$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0 \text{ (raíces complejas!)}.$$

En consecuencia,  $x^2 - 2x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Conclusión:  $\frac{1}{x^2 - 2x + 3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Es decir, el conjunto solución de  $\frac{1}{x^2 - 2x + 3} > 0$  es  $\mathbb{R}$ .

Otro método para resolver inecuaciones que sean factorizables en factores lineales es el siguiente:

4) Resolver :  $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$ .

**Solución:** En el caso de que la expresión cuadrática sea factorizable, también se puede resolver la inecuación en la forma siguiente:

$$2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2) \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ y } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2,$$

llamados puntos críticos.

Luego se confecciona la siguiente tabla, que nos entrega los intervalos donde la inecuación es positivo y donde es negativa.

|                   | $-\infty$ | $-2$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x + 2$           |           | -    | +             | +         |
| $2x - 1$          |           | -    | -             | +         |
| $(x + 2)(2x - 1)$ |           | +    | -             | +         |

Luego el conjunto solución de  $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$  es:  $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

Para el caso  $2x^2 + 3x - 2 < 0$ , el conjunto solución es  $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ , que se puede observar en la tabla.

5) Resolver :  $\frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$ .

**Solución:** El método indicado en el ejemplo anterior se puede aplicar también cuando tenemos más de dos factores lineales en productos y/o cuocientes.

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(x-1)}{(x-3)(x-2)}.$$

Puntos críticos :  $x = 0, 1, 2, 3$ .

Haciendo la Tabla:

|                             | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|-----------------------------|-----------|---|---|---|---|-----------|
| $x$                         | -         | + | + | + | + |           |
| $x-1$                       | -         | - | + | + | + |           |
| $x-2$                       | -         | - | - | + | + |           |
| $x-3$                       | -         | - | - | - | + |           |
| $\frac{x(x-1)}{(x-3)(x-2)}$ | +         | - | + | - | + |           |

Solución es :  $x \in [0,1] \cup (2,3)$ .

6) Resolver :  $\frac{x+1}{(x+6)(x^2+2x+2)} < 0$ .

**Solución:**  $\frac{x+1}{(x+6)(x^2+2x+2)} = \frac{x+1}{(x+6)[(x+1)^2+1]} < 0$ .

$\therefore \frac{x+1}{x+6} < 0$ , ya que  $(x+1)^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

|                   |           |      |      |           |
|-------------------|-----------|------|------|-----------|
|                   | $-\infty$ | $-6$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $x+6$             | -         | +    | +    |           |
| $x+1$             | -         | -    | +    |           |
| $\frac{x+1}{x+6}$ | +         | -    | +    |           |

$$\therefore x \in (-6, -1).$$

7) Resolver :  $\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-2)(x+1)(x-3)} \geq 0$ .

**Solución:** Equivale a resolver  $\frac{x-2}{x-3} \geq 0$ , cuidando que

$$x \neq 2, x \neq -1, x \neq 3$$

|                   |           |     |     |           |
|-------------------|-----------|-----|-----|-----------|
|                   | $-\infty$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
| $x-2$             | -         | +   | +   |           |
| $x-3$             | -         | -   | +   |           |
| $\frac{x-2}{x-3}$ | +         | -   | +   |           |

$$\therefore x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (3, +\infty).$$

8) Determinar el menor número real  $M$  tal que  $6+6x-x^2 \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Solución:**  $6+6x-x^2 = -(x^2-6x+9)+9+6 = 15-(x-3)^2$

$$\therefore 15-(x-3)^2 \leq 15, \forall x \in \mathbb{R} \quad \therefore M = 15,$$

9) Determinar el mayor número real  $m$  tal que  $m \leq x^2-4x+31, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Solución:**  $x^2-4x+31 = x^2-4x+4+27 = (x-2)^2+27$

$$\therefore (x-2)^2+27 \geq 27, \forall x \in \mathbb{R}, m = 27$$

10) Resolver  $-12 < \frac{3}{4}(2-x) \leq 24$ .

**Solución:**

$$-12 < \frac{3}{4}(2-x) \leq 24 \quad / \bullet \frac{4}{3} \Rightarrow -16 < (2-x) \leq 32 \quad / +(-2) \Rightarrow -18 < -x \leq 30 \quad / \bullet (-1)$$

$$-30 \leq x < 18 \quad \therefore \text{C.S. } [-30, 18).$$

### INECUACIONES IRRACIONALES:

1) Resolver :  $\sqrt{2x-3} > \sqrt{2-x}$ .

**Solución:** Para que  $\sqrt{2x-3} \in \mathbb{R}$  y  $\sqrt{2-x} \in \mathbb{R}$ , es necesario que :

$$2x-3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.$$

Por lo tanto, para que esté bien definida  $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right]$ , luego  $U = \left(\frac{3}{2}, 2\right]$ .

$$\therefore \sqrt{2x-3} > \sqrt{2-x} \quad / ^2 \Rightarrow 2x-3 > 2-x \Rightarrow 3x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left(\frac{5}{3}, +\infty\right) \cap \left(\frac{3}{2}, 2\right] = \left(\frac{5}{3}, 2\right].$$

2) Resolver  $\sqrt{x^2+x+1} > x-2$ .

**Solución:** Para que la inecuación esté bien definida  $x^2+x+1 \geq 0$ .

Como  $D < 0 \Rightarrow x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , luego  $U = \mathbb{R}$ .

i) Si  $x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow S_i = (-\infty, 2)$

ii) Si  $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow$  se puede elevar al cuadrado y

$$x^2+x+1 > x^2-4x+4 \Rightarrow x > \frac{3}{5} \Rightarrow S_{ii} = [2, +\infty) \cap \left(\frac{3}{5}, +\infty\right) = [2, +\infty)$$

$$\therefore \text{C.S.} = (S_i \cup S_{ii}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

3) Resolver :  $\sqrt{6x-2} - 2 \leq \sqrt{3x-1}$ .

**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} 6x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \\ 3x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}, \text{ luego } U = \left[ \frac{1}{3}, +\infty \right).$$

$\therefore$  Si  $x \in \left[ \frac{1}{3}, +\infty \right)$ , la inecuación está bien definida y

$$\sqrt{2} \sqrt{3x-1} - \sqrt{3x-1} \leq 2 \Rightarrow (\sqrt{2}-1)\sqrt{3x-1} \leq 2 \quad /^2$$

$$(2-2\sqrt{2}+1)(3x-1) \leq 4 \Rightarrow 3x-1 \leq \frac{4}{3-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 3x \leq \frac{4}{3-2\sqrt{2}} + 1 = \frac{4+3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \Rightarrow x \leq \frac{7-2\sqrt{2}}{3(3-2\sqrt{2})} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow x \leq \frac{13+8\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore C.S. = \left( -\infty, \frac{13+8\sqrt{2}}{3} \right] \cap \left[ \frac{1}{3}, +\infty \right) = \left[ \frac{1}{3}, \frac{13+8\sqrt{2}}{2} \right].$$

4) Resolver :  $\sqrt{x^2-4x+3} \leq \sqrt{x^2-7x+12}$ .

**Solución:** Es necesario que:

$$\left. \begin{array}{l} x^2-4x+3 = (x-3)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \\ x^2-7x+12 = (x-4)(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3] \cup [4, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\therefore x \in (-\infty, 1] \cup \{3\} \cup [4, +\infty), \therefore U = (-\infty, 1] \cup \{3\} \cup [4, +\infty)$$

$$\therefore x^2-4x+3 \leq x^2-7x+12 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$$

$$\therefore C.S. = (-\infty, 3] \cap U = (-\infty, 1] \cup \{3\}.$$

5) Resolver :  $\frac{x\sqrt{x+3}(x-5)}{x^3+x} \leq 0$ .

**Solución:**  $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \quad \therefore U = [-3, +\infty).$

$$\therefore \frac{x\sqrt{x+3}(x-5)}{x(x^2+1)} \leq 0, \text{ como } x^2+1 > 0, x \neq 0 \text{ y } \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\Rightarrow x-5 \leq 0 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\therefore C.S. = ((-\infty, 5] - \{0\}) \cap [-3, +\infty) = [-3, 0) \cup (0, 5].$$



**INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:**

1) Resolver :  $|3x-1| < 2x+5$ .

**Solución:**  $2x+5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2} \quad \therefore U = \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ .

$$-2x-5 < 3x-1 < 2x+5$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } -2x-5 < 3x-1 \Rightarrow 5x > -4 \Rightarrow x > -\frac{4}{5} \\ \text{ii) } 3x-1 < 2x+5 \Rightarrow x < 6 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left(-\frac{4}{5}, 6\right)$$

$$C.S. = \left(-\frac{4}{5}, 6\right) \cap \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right) = \left(-\frac{4}{5}, 6\right).$$

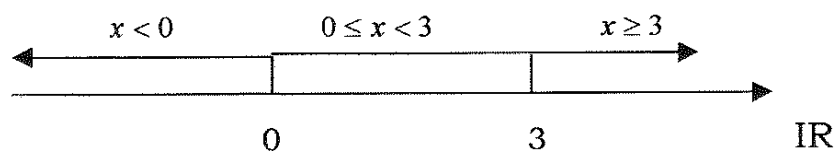
2) Resolver :  $|x-3| + 2|x| < 5$ .

**Solución:** Se aplica la definición de valor absoluto.

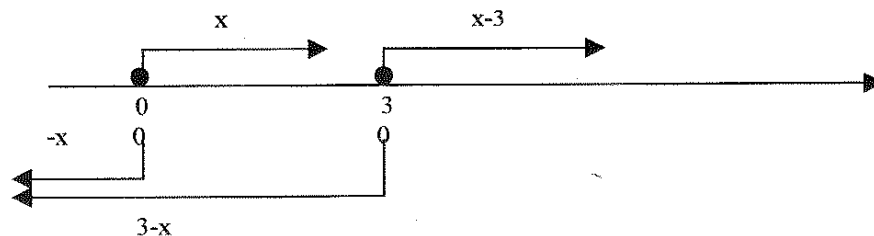
$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{si } x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -x+3, & \text{si } x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Esto permite dividir la recta numérica en tres intervalos:



donde:



$$\text{i) Si } x < 0 \Rightarrow -x + 3 + 2(-x) < 5 \Rightarrow -3x < 2 \Rightarrow x > -\frac{2}{3}. \therefore S_1 = \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) \cap (-\infty, 0) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right).$$

$$\text{ii) Si } 0 \leq x < 3 \Rightarrow -x + 3 - 2x < 5 \Rightarrow x < 2. \therefore S_2 = (-\infty, 2) \cap [0, 3) = [0, 2).$$

$$\text{iii) Si } x \geq 3 \Rightarrow x - 3 + 2x < 5 \Rightarrow 3x < 8 \Rightarrow x < \frac{8}{3}. \therefore S_3 = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right) \cap [3, +\infty) = \emptyset.$$

$$\therefore S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow S_F = \left(-\frac{2}{3}, 2\right).$$

$$3) \text{ Resolver: } |x^2 - 5x + 6| > 2.$$

$$\textbf{Solución:} \quad x^2 - 5x + 6 > 2 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 6 < -2$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 8 < 0$$

$$(x-4)(x-1) > 0 \quad \vee \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} < 0$$

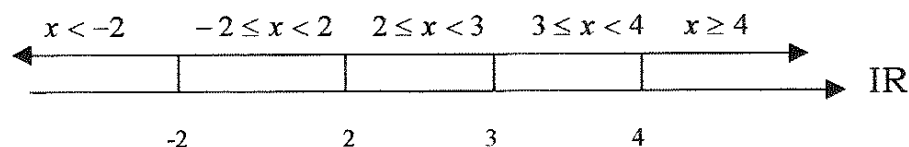
$$S_1 = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \quad \vee \quad S_2 = \emptyset$$

$$\therefore S_F = S_1 \cup S_2 \Rightarrow S_F = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty).$$

$$4) \text{ Resolver: } |x^2 - 4| < |x^2 - 7x + 12|.$$

$$\textbf{Solución:} \quad |x^2 - 4| < |x^2 - 7x + 12| \Rightarrow |x-2||x+2| < |x-4||x-3|.$$

Aplicando las definiciones de cada valor absoluto, en la recta numérica se tiene:



$$\text{i) Si } x < -2 \Rightarrow (-x+2)(-x-2) < (-x+4)(-x+3) \Rightarrow x^2 - 4 < x^2 - 7x + 12 \Rightarrow$$

$$7x < 16 \Rightarrow x < \frac{16}{7}. \therefore S_1(-\infty, -2) \cap \left(-\infty, \frac{16}{7}\right) = (-\infty, -2).$$

$$\text{ii) Si } -2 \leq x < 2 \Rightarrow (-x+2)(x+2) < (-x+4)(-x+3) \Rightarrow -x^2 + 4 < x^2 - 7x + 12$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 8 > 0, \quad D < 0. \therefore S_2 = [-2, 2) \cap \mathbb{R} = [-2, 2).$$

$$\text{iii) Si } 2 \leq x < 3 \Rightarrow x^2 - 4 < x^2 - 7x + 12 \Rightarrow 7x < 16 \Rightarrow x < \frac{16}{7} \therefore S_3 = \left(-\infty, \frac{16}{7}\right) \cap$$

$$[2, 3) = \left[2, \frac{16}{7}\right).$$

$$\text{iv) Si } 3 \leq x < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < (-x+4)(x-3) \Rightarrow x^2 - 4 < -x^2 + 7x - 12$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 8 < 0, \quad D < 0. \therefore S_4 = \Phi \cap [3, 4) = \phi.$$

$$\text{v) Si } x \geq 4 \Rightarrow x^2 - 4 < x^2 - 7x + 12 \Rightarrow 7x < 16 \Rightarrow x < \frac{16}{7} \therefore S_5 = \left(-\infty, \frac{16}{7}\right) \cap [4, +\infty) = \phi.$$

$$\therefore S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \Rightarrow S_F = \left(-\infty, \frac{16}{7}\right).$$

$$5) \text{ Resolver } |x| \leq \frac{1}{|x|} - 1.$$

**Solución:**  $x \neq 0$

$$|x|^2 + |x| - 1 \leq 0 \Rightarrow \left(|x| + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \leq 0 \Rightarrow \left(|x| + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \left||x| + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq |x| + \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leq |x| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad x \neq 0.$$

$$\text{i) } -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leq |x| \quad \wedge \quad \text{ii) } |x| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

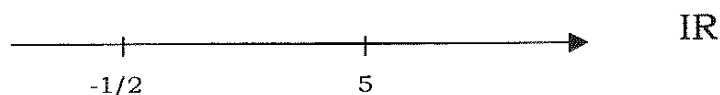
$$S_i = \mathbb{R}.$$

$$S_{ii} : -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\therefore S_F = S_i \cap S_{ii} = \left[-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] - \{0\}.$$

$$6) \text{ Resolver: } \frac{|x-5| - |2x+1|}{x-3} < 0.$$

**Solución:**



$$\text{i) Si } x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-x+5+2x+1}{x-3} = \frac{x+6}{x-3} < 0 \Rightarrow S_1 = (-6, 3) \cap \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) = \left(-6, -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{ii) Si } -\frac{1}{2} \leq x < 5 \Rightarrow \frac{-x+5-2x-1}{x-3} = \frac{-3x+4}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{3x-4}{x-3} > 0 \Rightarrow$$

$$S_2 = \left[ \left( -\infty, \frac{4}{3} \right) \cup (3, +\infty) \right] \cap \left[ -\frac{1}{2}, 5 \right) = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right) \cup (3, 5).$$

$$\text{iii) Si } x \geq 5 \Rightarrow \frac{x-5-2x-1}{x-3} = \frac{-x-6}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{x+6}{x-3} > 0$$

$$\therefore S_3 = \{(-\infty, -6) \cup (3, +\infty)\} \cap [5, +\infty) = [5, +\infty).$$

$$S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left( -6, \frac{4}{3} \right) \cup (3, +\infty).$$

$$7) \text{ Pruebe que si } |x-3| < 4 \Rightarrow |x-5| + |3x-2| < 26.$$

$$\textbf{Solución: } |x-3| < 4 \Rightarrow -4 < x-3 < 4 / -2 \Rightarrow -6 < x-5 < 2 < 6 \Rightarrow |x-5| < 6$$

$$-4 < x-3 < 4 / +3 \Rightarrow -1 < x < 7 / \bullet 3 \Rightarrow -3 < 3x < 21 / -2$$

$$\Rightarrow -19 < -5 < 3x-2 < 19 \Rightarrow |3x-2| < 19$$

$$\therefore |x-5| + |3x-2| < 25 < 26$$

$$\therefore |x-5| + |3x-2| < 26.$$

$$8) \text{ Resolver y expresar la solución final con notación de valor absoluto.}$$

$$\text{i) } \frac{x-2}{x-4} > \frac{x+2}{x}.$$

**Solución:**

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+2}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - x^2 + 2x + 8}{x(x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{8}{x(x-4)} > 0 \Rightarrow x(x-4) > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

$$\Rightarrow x < 0 \vee x > 4$$

$$\Rightarrow x-2 < -2 \vee x-2 > 2 \Rightarrow |x-2| > 2.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x+5}{x+3} < \frac{x+1}{x-1}.$$

**Solución:**  $\frac{x+5}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{x^2+4x-5-x^2-4x-3}{(x+3)(x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{-8}{(x+3)(x-1)} < 0$

$$(x+3)(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow x < -3 \quad \vee \quad x > 1$$

$$\Rightarrow x+1 < -2 \quad \vee \quad x+1 > 2 \Rightarrow |x+1| > 2.$$

$$9) \quad \sqrt{|x-1|-1} + \sqrt{4-|x-1|} \leq \sqrt{2|x-1|+5}.$$

**Solución:** Determinando el universo, se tiene:

$$\text{i)} \quad |x-1|-1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 1 \quad \vee \quad x-1 \leq -1$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq 0 \quad \therefore S_1 = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

$$\text{ii)} \quad 4-|x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-1 \leq 4$$

$$-3 \leq x \leq 5 \quad \therefore S_2 = [-3, 5].$$

$$\text{iii)} \quad |2x-1|+5 \geq 0 \Rightarrow \therefore S_3 = \mathbb{R}.$$

$$\therefore U = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-3, 0] \cup [2, 5].$$

Elevando al cuadrado:

$$|x-1|-1+2\sqrt{|x-1|-1} \cdot \sqrt{4-|x-1|}+4-|x-1| \leq 2|x-1|+5 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{(|x-1|-1)(4-|x-1|)} \leq 2|x-1|+2 \quad / : 2 \quad /^2 \Rightarrow$$

$$(|x-1|-1)(4-|x-1|) \leq |x-1|^2+2|x-1|+1 \Rightarrow$$

$$4|x-1|-|x-1|^2-4+|x-1| \leq |x-1|^2+2|x-1|+1 \Rightarrow$$

$$2|x-1|^2-3|x-1|+5 \geq 0, \text{ como } D < 0, \text{ cierto } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore S = \mathbb{R} \cap U = [-3, 0] \cup [2, 5].$$

10)  $|3x - 1| = 2x + 5$

**Solución:**  $2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2} \Rightarrow U = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ , al aplicar la definición de valor absoluto se tiene:

i) Si  $x < \frac{1}{3} \Rightarrow -3x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow 5x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{5} \therefore S_i = \left\{-\frac{4}{5}\right\} \cap \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

ii) Si  $x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 1 = 2x + 5 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \therefore S_{ii} = \{6\} \cap \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) = \{6\}$

$$\therefore S_F = (S_i \cup S_{ii}) \cap U = \left\{-\frac{4}{5}, 6\right\}$$

### **AXIOMA DEL SUPREMO**

Se demostrará que los números irracionales como  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ , etc., son también números reales. Al hacerlo se utilizará el Axioma del Supremo.

Para desarrollar este axioma se definen los siguientes conceptos:

#### **DEFINICIONES:**

1. Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M$  es cota superior de  $A$  si  $x \leq M, \forall x \in A$ .

**EJEMPLO:** Sea  $A = (-\infty, -\sqrt{2})$  entonces son cotas superiores de  $A$ :

$$-\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \text{ etc.}$$

El conjunto de cotas superiores de  $A$  es  $[-\sqrt{2}, +\infty)$

2. Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , se dice que  $A$  es “**acotado superiormente**”, si  $\exists M \in \mathbb{R}$  tal que  $M$  es cota superior de  $A$ .

**EJEMPLO:**  $(-\infty, 3), (-7, 8), (-1, 2]$  son conjuntos acotados superiormente.

3. Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m$  es cota inferior de  $A$  si  $m \leq x \quad \forall x \in A$

**EJEMPLO:** Sea  $A = [-5, \sqrt{3})$  entonces son cotas inferiores de  $A$ :  
 $-5, -\frac{20}{3}, -12, \text{etc.}$

El conjunto de cotas inferiores de  $A$  es  $(-\infty, -5]$

4. Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , se dice que  $A$  es “**acotado inferiormente**” si  $\exists L \in \mathbb{R}$  tal que  $L$  es cota inferior a  $A$ .

**EJEMPLO:**  $(-5, 0), [2, 3], [4, +\infty)$  son conjuntos acotados inferiormente.

5. Se dice que  $A$  es “acotado”, si lo es inferior y superiormente.

**EJEMPLO:**  $(-5, 2), [4, 7]$  son conjuntos acotados.

6. Sea  $A \subset \mathbb{R}$ . Se dice que “ $s$ ” es el supremo de  $A$ , si:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } s \text{ es cota superior de } A \\ \text{ii) si } b \text{ es cota superior de } A \Rightarrow s \leq b \end{array} \right\} \quad \text{Se denota } s = \text{Sup. } A$$

7. Sea  $A \subset \mathbb{R}$ . Se dice que “ $r$ ” es el infimo de  $A$ , si:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } r \text{ es cota inferior de } A \\ \text{ii) si } a \text{ es cota inferior de } A \Rightarrow r \geq a \end{array} \right\} \quad \text{Se denota } r = \text{Inf. } A$$

8. Si  $\sup A \in A$ , entonces se dice que  $\sup A$  es el elemento máximo de  $A$ .
9. Si  $\inf A \in A$ , entonces se dice que  $\inf A$  es el elemento mínimo de  $A$ .

### **EJEMPLOS:**

1. Considerar el conjunto  $A = (-2, 4)$ , que tiene como cotas superiores 4, 4.2, 5, ..... y como cotas inferiores -2, -4, -5.2, .....  
Luego es un conjunto acotado. Además  $\sup A = 4$  e  $\inf A = -2$ , como 4 y -2 no pertenecen al conjunto, éste no tiene elemento máximo ni mínimo.
2. Considerar el conjunto  $B = [-3, 7)$ . Luego:  
Cotas superiores :  $[7, +\infty)$ . Cotas inferiores:  $(-\infty, -3]$   
Luego B es un conjunto acotado  
 $\sup B = 7 \Rightarrow$  no tiene elemento máximo, ya que  $7 \notin B$ .  
 $\inf B = -3 \Rightarrow -3$  es elemento mínimo, ya que  $-3 \in B$ .

### **AXIOMA DEL SUPREMO:**

Todo conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado superiormente tiene supremo, el cual es un elemento de  $\mathbb{R}$ .

### **OBSERVACIONES:**

- 1) Del axioma se deduce que todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.
- 2) Si un conjunto tiene máximo, éste es también su supremo.
- 3) Si un conjunto tiene mínimo, éste es también su ínfimo.

- 1.- **TEOREMA:** Si  $A \subseteq \mathbb{R}$  y  $A \neq \emptyset$  es acotado superiormente (o acotado inferiormente) entonces:

- i) El  $\sup. A = L$  es único (el  $\inf. A$  es único).  
 ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / x > L - \varepsilon, \quad (\text{ó } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / x < L + \varepsilon)$

**Demostración:**

- i) Sean  $L$  y  $L'$  supremos de  $A$ , entonces  $L \leq L' \wedge L' \leq L$ . Luego  
 $L = L'$   
 ii) Negando la tesis se tiene que:  $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A / x \leq L - \varepsilon$   
 $\therefore L - \varepsilon$  es una cota superior de  $A$ . Es decir:  $L \leq L - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq 0$   
 ¡Contradicción! ¿Por qué?

2.- **TEOREMA:**  $\mathbb{N}$  no es acotado superiormente.

**Demostración:**

Si se supone que  $\mathbb{N}$  es acotado superiormente  $\Rightarrow \mathbb{N}$  tiene supremo.

Sea  $n_0 = \sup. \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n_0 \therefore n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq n_0$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \leq n_0 - 1 \quad \text{¡Contradicción! Ya que } n_0 = \sup. \mathbb{N}$$

3.- **TEOREMA:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / n > x$

**Demostración:**

Si se supone que no es cierto, es decir  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} / n \leq x \Rightarrow$

$\mathbb{N}$  es acotado superiormente ¡Contradicción! ¿Por qué?

4.- **TEOREMA:**  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{n} < x$

**Demostración:**

Si se considera el número  $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$ , según 3, se tiene que:  $\exists n \in \mathbb{N}$

$$/n > \frac{1}{x} \Rightarrow x > \frac{1}{n}$$

### 5.- PROPIEDAD ARQUIMEDIANA:

Sean  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / n \cdot x > y$ .

**Demostración:**

Si se considera el número  $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$ , según 3,

$$\exists n \in \mathbb{N} / n \geq \frac{y}{x} \Rightarrow n \cdot x \geq y \Rightarrow n \cdot x > y.$$

6.- **TEOREMA:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z} / m \leq x \leq p$ .

**Demostración:**

i) P.D.  $m \leq x$

Sea  $(-x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / -x \leq n \Rightarrow x \geq -n$ . Sea  $m = -n \Rightarrow x \geq m$ .

ii) P.D.  $x \leq p$

Según Propiedad 3,  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / n \geq x$

Sea  $n = p \Rightarrow x \leq p$ .

De i) y ii)  $m \leq x \leq p$ .

### EJERCICIO:

Sea  $A = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{2n-3}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ . Demostrar que  $\text{Sup. } A = 2$ .

**Demostración:**

$$\frac{2n-3}{n+1} = 2 - \frac{5}{n+1} < 2, \forall n \in \mathbb{N},$$

$\therefore 2$  es cota superior de  $A$ . Sea  $c < 2$  el sup. de  $A$

$$\Rightarrow 2 - c > 0 \Rightarrow \frac{2-c}{5} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \left| \text{según 4, } \frac{1}{n+1} < \frac{2-c}{5} \Rightarrow \right.$$

$$\frac{5}{n+1} < 2 - c \Rightarrow c < 2 - \frac{5}{n+1} = \frac{2n-3}{n+1} (\Rightarrow \Leftarrow) \therefore \text{Sup. } A = 2.$$

### EXISTENCIA DE RAICES CUADRADAS:

Se sabe que la ecuación  $x^2 = 2$  no tiene solución en  $\mathbb{Q}$ , pero si tiene solución en  $\mathbb{R}$ . La solución positiva de esta ecuación se llama raíz cuadrada de 2.

Si  $a > 0$ ,  $x^2 = a$  tendrá dos soluciones, ya que  $x^2 = (-x)^2 = a$ . Se define como raíz cuadrada de  $a$  a la solución positiva de esta ecuación. Si  $a = 0$ ,  $x^2 = 0$  tendrá  $x = 0$  como única solución.

**TEOREMA:** Todo número real positivo tiene una única raíz cuadrada.

**Demostración:** Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^+ / x^2 \leq a\}$ . Luego se tiene que:

i)  $S \neq \emptyset$ .

ii)  $S$  es acotado superiormente.

i) Sea  $x = \frac{a}{1+a} \in S$ . En efecto como:

$$a - \frac{a^2}{(1+a)^2} = \frac{a + 2a^2 + a^3 - a^2}{(1+a)^2} = \frac{a(a^2 + a + 1)}{(1+a)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2}{(1+a)^2} \leq a \therefore S \neq \emptyset$$

ii)  $x^2 \leq a < (1+a)^2 \Rightarrow x^2 < (1+a)^2 \Rightarrow x < 1+a, \forall x \in S \Rightarrow S$  está acotado superiormente  $\Rightarrow S$  tiene supremo. Sea  $s = \sup S$  ( $s > 0$ ). Se probará que  $s^2 = a$ . Para ello se descartará que  $s^2 > a$  y  $s^2 < a$ .

a) Sean  $s^2 > a$  y el número real.

$$c = s - \frac{s^2 - a}{2s} = \frac{1}{2} \left( s + \frac{a}{s} \right) \Rightarrow c > 0 \wedge c < s$$

$$c^2 = s^2 - (s^2 - a) + \frac{(s^2 - a)^2}{4s^2} = a + \frac{(s^2 - a)^2}{4s^2} > a$$

Luego  $c^2 > a$ , pero  $a \geq x^2, \forall x \in S$

$$\therefore c^2 > x^2, \forall x \in S \Rightarrow x < c, \forall x \in S$$

$\therefore c$  es cota superior de  $S$ , lo que contradice el hecho de que  $s = \text{Sup}.S$ .

b) Sea ahora  $s^2 < a$ . Como  $s > 0 \Rightarrow \frac{a-s^2}{3s} > 0$

y sea el número  $c > 0$ ,  $c < s \wedge c < \frac{a-s^2}{3s}$

( Por ejemplo  $c$  puede ser  $\frac{1}{2} \min \left\{ s, \frac{a-s^2}{3s} \right\}$  ) y si :

$$(c+s)^2 = s^2 + c(2s+c) < s^2 + 3sc < s^2 + (a-s^2) = a$$

$$\therefore (c+s)^2 < a \Rightarrow (c+s) \in S \text{ y como } s = \text{Sup}.S$$

$$\Rightarrow c+s \leq s \Rightarrow c \leq 0 \quad (\Rightarrow \Leftarrow) \text{ porque } c > 0.$$

$$\therefore \text{ de a) y b) } s^2 = a.$$

### **OBSERVACIONES:**

- 1) Dentro del conjunto de los reales existen números que no son racionales, llamados números irracionales.
- 2) Los números irracionales no cumplen con la propiedad de clausura para la adición y multiplicación, por ejemplo:  
 $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4 \in \mathbb{Q}, \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}=7 \in \mathbb{Q}.$
- 3) Se simboliza como  $\mathbb{I}_r = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , al conjunto de los irracionales.

### **LEMA:**

- 1) Sean  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $r \in \mathbb{I}_r \Rightarrow a+r \in \mathbb{I}_r.$
- 2) Sean  $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$  y  $r \in \mathbb{I}_r \Rightarrow a \cdot r \in \mathbb{I}_r.$

### **Demostración:**

- 1) Sea  $a+r=b \in \mathbb{Q} \Rightarrow r=(b-a) \in \mathbb{Q}$ , pero  $r \in \mathbb{I}_r \therefore \Rightarrow \Leftarrow$
- 2) Sea  $a \cdot r=c \in \mathbb{Q} \Rightarrow r=\frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$ , pero  $r \in \mathbb{I}_r \therefore \Rightarrow \Leftarrow$

### PROPIEDAD DE DENSIDAD

Se trata de pensar que la recta numérica está completamente cubierta de números tanto racionales como irracionales.

**TEOREMA:** Sean  $a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} / a < r < b$ .

**Demostración:**

a) Si  $a, b \in \mathbb{Q}$  se obtiene la tesis considerando  $r = \frac{a+b}{2}$ .

b) En general, la demostración sería:

b.1) Sea  $a > 0 \Rightarrow b - a > 0$ . Según teorema 4,  $\exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{n} < b - a$

y según la propiedad arquimediana,  $\exists m \in \mathbb{N} / m \cdot \frac{1}{n} > a$  (\*). Se

elige ahora el menor  $m \in \mathbb{N}$  que cumple (\*), entonces

$\frac{m'}{n} > a$ , pero  $\frac{m' - 1}{n} < a$ . Luego  $\frac{m'}{n} < a + \frac{1}{n} < b$ . Es decir  $a < \frac{m'}{n} < b$ .

Sea  $r = \frac{m'}{n} \in \mathbb{Q}$ .

b.2) Sea  $a < b < 0 \Rightarrow -a > 0$  y por el teorema 3

$\exists m \in \mathbb{N} / m > -a$ , luego se obtiene que:  $0 < m + a < m + b$  y por

b.1.)

$\exists r \in \mathbb{Q}$  tal que  $m + a < r < m + b \Rightarrow a < r - m < b$ , nótese que

$(r - m) \in \mathbb{Q}$  cumple con la tesis.

b.3) El caso  $a < 0, b > 0$ , basta elegir  $r = 0$ .

**OBSERVACIONES:**

- 1) Aplicando el teorema anterior a los números  $a$  y  $r$ , se ve que existe  $r_1 \in \mathbb{Q} / a < r_1 < r$ . Luego se puede concluir que entre dos números reales  $a < b$  hay infinitos números racionales.
- 2) También  $(a, b) \cap \mathbb{Q}$  es un conjunto infinito.

**TEOREMA:** Sean  $r, s \in \mathbb{Q}$ ,  $r < s \Rightarrow \exists y \in \mathbb{H}_r / r < y < s$ .

**Demostración:**

Sea  $r < s$ ,  $x \in \mathbb{H}_r$ ,  $x > 0$  y el número  $y = \frac{rx+s}{1+x}$ , entonces hay que demostrar que:

- i)  $r < y < s$ .
- ii)  $y \in \mathbb{H}_r$ .

En efecto:

$$\text{i) } r = \frac{rx+r}{1+x} < \frac{rx+s}{1+x} < \frac{sx+s}{1+x} = s \quad \therefore r < y < s.$$

$$\text{ii) } \text{Sea } y \in \mathbb{Q}.$$

$$\frac{rx+s}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y-s}{r-y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \Leftarrow \text{ porque } x \in \mathbb{H}_r.$$

**TEOREMA:** Sean  $x, y \in \mathbb{H}_r$ ,  $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{H}_r / x < r < y$ .

**TEOREMA:** Sean  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $b \in \mathbb{H}_r \Rightarrow \exists y \in \mathbb{H}_r / r < y < b$ .

**TEOREMA:** Sean  $a, b \in \mathbb{IR}$ ,  $a < b \Rightarrow \exists y \in \mathbb{H}_r / a < y < b$ .

**OBSERVACIÓN:**  $(a, b) \cap \mathbb{H}_r$  es un conjunto infinito.

Finalmente, se puede concluir que  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo ordenado completo. Además es denso y no numerable.

### EJERCICIOS:

1. Demostrar que en el cuerpo de los números reales, se cumple que:

- a)  $-0 = 0$
- b)  $a + b = a \Rightarrow b = 0$
- c)  $a \cdot 0 = 0$
- d)  $-a = (-1)a$
- e)  $-(-a) = a$
- f)  $(-a)(-b) = ab$
- g)  $1^{-1} = 1$
- h) Si  $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$
- i)  $-a - b = -(a + b)$
- j) Si  $ab \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

2. Aplicando las propiedades de orden en  $\mathbb{R}$ , demostrar que:

- a)  $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$
- b)  $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- c) Si  $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$

3. Demostrar que:

- a)  $a \leq b < 1 \Rightarrow \frac{a-2}{a-1} \leq \frac{b-2}{b-1}$
- b)  $0 < d < c \Rightarrow \frac{c^3}{3} - \frac{d^3}{3} > d^2(c-d)$
- c)  $0 \leq d < c \Rightarrow d^3(c-d) < \frac{c^4}{4} - \frac{d^4}{4} < c^3(c-d)$

$$d) 0 < a < b < c \Rightarrow \frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)} < a + b + c$$

$$e) 0 < a \leq b \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \leq \frac{b^2}{a^3} + 3$$

4. Resolver:

$$a) \frac{x}{x-5} > 6$$

$$\text{Resp.: } x \in (5, 6).$$

$$b) \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} \geq 1$$

$$\text{Resp.: } x \in [3, +\infty).$$

$$c) 2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$$

$$\text{Resp.: } x \in (1, +\infty).$$

$$d) (x^2 + 2)(x^2 - 4) < 0$$

$$\text{Resp.: } x \in (-2, 2).$$

$$e) (x-1)(2x^2 - 12x + 19) < 0$$

$$\text{Resp.: } x \in (-\infty, 1).$$

$$f) 3x^3 - 9x^2 + 11x \leq 5$$

$$\text{Resp.: } x \in (-\infty, 1].$$

$$g) \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 4} \geq 0$$

$$\text{Resp.: } x \in (4, +\infty).$$

$$h) \frac{(2x^2 - 8x + 8)(x + 3)}{x + 6} \geq 0$$

$$\text{Resp.: } x \in (-\infty, -6) \cup [-3, +\infty).$$

$$i) [(x-1)^2 + 2]^1 < 1$$

$$\text{Resp.: } x \in \mathbb{R}.$$

$$j) \frac{2x^2 + x - 1}{2x - x^2} \leq 0$$

$$\text{Resp.: } x \in (-\infty, -1] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (2, +\infty).$$

$$k) \frac{x^2 + 3x - 16}{-x^2 + 7x - 10} \geq 1$$

$$\text{Resp.: } x \in [-1, 2) \cup [3, 5).$$

$$l) \frac{(x+1)^3 - 1}{(x-1)^3 + 1} \geq 1$$

$$\text{Resp.: } x \in \mathbb{R}^+.$$

$$m) \sqrt{x-5} < 1$$

$$\text{Resp.: } x \in [5, 6).$$

$$n) \sqrt{4-3x} \leq x$$

$$\text{Resp.: } x \in \left[1, \frac{4}{3}\right].$$

$$\tilde{n}) \sqrt{2x^2 - 5x - 3} < x + 3$$

$$\text{Resp.: } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, 12).$$

- o)  $\sqrt{2x-1} > x-2$  Resp.:  $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right)$ .
- p)  $\sqrt{x^2-6x+5} + \sqrt{x^2-7x+10} > 0$  Resp.:  $x \in (-\infty, 1] \cup (5, +\infty)$ .
- q)  $\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{x} \geq 1$  Resp.:  $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ .
- r)  $\sqrt{2x^2-x-1} - \sqrt{x^2-4x+3} > 0$  Resp.:  $x \in (-\infty, -4) \cup [3, +\infty)$ .

5. Determinar el valor de "k" de tal manera que la ecuación

$$(k+1)x^2 - (k+1)x + k = 0 \text{ tenga raíces reales iguales. Resp.: } k = \frac{1}{3}.$$

6. Determinar todos los valores reales de "a" de tal manera que:

$$-1 < \frac{2x^2 - ax + 1}{x^2 + 2x + 2} < 3, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Resp.: } a \in (-4, \sqrt{20} - 6).$$

7. Resolver: 
$$\frac{\sqrt[3]{x+5} (x+1)^4 (x+2) \sqrt[3]{x^2-7x+12} \sqrt[4]{8-x}}{\sqrt[6]{x+7} (x-8)^3 (x^3-8) (x^2-14x+48)} \leq 0$$

$$\text{Resp.: } x \in [-5, -2] \cup \{-1\} \cup (2, 3] \cup [4, 6).$$

8. Resolver:

- a)  $|2x-3|=15$  Resp.:  $9$  y  $-6$ .
- b)  $|6x+3|=|18+x|$  Resp.:  $3$  y  $-3$ .
- c)  $|2x+3| < 5$  Resp.:  $x \in (-4, 1)$ .
- d)  $|2x-5| \geq 3$  Resp.:  $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ .
- e)  $|x+8| \leq |x-6|$  Resp.:  $x \in (-\infty, 1]$ .
- f)  $|3x-9| < x+1$  Resp.:  $x \in (2, 5)$ .
- g)  $\left| \frac{3}{4x+1} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \right|$  Resp.:  $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{4}{7}\right] \cup [2, +\infty)$ .

$$h) \quad |2x^2 + x - 1| < |2x^2 - x - 1| \quad \text{Resp.: } x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$i) \quad \sqrt{|x+2|-3} + \sqrt{5-|4-x|} > 0 \quad \text{Resp.: } x \in [1, 9].$$

$$j) \quad \left| \frac{3|x|-1}{x+1} \right| < \frac{1}{x+1} \quad \text{Resp.: } x \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right).$$

$$9. \text{ Sean } A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{1}{x+1} \right| < \left| \frac{x}{x^2+2x+1} \right| \right\} \text{ y } B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x^2+1} > \frac{2}{x} \right\}.$$

$$\text{Determinar } A \cap B \quad \text{Resp.: } x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$

10. Determinar el supremo y el ínfimo, si existen, de:

$$a) \quad A = \{x^2 - 4x - 12 / x \in (-5, 3]\} \quad \text{Resp.: } \begin{array}{l} \sup(A) = 33 \\ \inf(A) = -16 \end{array}$$

$$b) \quad B = \{x \in \mathbb{R} / -x^2 + 2x - 2 > 0\} \quad \text{Resp.: no existen.}$$

$$11. \text{ Sean } A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x|x-3|}{x^2-9} < 0 \right\} \text{ y } B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{\frac{x}{(x+2)(4-x)}} + 2 > 0 \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{2-x} > 0 \right\}. \text{ Determinar, si existen, el supremo y el}$$

$$\text{ínfimo de } D = (A - B^c) \cap C \quad \text{Resp.: } \sup D = 2, \inf D = 1.$$

12. Determinar el supremo y el ínfimo de:

$$A = \left\{ \frac{1-6n}{3n+4} / n \in \mathbb{N} \right\} \text{ y } B = \left\{ \frac{6(-1)^n + 8n}{2n+8} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{Resp.: } \begin{array}{l} \sup(A) = -\frac{5}{7}, \inf(A) = -2. \\ \sup(B) = 4, \inf(B) = 0,2. \end{array}$$

## CAPITULO II

### FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Se estudiará un tipo especial de relaciones entre elementos de un conjunto A y de un conjunto B, denominada “**Funciones**” de A en B. La palabra función se usa con frecuencia para indicar una relación o dependencia de una cantidad respecto a otra. En matemática el concepto de función tiene una interpretación semejante, pero más especializada.

#### **EJEMPLOS:**

- i) El área de un círculo es una función de su radio.
- ii) El asignar a cada país del mundo su capital, es una función.

Una función  $f$  es una regla o una correspondencia que relaciona dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del primer conjunto, denominado dominio de  $f$ , le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto, denominado conjunto de llegada.

#### **EJEMPLO:**

Sea  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{x, y\}$ .

Por lo tanto,  $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$ .

Sean  $M = \{(a, x), (a, y), (b, x), (c, y)\}$ ;  $N = \{(a, x), (b, y)\}$  y

$R = \{(a, x), (b, y), (c, y)\}$ , subconjuntos de  $A \times B$ .

Entonces  $M$  no es función, ya que  $a$  está relacionado con  $x$  e  $y$ .

$N$  no es función, ya que  $c \in A$  y  $c$  no está relacionado con ningún elemento de  $B$ .  $R$  es función. ¿Porqué?

**DEFINICIÓN:** Se denomina función de  $A$  en  $B$  a toda relación  $f \subseteq A \times B$  que satisface las siguientes propiedades:

- i)  $Dom(f) = A$  (Propiedad de Existencia),
- ii)  $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$  (Propiedad de Unicidad).

**OBSERVACION:** La definición de función establece esencialmente lo siguiente:

“Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función es una ley de correspondencia que asigna a cada elemento de  $A$  uno y sólo un elemento de  $B$ ”.

**NOTACION:** Se denota a la función en la forma:  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f(x) = y$  que se lee: “ $f$  es función de  $A$  en  $B$  tal que la imagen de  $x \in A$ , bajo  $f$ , es  $y = f(x) \in B$ ”.

Así se tiene que: El **dominio de  $f$** , simbolizado por  $dom(f)$ , es el conjunto constituido por todos los elementos que poseen imagen bajo  $f$ , y el **recorrido de  $f$** , simbolizado por  $rec(f)$ , es el conjunto formado por todas las imágenes bajo  $f$ .

Por lo tanto,  $rec(f) \subseteq B$ .

#### **OBSERVACIONES:**

1. Si  $(x, y) \in f$  se denota  $y = f(x)$ , que significa que  $y$  es la imagen de  $x$  según  $f$ .
2. No es necesario que todo elemento  $y \in B$  sea imagen de algún  $x \in A$ .
3. El conjunto  $\{y \in B / \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$  se llama rango, recorrido o contra dominio de  $f$  y  $\{x \in A / \exists f(x)\}$  se llama dominio de  $f$ .
4. En lo sucesivo se supondrá que  $A$  y  $B$  son conjuntos de números reales, es decir  $f$  es función real de variable real.

5. Como el valor de  $y$  depende del valor de  $x$ , se dice que “ $y$ ” es la variable dependiente y “ $x$ ” es la variable independiente.
6. Una función  $f$  se considera bien definida, si se conoce de ella su expresión analítica ( $y = f(x)$ ) y su dominio. De este modo si no está explicitado el dominio de una función  $y$  se conoce su expresión analítica, se debe establecer su dominio.

### **GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN:**

Las funciones reales se pueden representar geométricamente por una gráfica en el plano cartesiano  $XY$ .

**DEFINICIÓN:** Se define gráfica de una función  $f$  como :

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in A = (Dom f) \wedge y = f(x)\}.$$

Para que una gráfica corresponda a una función, toda recta paralela al eje  $y$  debe interceptar a la gráfica en un solo punto,  $\forall x \in dom f$ .

**DEFINICIÓN:** Se define ceros de una función  $f$ , a la abscisa del punto de intersección de la gráfica de  $f$  con el eje  $X$ .

### **EJEMPLOS:**

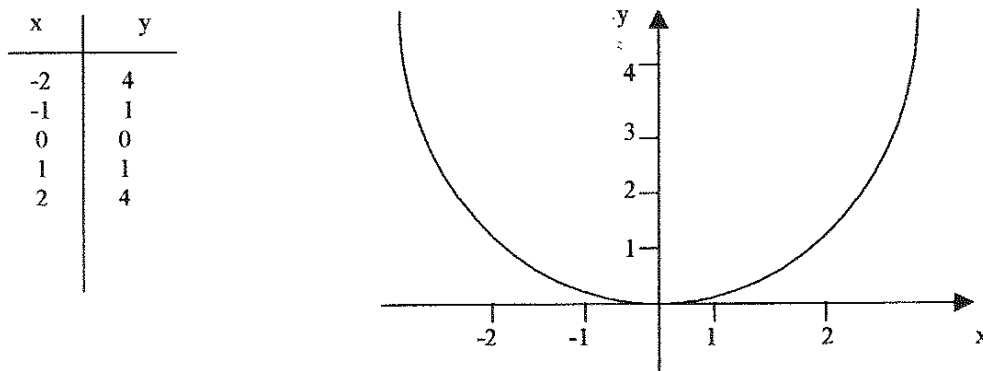
1. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = f(x) = x^2$ . Hallar  $dom(f), rec(f)$  y gráfica de  $f$ .

**Solución:**

Como  $x$  puede tomar cualquier valor real, entonces  $dom f = \mathbb{R}$ .

Como  $y = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow rec f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Gráfica:



2. Sea  $g(x) = \sqrt{1-x}$ . Determinar  $\text{dom } g$  y  $\text{rec } g$ .

**Solución:**

Esta función está bien definida si  $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

$$\therefore \text{dom } g = (-\infty, 1].$$

$$\text{rec } g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \text{ en efecto : como } 1-x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0.$$

3. Una función también puede definirse por tramos.

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ si } x < 0 ; f_1 \\ 1+x & , \text{ si } 0 \leq x \leq 1 ; f_2 \end{cases}$$

Determinar  $\text{dom } f$ ,  $\text{rec } f$  y gráfica de  $f$ .

**Solución:**

A partir de  $f(x)$  se tiene que:

$$\text{dom } f = \text{dom } f_1 \cup \text{dom } f_2, \text{ luego } \text{dom } f = (-\infty, 0) \cup [0, 1] = (-\infty, 1].$$

Para  $\text{rec } f$ :

$$\text{i) } y = x^2, \therefore y \geq 0, \text{ pero } x < 0 \therefore y > 0$$

$$\text{rec } f_1 = \mathbb{R}^+$$

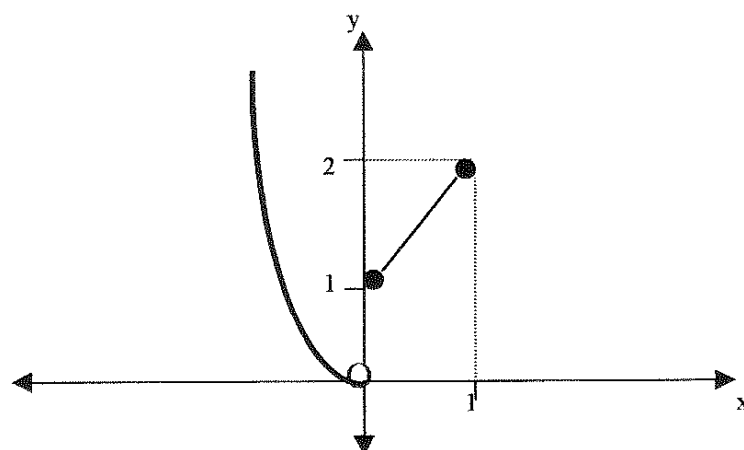
$$\text{ii) } 0 \leq x \leq 1 \quad / \quad +1$$

$$1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\therefore y \in [1,2] \Rightarrow \text{rec } f_2 = [1,2].$$

$$\therefore \text{rec } f = \text{rec } f_1 \cup \text{rec } f_2 = \mathbb{R}^+ \cup [1,2] = \mathbb{R}^+.$$

Gráfica:



4. Sea la función:

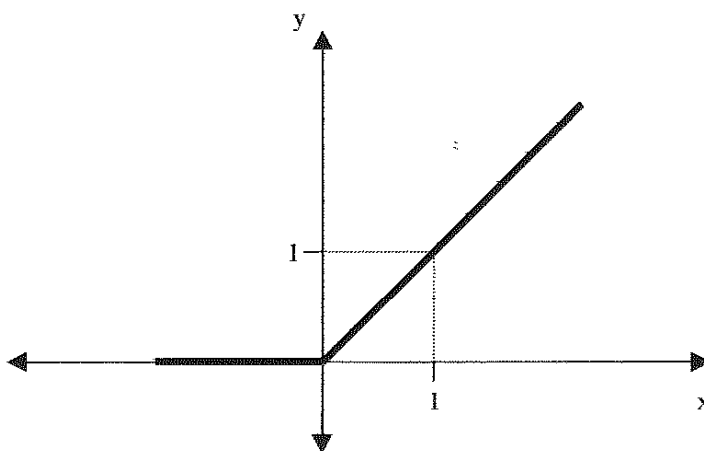
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; f_1 \\ x, & \text{si } x > 0; f_2 \end{cases}$$

Determinar  $\text{dom } f$ ,  $\text{rec } f$  y gráfica de  $f$ .

**Solución:**  $\text{dom } f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$ .

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x) = 0, \forall x \leq 0 \Rightarrow \text{rec } f_1 = \{0\} \\ f_2(x) = x, \forall x > 0 \Rightarrow \text{rec } f_2 = \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rec } f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Gráfica:



5. Definida una función en el intervalo  $-2 \leq x \leq 8$  por  $f(x) = x^2$ , determinar  $f(4)$ ;  $f(-3)$ ;  $f(t-3)$ , si es que existen.

**Solución:**

$$f(4) = 4^2 = 16.$$

$f(-3)$  no está definida ya que  $-3 \notin [-2, 8]$ .

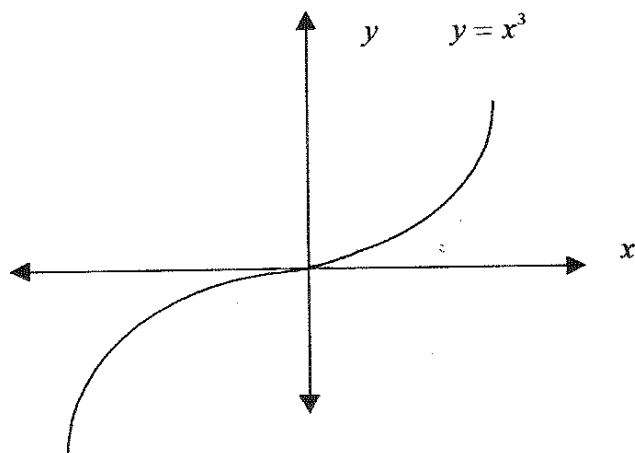
$f(t-3) = (t-3)^2$  existe si  $t-3 \in \text{dom } f$ , es decir,  $-2 \leq t-3 \leq 8 \Rightarrow 1 \leq t \leq 11$ .

6. Sea  $f(x) = x^3$ . Determinar  $\text{dom } f$ ,  $\text{rec } f$  y gráfica de  $f$ .

**Solución:**  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ , ya que  $x$  puede tomar cualquier valor real.

$\text{rec } f = \mathbb{R}$ , ya que  $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$  siendo  $\sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ .

Gráfica:



7. Sea  $f(r) = \begin{cases} r^2, & \text{si } r \in [-1, 2]; f_1 \\ 3r+1, & \text{si } r \in (2, 4]; f_2 \end{cases}$

Determinar  $\text{dom } f$ ,  $\text{rec } f$  y gráfica de  $f$ .

**Solución:**

$$\therefore \text{dom } f = \text{dom } f_1 \cup \text{dom } f_2 = [-1, 2] \cup (2, 4] = [-1, 4].$$

i)  $\text{rec } f_1$ : como  $-1 \leq r \leq 2 \Rightarrow$

$$-1 \leq r \leq 0 \vee 0 < r \leq 2 \Rightarrow$$

$$0 \leq r^2 \leq 1 \vee 0 < r^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 4$$

$$\therefore \text{rec } f_1 = [0, 4].$$

ii)  $\text{rec } f_2$ : como  $2 < r \leq 4 / \cdot 3 \Rightarrow$

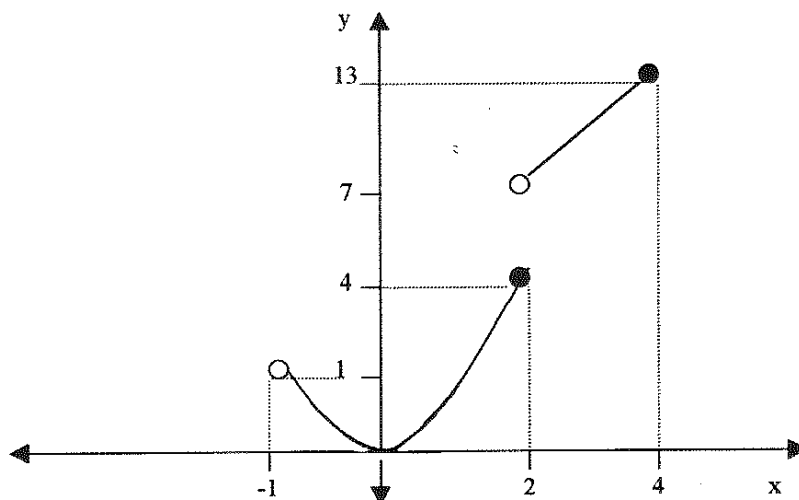
$$6 < 3r \leq 12 / +1 \Rightarrow$$

$$7 < 3r + 1 \leq 13$$

$$\therefore \text{rec } f_2 = (7, 13].$$

$$\therefore \text{rec } f = [0, 4] \cup (7, 13].$$

Gráfica:



8. Sea  $f(x) = 7 + \sqrt{3x-6}$ , función de variable real. Determinar  $\text{dom } f$  y  $\text{rec } f$ .

**Solución:**

- i)  $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{3x-6} \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$   
 $\therefore \text{dom } f = [2, +\infty)$ .
- ii) Para determinar el recorrido se puede proceder de dos formas:
- a)  $\sqrt{3x-6} \geq 0 \wedge +7 \Rightarrow 7 + \sqrt{3x-6} \geq 7 \Rightarrow y \geq 7 \Rightarrow \text{rec } f = [7, +\infty)$ .
- b) Como  $y = 7 + \sqrt{3x-6} \Rightarrow y-7 = \sqrt{3x-6} \Rightarrow y-7 \geq 0 \Rightarrow y \geq 7$   
 $\therefore \text{rec } f = [7, +\infty)$ .

9. Sea  $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$ . Determinar  $\text{dom } f$  y  $\text{rec } f$ .

**Solución:**

- i)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0$ . Como  $\sqrt{x}$  está en el denominador,  $x > 0$   
 $\therefore \text{dom } f = \mathbb{R}^+$

iii) Como  $x > 0 \Rightarrow x+1 > 1$  y como  $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{1+x}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow y > 0$ . Además,

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{x}} \Rightarrow x^2 + (2-y^2)x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{(y^2-2) \pm y\sqrt{y^2-4}}{2} \Rightarrow y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$y \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty). \text{ Como } y > 0, \text{ se tiene que } \text{rec } f = [2, +\infty)$$

10. Hallar dominio, recorrido y gráfica de:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 3; h_1 \\ 2x - 5, & \text{si } x \geq 3; h_2 \end{cases}$$

**Solución:**

i)  $\text{dom } h = (-\infty, 3) \cup [3, +\infty) = \mathbb{R}$

ii) Para  $h_1(x); x < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \vee x \leq 0 \Rightarrow$

$$0 \leq x^2 < 9 \vee x^2 > 0 \Rightarrow -4 \leq x^2 - 4 < 5 \vee x^2 - 4 > -4 \Rightarrow$$

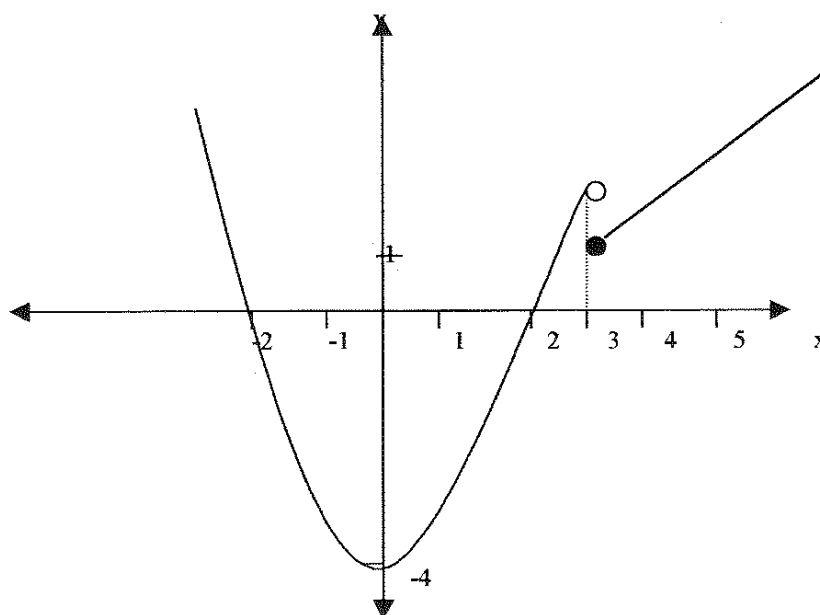
$$x^2 - 4 \geq -4 \therefore \text{rec } h_1 = [-4, +\infty)$$

Para  $h_2(x); x \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow 2x - 5 \geq 1$

$$\therefore \text{rec } h_2 = [1, +\infty)$$

$$\therefore \text{rec } h = [-4, +\infty) \cup [1, +\infty) = [-4, +\infty)$$

Gráfica:



11. Hallar el recorrido de:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 14} & , \text{ si } -5 \leq x < 2; f_1 \\ -3 & , \text{ si } 2 \leq x < 4; f_2 \end{cases}$$

**Solución:**

i) Para  $f_1(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 14} = 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 13}$

$$-5 \leq x < 2 \Leftrightarrow -6 \leq x-1 < 1 \leq 6 \Leftrightarrow |x-1| \leq 6$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 36 \Rightarrow 13 \leq (x-1)^2 + 13 \leq 49$$

$$\Rightarrow \sqrt{13} \leq \sqrt{(x-1)^2 + 13} \leq 7 \Rightarrow 1 + \sqrt{13} \leq 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 13} \leq 8$$

$$\therefore \text{rec } f_1 = [1 + \sqrt{13}, 8].$$

ii) Para  $f_2(x) = -3 \therefore \text{rec } f_2 = \{-3\}.$

$$\therefore \text{rec } f = [1 + \sqrt{13}, 8] \cup \{-3\}.$$

**IGUALDAD DE FUNCIONES:** Sean  $f$  y  $g$  funciones reales de variable real. Se dice que  $f = g$ , si y sólo si:

i)  $\text{dom } f = \text{dom } g.$

ii)  $f(x) = g(x), \forall x \in \text{dom } f = \text{dom } g.$

**EJEMPLOS:**

1. Sean  $f(x) = x^2, x \in [0, +\infty)$  y  $g(x) = x^2, x \in (-\infty, 0]$

¿Es  $f = g$ ?

**Solución:** Como  $\text{dom } f = [0, +\infty) \neq (-\infty, 0] = \text{dom } g \therefore f \neq g.$

2. Sean  $f(x) = \sqrt{2x-1} \sqrt{x+2}$  y  $g(x) = \sqrt{(2x-1)(x+2)},$

¿Es  $f = g$ ?

**Solución:**

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \geq 0 \wedge x + 2 \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{1}{2} \wedge x \geq -2\}$$

$$= \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

$$\text{dom } g = \{x \in \mathbb{R} / (2x - 1)(x + 2) \geq 0\}$$

$$= (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Como  $\text{dom } f \neq \text{dom } g$

$$f \neq g.$$

### ALGEBRA DE FUNCIONES

**DEFINICIÓN:** Sean  $f$  y  $g$  funciones cuyos dominios respectivos son  $\text{dom}(f)$  y  $\text{dom}(g)$ , su suma  $(f + g)$ , su diferencia  $(f - g)$ , su producto

$(f \bullet g)$ , su cociente  $\left(\frac{f}{g}\right)$  son las funciones definidas por:

$$\text{i)} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{ii)} \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{iii)} \quad (f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$$

$$\text{iv)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

$$\text{v)} \quad (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \forall x \in \text{dom } f, \lambda \in \mathbb{R},$$

donde el dominio correspondiente es:  $\text{dom}(f \pm g) = \text{dom}(f \bullet g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$$

**EJEMPLOS:**

1) Dadas las funciones  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = \frac{1}{x}$  y  $h(x) = \sin x$ .

Encontrar:

i)  $(f+g)(-2)$

ii)  $(f \circ h)\left(\frac{\pi}{3}\right)$

iii)  $\left(\frac{h}{g}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$

iv) Determinar  $f+g$  y  $\frac{g}{f \circ h}$  con su dominio.

**Solución:**

i)  $(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = (-2)^2 + \frac{1}{-2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$

ii)  $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pi^2}{18}.$

iii)  $\left(\frac{h}{g}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{2}.$

iv) a)  $\text{dom}(f+g)$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}; \quad \text{dom } g = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \text{dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

la expresión analítica de  $(f+g)$  es:

$$(f+g)(x) = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 1}{x}.$$

b)  $\text{dom}\left(\frac{g}{f \circ h}\right) = \text{dom } g \cap \text{dom}(f \circ h) - \{x \in \mathbb{R} / (f \circ h)(x) = 0\}$

$$= \text{dom } g \cap \text{dom } f \cap \text{dom } h - \{x \in \mathbb{R} / (f \circ h)(x) = 0\}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}; \quad \text{dom } h = \mathbb{R} \quad \therefore \text{dom}(f \circ h) = \mathbb{R}.$$

$$y \text{ dom} \left( \frac{g}{f \bullet h} \right) = \text{dom } g \cap \text{dom}(f \bullet h) - \{x \in \mathbb{R} / (f \bullet h)(x) = 0\} =$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \cap [ \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / (f \bullet h)(x) = 0\} ]$$

$$\text{pero } (f \bullet h)(x) = x^2 \bullet \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x^2 \sin x \neq 0 \text{ para } x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{dom} \left( \frac{g}{f \bullet h} \right) = (\mathbb{R} - \{0\}) - \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \mathbb{R} - \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

la expresión analítica de:  $\frac{g}{f \bullet h}$  es:

$$\left( \frac{g}{f \bullet h} \right)(x) = \frac{g(x)}{f(x) \bullet h(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{x^2 \bullet \sin x} = \frac{1}{x^3 \sin x}.$$

2. Sea  $f(x) = \frac{1}{x-3}$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ .

Determinar  $(f+g)(x)$  y su dominio.

**Solución:**

$$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{3\}; \text{ dom } g = \mathbb{R}_0^+ \quad \therefore \text{dom } (f+g) = \mathbb{R}_0^+ - \{3\}.$$

La expresión analítica de  $f+g$  es:

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x}.$$

3. Sea  $f(x) = \frac{1}{x+5}$  y  $g(x) = -2x^3$ .

Determinar  $(f \bullet g)(x)$  y su dominio.

**Solución:**

$$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{-5\}, \text{ dom } g = \mathbb{R}, \quad \therefore \text{dom } (f \bullet g) = \mathbb{R} - \{-5\}$$

la expresión analítica de  $f \bullet g$  es:

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+5}(-2x^3) = -\frac{2x^3}{x+5}.$$

4. Sea  $f(x) = \sqrt{x+6}$  y  $g(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ .

Determinar:  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  y su dominio.

**Solución:**

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x+6 \geq 0\} \Rightarrow \text{dom } f = [-6, +\infty).$$

$$\text{dom } g = \mathbb{R} - \{2, -2\}; g(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\therefore \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [-6, +\infty) \cap (\mathbb{R} - \{2, -2\}) - \{0\}.$$

$$\therefore \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [-6, +\infty) - \{2, 0, -2\}.$$

la expresión analítica de  $\frac{f}{g}$  es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{\frac{2x}{x^2-4}} = \frac{(x^2-4)\sqrt{x+6}}{2x}.$$

5. Sean  $f$  y  $g$  funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & x < -2 \\ 2 - 3x, & x \geq -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x > -2 \\ x^2 + 3x, & x \leq -2 \end{cases}$$

Determinar  $f+g$  y su dominio:

**Solución:**

$$\text{Sean } f_1(x) = x^2 - 5x, \quad x < -2$$

$$f_2(x) = 2 - 3x, \quad x \geq -2$$

$$g_1(x) = 2x - 4, x > -2$$

$$g_2(x) = x^2 + 3x, x \leq -2$$

Luego:

$$\text{dom}(f + g) = \text{dom}(f_1 + g_1) \cup \text{dom}(f_1 + g_2) \cup \text{dom}(f_2 + g_1) \cup \text{dom}(f_2 + g_2)$$

$$\text{dom}(f_1 + g_1) = \text{dom } f_1 \cap \text{dom } g_1 = (-\infty, -2) \cap (-2, +\infty) = \emptyset.$$

$\therefore (f_1 + g_1)(x)$  no existe.

$$\text{dom}(f_1 + g_2) = \text{dom } f_1 \cap \text{dom } g_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -2] = (-\infty, -2).$$

$$\therefore (f_1 + g_2)(x) = f_1(x) + g_2(x) = x^2 - 5x + x^2 + 3x = 2x^2 - 2x.$$

$$\text{dom}(f_2 + g_1) = \text{dom } f_2 \cap \text{dom } g_1 = [-2, +\infty) \cap (-2, +\infty) = (-2, +\infty).$$

$$\therefore (f_2 + g_1)(x) = f_2(x) + g_1(x) = 2 - 3x + 2x - 4 = -x - 2.$$

$$\text{dom}(f_2 + g_2) = \text{dom } f_2 \cap \text{dom } g_2 = [-2, +\infty) \cap (-\infty, -2] = \{-2\}.$$

$$\therefore (f_2 + g_2)(x) = f_2(x) + g_2(x) = 2 - 3x + x^2 + 3x = x^2 + 2.$$

$$\therefore (f + g)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x, & \text{si } x < -2 \\ -x - 2, & \text{si } x > -2 \\ x^2 + 2, & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

### **CLASES ESPECIALES DE FUNCIONES**

#### **FUNCIONES INYECTIVAS O UNO A UNO:**

Sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$ , entonces se dice que  $f$  es inyectiva si  $a$  elementos distintos de  $A$  le corresponden elementos distintos de  $B$ . Es decir,  $f: A \rightarrow B$  es inyectiva ssi.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \quad \vee \quad a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b), \forall a, b \in A.$$

#### **EJEMPLOS:**

1. Sea  $f(x) = 2x + 3$  definida en  $\mathbb{R}$  es inyectiva, ya que:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow 2a + 3 = 2b + 3 \\ &\Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

2. La función  $f(x) = x^2$  definida en  $\mathbb{R}$ , no es inyectiva, ya que:

$$\text{si } x = 3 \Rightarrow f(3) = 9$$

$$\text{si } x = -3 \Rightarrow f(-3) = 9$$

Es decir, a dos elementos distintos del dominio le corresponde la misma imagen.

Esta función se puede hacer inyectiva restringiendo su dominio. Para ello se procede de la siguiente forma:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(a-b)(a+b) = 0 \Rightarrow a = b \quad \vee \quad a+b = 0$$

$a+b=0$  se cumple en el dominio de esta función. Luego para eliminar esta posibilidad y que sólo quede con  $a=b$ , se reemplaza esta última igualdad en  $a+b=0$ , y se obtiene:  $a+b=0 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0$ . Esta cantidad nos indica donde se debe cortar el dominio de la función dada, es decir, su nuevo dominio debe ser  $\mathbb{R}_0^+$  ó  $\mathbb{R}_0^-$ . Luego la función  $f$  es inyectiva si se define como:

$$f_1: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} / f_1(x) = x^2 \quad \text{ó}$$

$$f_2: \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R} / f_2(x) = x^2.$$

3. Demostrar que  $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ ;  $x \neq -2$  es inyectiva.

**Demostración:**

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a-2}{a+2} = \frac{b-2}{b+2} \Rightarrow (a-2)(b+2) = (a+2)(b-2)$$

$$\Rightarrow ab + 2a - 2b - 4 = ab - 2a + 2b - 4 \Rightarrow 4(a-b) = 0$$

$$\therefore a = b, \therefore f \text{ es inyectiva.}$$

4. Demostrar que  $f(x) = 5 - \sqrt{5-x^2} + 2x$ ;  $\forall x \in (-1,0)$  es inyectiva y determinar su recorrido.

**Solución:**

$$\text{a) Como } -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < -x^2 < 0 \Rightarrow 4 < 5 - x^2 < 5 \quad (*)$$

$$\text{Además: } -1 < x < 0 \Rightarrow -2 < 2x < 0 \quad (**)$$

Sumando: (\*) y (\*\*), se obtiene:

$$2 < 5 - x^2 + 2x < 5 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{5 - x^2 + 2x} < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{5} < -\sqrt{5 - x^2 + 2x} < -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 5 - \sqrt{5} < 5 - \sqrt{5 - x^2 + 2x} < 5 - \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{rec } f = (5 - \sqrt{5}, 5 - \sqrt{2}).$$

$$\text{b) } f(a) = f(b) \Rightarrow 5 - \sqrt{5 - a^2 + 2a} = 5 - \sqrt{5 - b^2 + 2b}$$

$$-a^2 + 2a + 5 = -b^2 + 2b + 5$$

$$a^2 - 2a = b^2 - 2b$$

$$(a - b)(a + b - 2) = 0$$

$$\therefore a = b \quad \vee \quad a + b = 2$$

pero  $-1 < a < 0$ ,

$$\frac{-1 < b < 0}{-2 < a + b < 0}$$

$\therefore a + b = 2$  no se cumple  $\therefore f$  es inyectiva.

### OBSERVACIONES:

1. Si una función  $f$  está definida por tramos, como por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \text{dom } f_1 = A \\ f_2(x), & x \in \text{dom } f_2 = B \\ f_3(x), & x \in \text{dom } f_3 = C \end{cases}$$

siendo  $A, B$  y  $C$  conjunto disjuntos entre si, ella es inyectiva si:

- i) Cada función tramo es inyectiva en su dominio.
- ii) Los recorridos no se interceptan dos a dos.

2.- Gráficamente se puede reconocer si una función es inyectiva, cuando se trazan rectas paralelas al eje  $x$  y cada una de ellas interceptan la gráfica de  $f$  en un solo punto.

### EJEMPLOS:

1.- Demostrar que :  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in (-\infty, 0]; f_1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, +\infty); f_2 \end{cases}$  es inyectiva.

#### Demostración:

i)  $f_1(x) = -x^2$

$$f_1(a) = f_1(b) \Rightarrow -a^2 = -b^2 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Rightarrow a = b \vee a+b = 0$$

pero  $a+b=0$  si y sólo si  $a=b=0$  ya que  $a, b \in (-\infty, 0] \therefore a=b$  y  $f_1(x)$  es inyectiva.

Además  $\text{rec } f_1 = \mathbb{R}_0^-$ .

ii)  $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$f_2(a) = f_2(b) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \Rightarrow a = b \therefore f_2(x) \text{ es inyectiva}$$

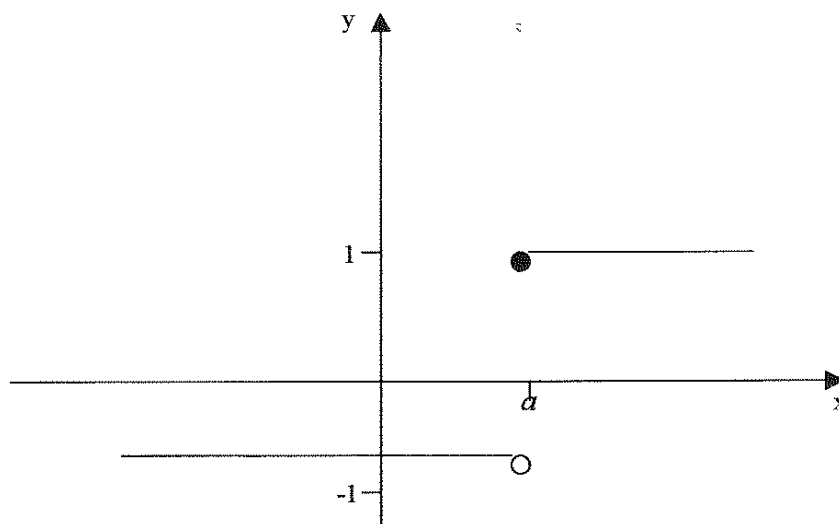
Además  $\text{rec } f_2 = \mathbb{R}^+$

De i) y ii)  $\text{rec } f_1(x) \cap \text{rec } f_2(x) = \emptyset$ .

$\therefore f(x)$  es inyectiva en todo su dominio.

2. Sea  $u_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq a \\ -1, & \text{si } x < a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$

Gráficamente se tiene:



Según observación N° 2 anterior, esta función no es inyectiva.

3. Sea  $f(r) = 2^r$ . Esta función es inyectiva ya que

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 2^a = 2^b \Rightarrow a = b$$

### **FUNCIONES EPIYECTIVAS O SOBREYECTIVA.**

Sea  $f: A \rightarrow B$ , entonces se dice que  $f$  es sobreyectiva si y sólo si todo elemento de  $B$  es imagen de al menos un elemento de  $A$ , es decir,  $f$  es sobreyectiva si y sólo si:

$$\text{i) } \text{rec } f = B \qquad \text{ii) } \forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y$$

**EJEMPLO:**

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2$ . Determinar si es sobreyectiva.

$\text{dom } f = \mathbb{R}, \text{rec } f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \therefore \text{rec } f \neq \mathbb{R} \Rightarrow f$  no es sobreyectiva  $f$  será sobreyectiva si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} / f(x) = x^2$

**FUNCIONES BIYECTIVAS:**

Cuando una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez,  $f$  se dice biyectiva.

**OBSERVACION:**

Una función que no es biyectiva, puede serlo, si se efectúan restricciones en su dominio y/o recorrido.

**EJEMPLOS:**

1. Sea  $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$  tal que  $f(x) = \frac{x}{x-3}$ . ¿Es  $f$  biyectiva?

**Solución:**

$$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{3\}.$$

- i) Se verificará si  $f$  es inyectiva:  $f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a}{a-3} = \frac{b}{b-3} \Rightarrow$

$$a(b-3) = b(a-3) \Rightarrow ab - 3a = ba - 3b \Rightarrow a = b$$

$\therefore f(x)$  es inyectiva.

- ii) Se verificará si  $f$  es sobreyectiva, para ello se determina su

$$\text{recorrido: } y = \frac{x}{x-3} \Rightarrow yx - 3y = x \Rightarrow x(y-1) = 3y, \therefore x = \frac{3y}{y-1}$$

$\text{rec } f = \mathbb{R} - \{1\} = \text{conjunto de llegada}, \therefore f$  es sobreyectiva.

De i) y ii)  $f$  es biyectiva.

2. Sea  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  /  $f(x) = x^3 + 1$ . Determinar si  $f$  es biyectiva.

En caso de no serlo, haga las restricciones necesarias para que lo sea.

i) Se verificará si  $f$  es inyectiva:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^3 + 1 = b^3 + 1 \Rightarrow a^3 = b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

pero  $a^2 + ab + b^2 \neq 0$  ya que sus raíces son complejas.

$\therefore a = b \quad \therefore f$  es inyectiva.

ii) Se verificará si  $f$  es sobreyectiva:

$$y = x^3 + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \geq 0 \Rightarrow y-1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

$\therefore \text{rec } f = [1, +\infty) \neq [0, +\infty) \quad \therefore f$  no es sobreyectiva.

De i) y ii)  $f$  no es biyectiva. Para que lo sea, es necesario definirla como:

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) \quad / \quad f(x) = x^3 + 1.$$

3. Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow (-\infty, 0]$  /  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Determinar si  $f$  es biyectiva.

**Solución:**

i) Se verificará si  $f$  es inyectiva:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{b+1}{b-1} \Rightarrow a = b \quad \therefore f \text{ es inyectiva.}$$

ii) Se verificará si  $f$  es sobreyectiva:

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1+y}{y-1}; \quad y \neq 1.$$

$$\text{Según } \text{dom } f \quad -1 \leq \frac{1+y}{y-1} < 1 \Rightarrow$$

$$-1 \leq \frac{1+y}{y-1} \Rightarrow \frac{1+y}{y-1} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+y+y-1}{y-1} = \frac{2y}{y-1} \geq 0$$

$$y \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

$$\frac{1+y}{y-1} < 1 \Rightarrow \frac{1+y-y+1}{y-1} < 0 \Rightarrow \frac{2}{y-1} < 0 \Rightarrow y-1 < 0 \Rightarrow y < 1$$

$\therefore y \in [(-\infty, 0] \cup (1+\infty)] \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 0] = \text{rec } f$ .  $\therefore f$  es sobreyectiva.

$\therefore$  de i) y ii)  $f$  es biyectiva.

4. Sea  $f: \mathbb{R} - \{1, -3\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ . Determinar si  $f$  es

biyectiva.

En caso negativo, hacer las restricciones necesarias para que lo sea.

**Solución:**

i) Se verificará si  $f$  es inyectiva.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{(a-1)(a+1)}{(a+3)(a-1)} = \frac{(b-1)(b+1)}{(b+3)(b-1)} \Rightarrow \frac{a+1}{a+3} = \frac{b+1}{b+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab + 3a + b + 3 = ab + 3b + a + 3 \Rightarrow a = b.$$

$\therefore f$  es inyectiva.

ii) Se verificará si  $f$  es sobreyectiva:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow y = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow yx + 3y = x + 1$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 1-3y \Rightarrow x = \frac{1-3y}{y-1}; y \neq 1$$

$$\text{Como : } x \neq 1, \text{ si : } x = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \therefore y \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{Como : } x \neq -3, \text{ si : } x = -3 \Rightarrow -3y + 3y = -2 \Rightarrow 0 = -2 \text{ falso}$$

$$\therefore \text{rec } f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{1}{2}\right\}, \therefore f \text{ no es sobreyectiva.}$$

De i) y ii)  $f$  no es biyectiva.

$$f \text{ será biyectiva si } f: \mathbb{R} - \{1, -3\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{1, \frac{1}{2}\right\}.$$

5. Sea  $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ . Determinar si  $f$  es biyectiva.

En caso de no serlo hacer las restricciones necesarias para que lo sea.

**Solución:**

- i) Se verificará si  $f$  es inyectiva.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{1+a^2}{1-a^2} = \frac{1+b^2}{1-b^2} \Rightarrow 1-b^2+a^2-a^2b^2 = 1+b^2-a^2-a^2b^2 \Rightarrow$$

$$(a-b)(a+b) = 0.$$

$\therefore a=b \vee a+b=0 \therefore f$  no es inyectiva. Para que lo sea, se reemplaza  $a=b$  en  $a+b=0 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0$ . Esto significa que el dominio de  $f$  debe cortarse en  $x=0$ , obteniéndose:

$$\text{dom } f = \mathbb{R}_0^- - \{-1\} \vee \text{dom } f = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}.$$

- ii) Se verificará si  $f$  es sobreyectiva:

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow y - yx^2 = 1+x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y-1}{1+y}}, \therefore \frac{y-1}{1+y} \geq 0$$

$$\therefore y \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

$$\text{si } x = -1 \Rightarrow y - y = 1+1 \Rightarrow 2=0, \text{ falso}$$

$$\text{si } x = 1 \Rightarrow y - y = 1+1 \Rightarrow 2=0, \text{ falso}$$

$\therefore \text{rec } f = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$  no es sobreyectiva. Para que lo sea el conjunto de llegada de  $f$  debe ser  $\text{rec } f$ .

Si se define  $f$  como:

$$f: \mathbb{R}_0^+ - \{1\} \rightarrow (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \quad \text{ó} \quad f: \mathbb{R}_0^- - \{-1\} \rightarrow (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

$f$  es biyectiva.

6. Sea  $f: \mathbb{R} - (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 2$ . Determinar si  $f$  es biyectiva. En caso de no serlo hacer las restricciones necesarias para que lo sea.

**Solución:**

- i) Se verificará si  $f$  es inyectiva:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \sqrt{a^2 - 1} + 2 = \sqrt{b^2 - 1} + 2 \Rightarrow a^2 - 1 = b^2 - 1 \Rightarrow a^2 = b^2$$

$\Rightarrow a = b \vee a + b = 0$ . Luego  $f$  no es inyectiva. Para que lo sea se reemplaza  $a = b$  en  $a + b = 0 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$ . Luego  $f$  es inyectiva si  $\text{dom } f = (-\infty, -1] \vee \text{dom } f = [1, +\infty)$ .

- ii) Se verificará si  $f$  es sobreyectiva:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = y - 2 \Rightarrow y - 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$$

$\therefore \text{rec } f = [2, +\infty) \neq \mathbb{R} \therefore f$  no es sobreyectiva.

$f$  será biyectiva si:  $f: (-\infty, -1] \rightarrow [2, +\infty) \vee f: [1, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$ .

7. Sea  $f: A \rightarrow (1, 10] / f(x) = \frac{4 - 11x}{4 - 2x}$ .

- i) Determinar  $A$ .  
ii) Analizar la biyectividad de  $f$ . Redefinir  $f$  en caso necesario.

**Solución:**

i)  $1 < y = \frac{4 - 11x}{4 - 2x} \leq 10$

$$1 < \frac{4 - 11x}{4 - 2x} \Rightarrow \frac{4 - 11x}{4 - 2x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{4 - 11x - 4 + 2x}{4 - 2x} = \frac{-9x}{4 - 2x} > 0$$

$$\therefore \frac{9x}{4 - 2x} < 0 \Rightarrow \frac{9x}{2x - 4} > 0 \therefore x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$\frac{4-11x}{4-2x} \leq 10 \Rightarrow \frac{4-11x-40+20x}{4-2x} \leq \frac{9x-36}{4-2x} = \frac{9(x-4)}{-2(x-2)} \leq 0$$

$$\therefore \frac{9(x-4)}{2(x-2)} \geq 0, \therefore x \in (-\infty, 2) \cup [4, +\infty)$$

$$\therefore A = (-\infty, 0) \cup [4, +\infty) = \text{dom } f.$$

ii) Se verificará si es inyectiva:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{4-11a}{4-2a} = \frac{4-11b}{4-2b} \Rightarrow a = b, \therefore f \text{ es inyectiva.}$$

Se verificará si  $f$  es sobreyectiva:

$$y = \frac{4-11x}{4-2x} \Rightarrow 4y - 2xy = 4 - 11x \Rightarrow x = \frac{4(1-y)}{11-2y} = \frac{4(y-1)}{2y-11}, \therefore y \neq \frac{11}{2}$$

$$\text{Si } y = \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{11}{2} = \frac{4-11x}{4-2x} \Rightarrow 44 - 22x = 8 - 22x \Rightarrow 44 = 8, \text{ falso.}$$

$$\therefore \text{rec } f = (1, 10] - \left\{ \frac{11}{2} \right\} \neq (1, 10], \therefore f \text{ no es sobreyectiva.}$$

$$\therefore f \text{ es biyectiva redefiniéndola como: } f : (-\infty, 0) \cup [4, +\infty) \rightarrow (1, 10] - \left\{ \frac{11}{2} \right\}.$$

## CARACTERISTICAS GRAFICAS DE UNA FUNCION

### I.- FUNCIONES PARES E IMPARES:

#### **DEFINICIÓN:**

Se dice que  $f$  es una función par si,  $f(-x) = f(x), \forall x \in \text{dom } f$ , lo que significa que la gráfica de  $f$  es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

#### **EJEMPLO:**

$$f(x) = 3x^2; \quad f(x) = |x|; \quad f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

**DEFINICIÓN:**

Se dice que  $f$  es una función impar, si  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \text{dom } f - \{0\}$ , lo que significa que la gráfica de  $f$  es simétrica respecto al origen.

**EJEMPLO:**

$$f(x) = \sin x; \quad f(x) = x^3; \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \geq 0 \\ -2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**OBSERVACIÓN:**

Cualquier función puede representarse como la suma de una función par con una impar.

$$\text{Sea } f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{h(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{g(x)}$$

Como  $h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \Rightarrow h(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2}$ ,  $\therefore h(x) = h(-x) \Rightarrow h(x)$  es función par.

$$\text{Como } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \Rightarrow g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = \frac{-[f(x) - f(-x)]}{2} = -g(x)$$

$\therefore g(-x) = -g(x) \Rightarrow g(x)$  es función impar.

**EJEMPLOS:**

1. Sea  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Verificar que  $f$  es impar.

**Solución:**

$$f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -\left[\frac{x}{1+x^2}\right] = -f(x), \quad \therefore f \text{ es impar.}$$

2. Sea  $f(x) = x^2 + 4$ . Verificar que  $f$  es par.

**Solución:**

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x) \quad \therefore f \text{ es par.}$$

3. Sea  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Hallar la parte par e impar.

**Solución:**

$$f_p(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{(-x)^2 + (-x) + 1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x^2 - x + 1} \right)$$

$$f_p(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 - x + 1 + x^2 + x + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{(-x)^2 + (-x) + 1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1} \right)$$

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 - x + 1 - x^2 - x - 1}{x^4 + x^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{-x}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\therefore f(x) = \underbrace{\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{-x}{x^4 + x^2 + 1}}_{\text{impar}}$$

4. Verificar que  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-2, -1) \\ 0, & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 1, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$  es par.

**Solución:**

P.D.  $f(x) = f(-x)$

i) Si  $-2 \leq x < -1 \Rightarrow 1 < -x \leq 2 \Rightarrow f(-x) = 1$

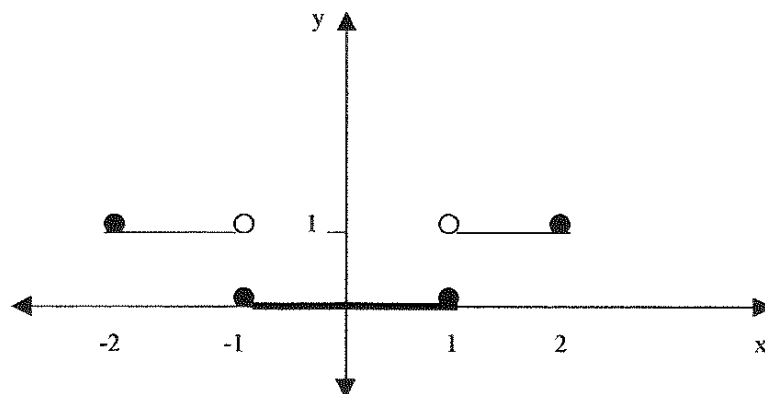
ii) Si  $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Rightarrow f(-x) = 0$

iii) Si  $1 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x < -1 \Rightarrow f(-x) = 1$

$$\therefore f(-x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-2, -1) \\ 0, & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 1, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$\therefore f(-x) = f(x), \text{ } f \text{ es par.}$$

Gráfica:



5. Sea  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -1, & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$ , verificar si  $f$  es impar.

**Solución:**

P.D.  $f(-x) = -f(x)$ .

i) Si  $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x \leq 1 \Rightarrow f(-x) = -1$

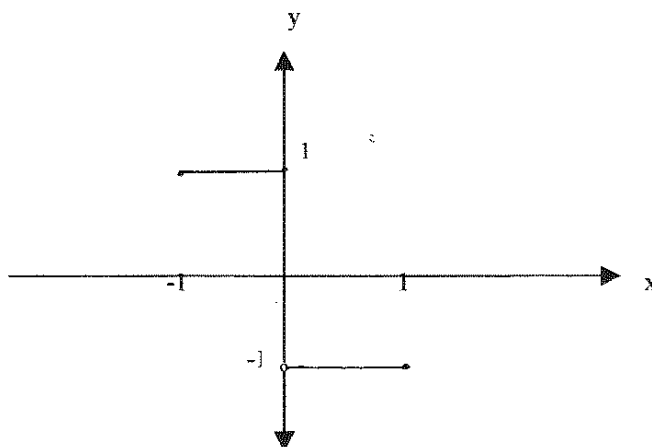
ii) Si  $0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow f(-x) = 1$

iii) Si  $x = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow f(-x) = 1$

$$\therefore f(-x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 1, & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$f(x) = -f(-x), \therefore f \text{ es impar.}$$

Gráfica: de  $f(x)$



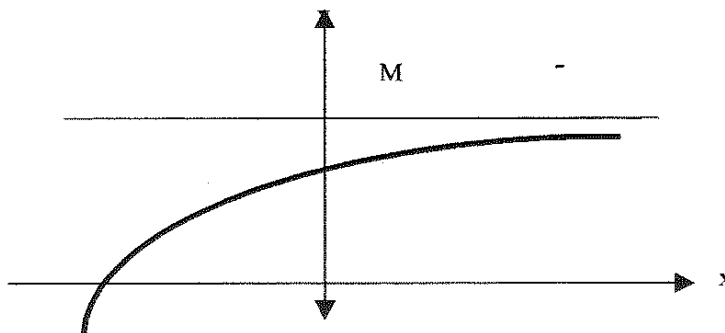
## II.- FUNCIONES ACOTADAS

### DEFINICIÓN:

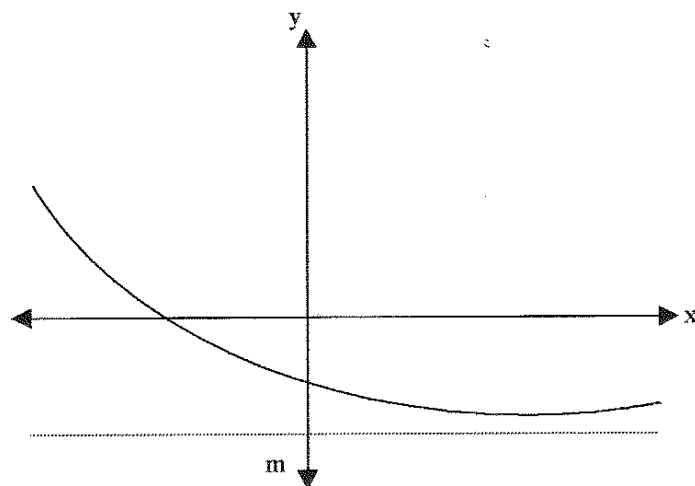
- 1.- Sea  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que la función  $f$  es acotada superiormente si:

$$\exists M \in \mathbb{R} / f(x) \leq M, \forall x \in A$$

El significado geométrico de esta definición indica que  $f$  es acotada superiormente, si su gráfica queda debajo de la recta  $y = M$

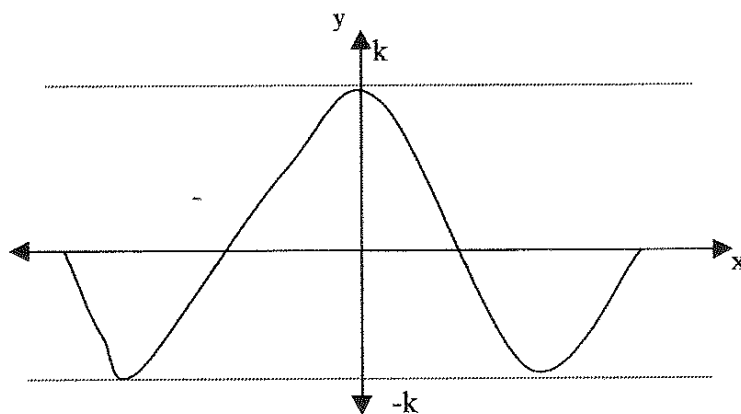


- 2.- Sea  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que la función  $f$  es acotada inferiormente, si  $\exists m \in \mathbb{R} / f(x) \geq m, \forall x \in A$ .



El significado geométrico de esta definición indica que  $f$  es acotada inferiormente, si su gráfica queda sobre la recta  $y = m$ .

- 3.- Se dice que  $f$  es acotada, si lo es superior e inferiormente. Si es acotada, su gráfica quedará contenida en una franja horizontal. Luego debe existir  $k \in \mathbb{R}^+ / |f(x)| \leq k$ .



**EJEMPLOS:**

1.-  $f(x) = \sin x$  es acotada ya que  $|\sin x| \leq 1$ .

2.-  $f(x) = \cos x$  es acotada ya que  $|\cos x| \leq 1$ .

3.-  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  es acotada ya que  $0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$ .

4.-  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  es acotada ya que:

$$\text{como } (1+x)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq -2x / : x^2 + 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \geq \frac{-2x}{x^2 + 1}, x^2 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{-2x}{x^2 + 1} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$(1-x)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x / : x^2 + 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \geq \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{x}{x^2 + 1}$$

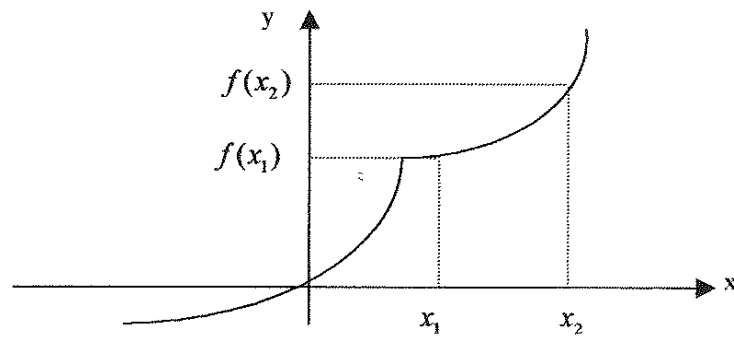
$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \quad \therefore \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}$$

5.-  $f(x) = \frac{1}{x}$  no es acotada, ya que  $\text{rec } f = \mathbb{R} - \{0\}$ .

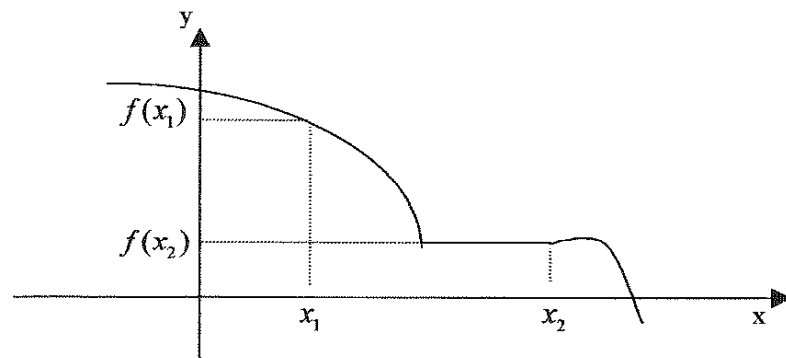
**III.- FUNCIONES MONOTONAS:**

**DEFINICIÓN:** Sea  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que:

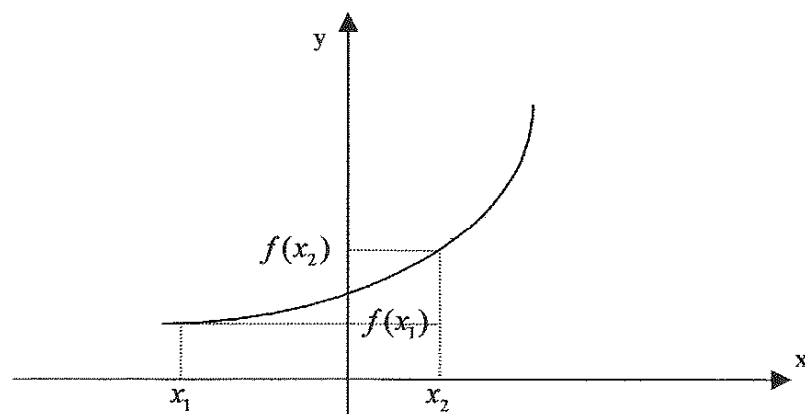
1.-  $f$  es creciente si:  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .



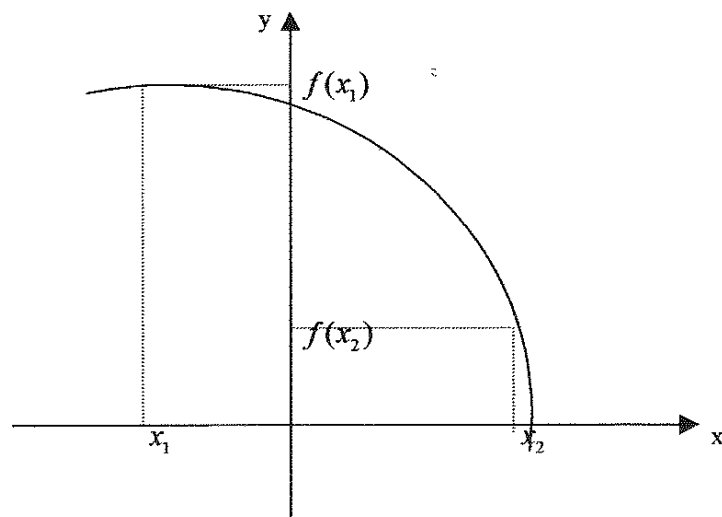
2.-  $f$  es decreciente si:  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .



3.-  $f$  es estrictamente creciente si:  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

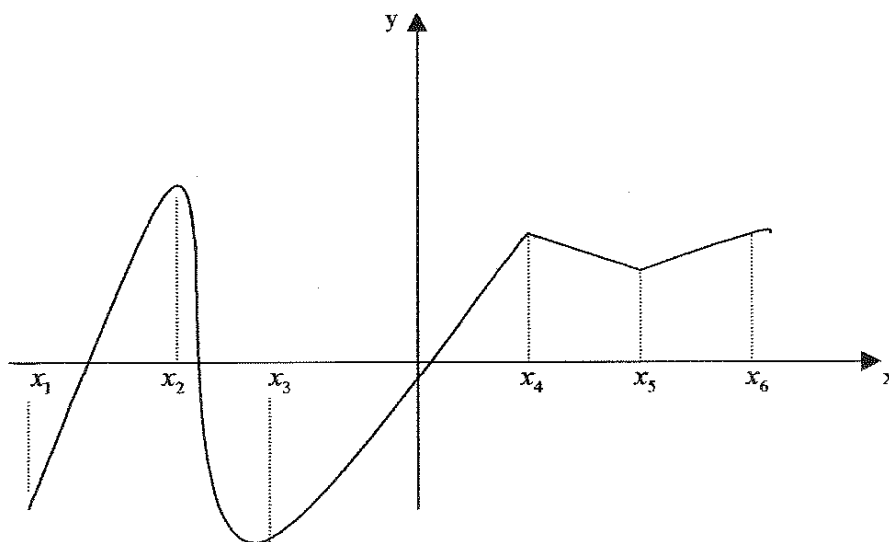


4.-  $f$  es estrictamente decreciente si:  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .



Una función  $f$  definida en un conjunto  $A$  es monótona, si es uno de los cuatro casos definidos anteriormente.

Sea el siguiente gráfico:



Se observa que la función correspondiente no es monótona en su dominio  $[x_1, x_6]$ . Sin embargo ella es creciente en los intervalos:  $[x_1, x_2]$ ;  $[x_3, x_4]$ ;  $[x_5, x_6]$  y decreciente en los intervalos:  $[x_2, x_3]$ ;  $[x_4, x_5]$ .

### EJEMPLOS:

1.- Sea  $f(x) = 3x + 2$ . Determinar su monotonía:

**Solución:**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\therefore f$  es estrictamente creciente.

2.- Sea  $f(x) = -2x - 1$ . Determinar su monotonía:

**Solución:**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 - 1 > -2x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$\therefore f$  es estrictamente decreciente.

3.- Sea  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ . Determinar su monotonía:

**Solución:**

Como es una función par y considerando que el  $\text{dom } f = [-3, 3]$ , se tiene:

$$x_1, x_2 \in [-3, 0]$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_2 < -x_1 \Rightarrow (-x_2)^2 < (-x_1)^2 \Rightarrow x_2^2 < x_1^2 \Rightarrow -x_2^2 > -x_1^2 \Rightarrow$$

$$9 - x_2^2 > 9 - x_1^2 \Rightarrow \sqrt{9 - x_2^2} > \sqrt{9 - x_1^2} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$\therefore f$  es creciente en  $[-3, 0]$  y como  $f$  es par, entonces en  $(0, 3]$  es decreciente.

4.- Demostrar que  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  es monótona creciente en  $(1, +\infty)$ .

**Solución:**

Sea  $1 < x_1 < x_2$  P.D.  $f(x_1) < f(x_2)$ .

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} < x_2 - x_1, \text{ ya que } x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} < x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + x_1 < \frac{1}{x_2} + x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

**IV.- FUNCIONES PERIODICAS.**

**DEFINICIÓN:** Una función  $f$  se denomina “Función Periódica” si existe un número  $T \neq 0$  tal que:

$$1.- x \in \text{dom } f \Rightarrow (x+T) \in \text{dom } f,$$

$$2.- f(x+T) = f(x), \forall x \in \text{dom } f.$$

El número  $T$  se denomina “Período de  $f$ ”.

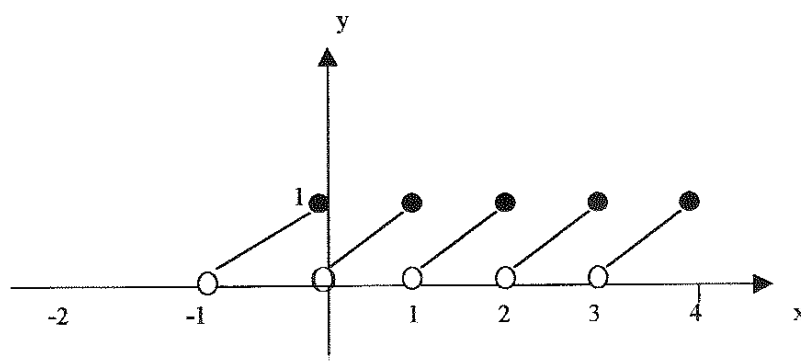
**EJEMPLO:** Las funciones seno y coseno tienen período  $2\pi$ ;  $\sin(x+2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(x+2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

También son períodos de estas funciones  $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  en general  $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ , siendo  $2\pi$  el menor período positivo.

**DEFINICIÓN:** Se llama período fundamental de  $f$  al menor de los períodos positivos.

**EJEMPLOS:**

- 1.- Determinar una expresión analítica para la función de la figura dada y calcular  $f(1000,4)$ .



**Solución:**

i)  $f(x) = x, 0 < x \leq 1$ . Además se observa que

$f(x+1) = f(x), f(x+2) = f(x), f(x+3) = f(x), \dots$  etc. Como período fundamental se tiene  $T=1$ ,

Luego la expresión analítica es:  $f(x) = x, x \in (0,1]$  y periódica de período  $T=1$ ,

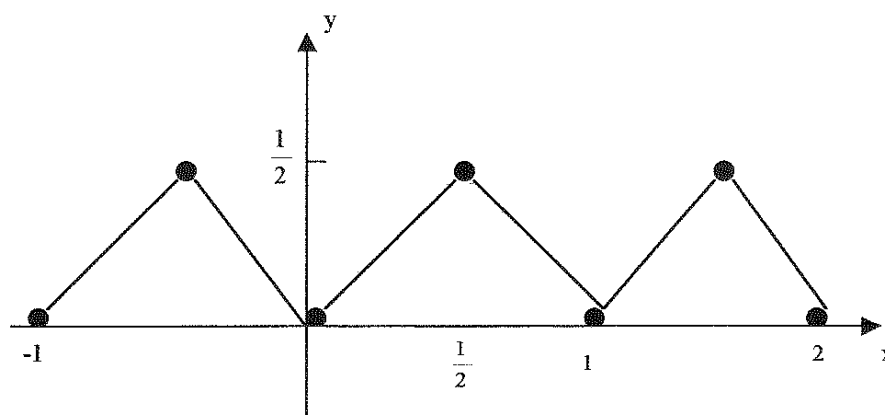
ii)  $f(1000,4) = f(1000 + 0,4) = f(0,4) = 0,4$ ,

2.- Se define la función  $f(x) = \{x\}$  como la distancia de  $x$  al entero más próximo, es decir  $\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}; \left\{\frac{5}{4}\right\} = \frac{1}{4}; \{n\} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

- a) Graficar  $\{x\}$ .
- b) Probar que  $\{x\}$  es periódica y determinar su período.

**Solución:**

a) Gráfica



b) Según gráfico  $T=1$ . Se probará que  $f(x) = f(x+1)$ .

i) Si  $0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \{x\} = x \wedge f(x+1) = \{x+1\} = x$ , ya que

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left\{\frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4} \wedge f\left(\frac{1}{4}+1\right) = \left\{\frac{1}{4}+1\right\} = \frac{1}{4}.$$

ii) Si  $\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = \{x\} = 1-x \wedge f(x+1) = \{x+1\} = 1-x$ , ya que

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left\{\frac{3}{4}\right\} = \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4} \wedge f\left(\frac{3}{4}+1\right) = \left\{\frac{7}{4}\right\} = \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4}.$$

$\therefore f(x) = f(x+1)$  es periódica con  $T = 1$ .

3.- Sea  $f(x) = \sin 4x$ ,  $g(x) = \cos x$ ,  $F(x) = \cos 4x$ ,  $G(x) = \sin x$ . Probar que  $4(f \bullet g + F \bullet G) + 6(F \bullet g - f \bullet G)$  es periódica y hallar el período fundamental.

**Solución:**

$$4(f \bullet g + F \bullet G) = 4(\sin 4x \bullet \cos x + \cos 4x \bullet \sin x)$$

$$4(f \bullet g + F \bullet G) = 4 \sin (4x + x)$$

$$4(f \bullet g + F \bullet G) = 4 \sin 5x$$

$$6(F \bullet g - f \bullet G) = 6(\cos 4x \bullet \cos x - \sin 4x \bullet \sin x)$$

$$6(F \bullet g - f \bullet G) = 6 \cos (4x + x)$$

$$6(F \bullet g - f \bullet G) = 6 \cos 5x$$

$$\therefore \text{Sea } h(x) = 4 \sin 5x + 6 \cos 5x$$

$$h(x+T) = 4 \sin 5(x+T) + 6 \cos 5(x+T)$$

$$= 4 \sin (5x + 5T) + 6 \cos (5x + 5T)$$

como  $\sin x$  y  $\cos x$  son periódicas de período  $2\pi \Rightarrow 5T = 2\pi \therefore T = \frac{2\pi}{5}$

$$h\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = 4 \sin (5x + 2\pi) + 6 \cos (5x + 2\pi)$$

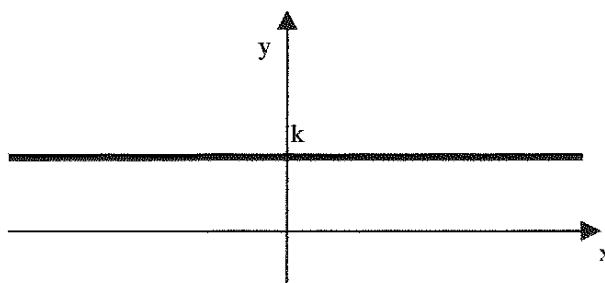
$$\therefore h(x) = h\left(x + \frac{2\pi}{5}\right), \text{ siendo } T = \frac{2\pi}{5}.$$

## **FUNCIONES ESPECIALES**

### **1.- FUNCION CONSTANTE:**

Es de la forma  $f(x) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Luego  $\text{dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{rec } f = \{k\}$ .

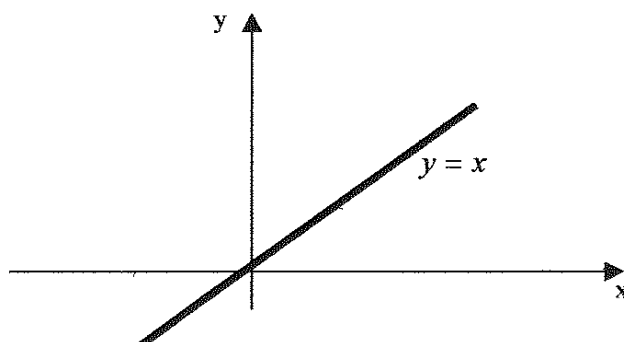
- La función no es inyectiva.
- La función es par.
- Su gráfica es una recta paralela o coincidente con el eje x.



### **2.- FUNCION IDENTICA:**

Es de la forma  $f(x) = x$  ó también se simboliza por  $I(x) = x$ ,  $\text{dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{rec } f = \mathbb{R}$ .

- La función es biyectiva.
- La función es impar y monótona creciente.
- Su gráfica es una recta que biseca al I y III cuadrante.

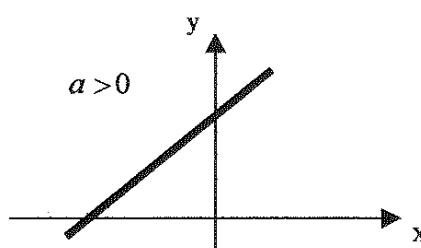
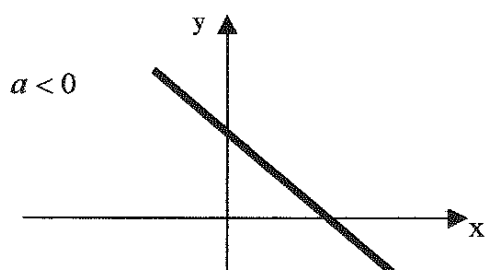


### 3.- FUNCION LINEAL:

Es de la forma  $f(x) = ax + b$ ;  $a \neq 0$   $a, b \in \mathbb{R}$ .

$\text{dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{rec } f = \mathbb{R}$ .

- La función es biyectiva.
- Si  $a < 0$ ,  $f$  es monótona estrictamente decreciente y si  $a > 0$ ,  $f$  es monótona estrictamente creciente.
- Su gráfica es una recta.



### 4.- FUNCION CUADRATICA:

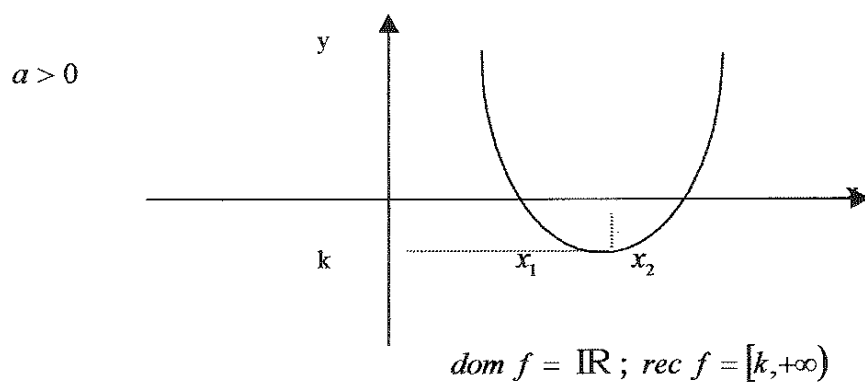
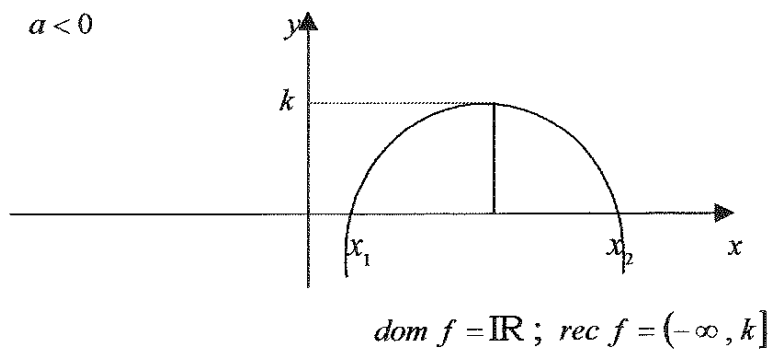
Es de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$   $a, b, c \in \mathbb{R}$ .  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ . El recorrido se determinará en cada caso particular.

Su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia arriba si  $a > 0$ , y se abre hacia abajo si  $a < 0$ .

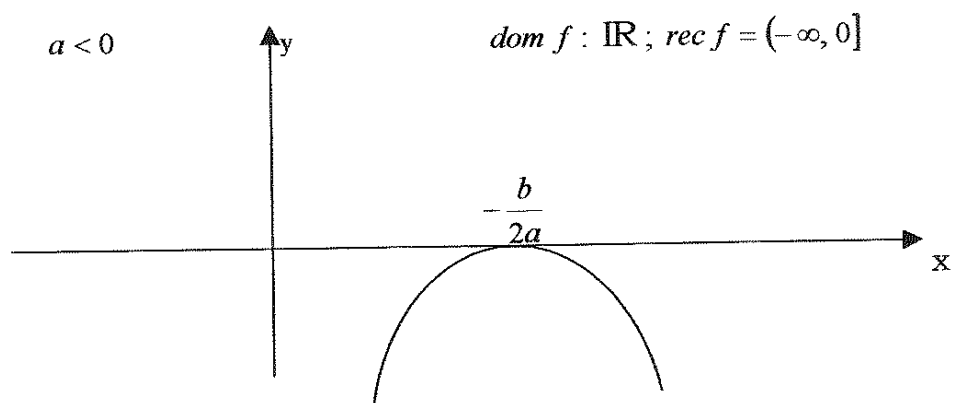
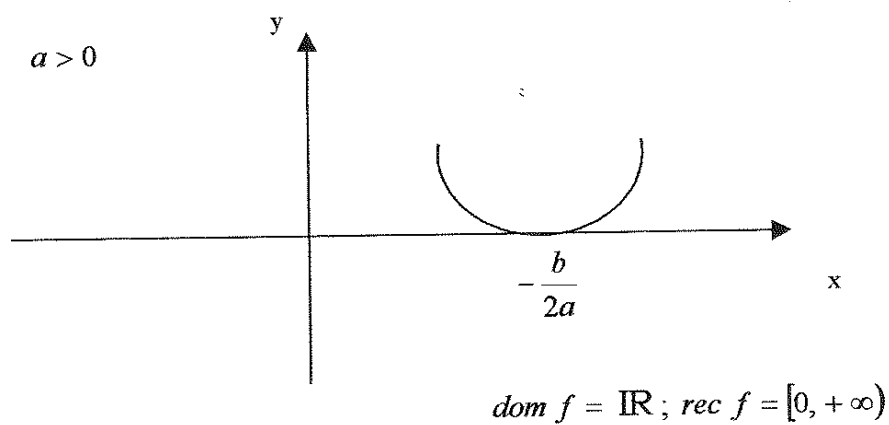
Los ceros de  $f$  se obtienen resolviendo la ecuación ;

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) Si  $b^2 - 4ac > 0$ , la parábola intercepta en 2 puntos al eje x.

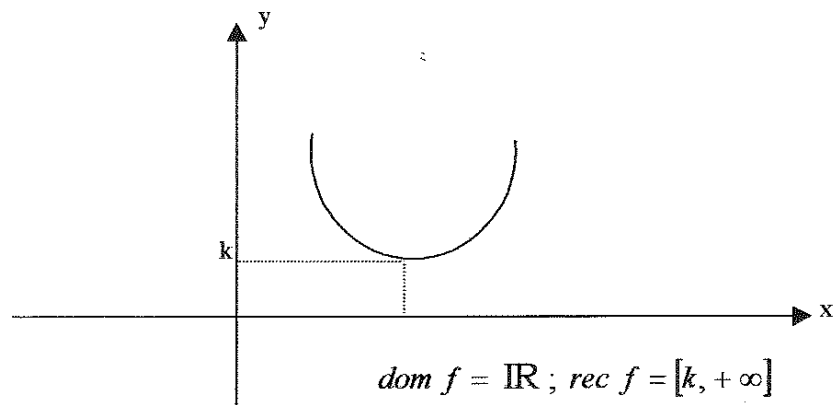


b) Si  $b^2 - 4ac = 0$ , la parábola intercepta en un punto al eje x.

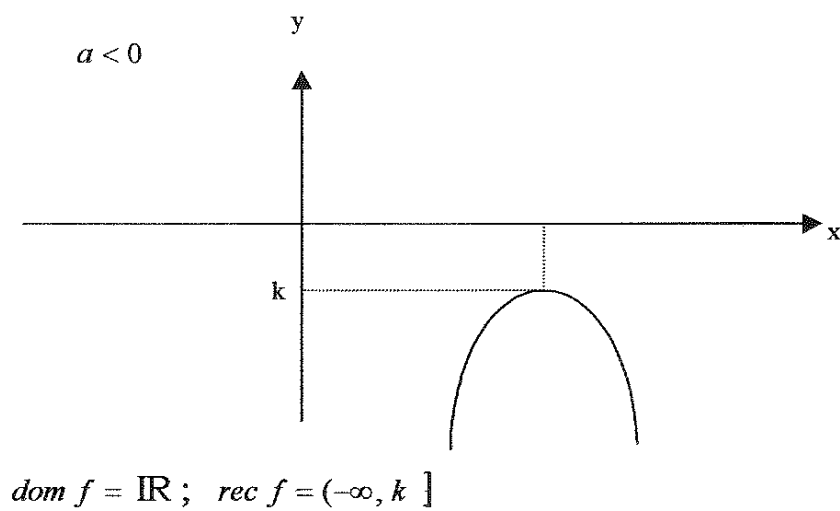


c) Si  $b^2 - 4ac < 0$ , la parábola no intercepta al eje x.

$$a > 0$$



$$a < 0$$



### 5.- FUNCION POLINOMICA:

Sea  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  de grado  $n$ , con  $a_n \neq 0$ .

$a_n$  se llama coeficiente principal,  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $\text{dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{rec } f$  se determinará en cada caso.

**EJEMPLOS:** Función constante, función lineal, función cuadrática, etc.

### 6.- FUNCION RACIONAL:

Es de la forma  $y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , siendo  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones polinómicas  $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} / q(x) \neq 0\}$ .

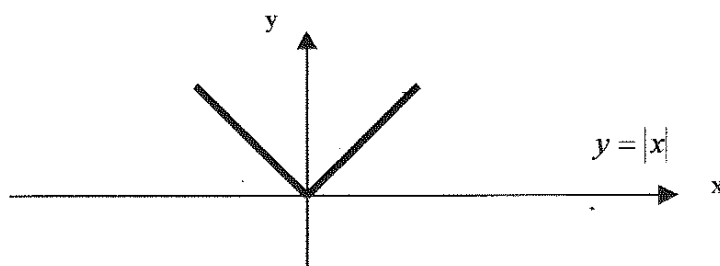
Algunos ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}; f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}; f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}.$$

### 7.- FUNCION VALOR ABSOLUTO:

Es de la forma  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

siendo  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ ,  $\text{rec } f = \mathbb{R}_0^+$ .

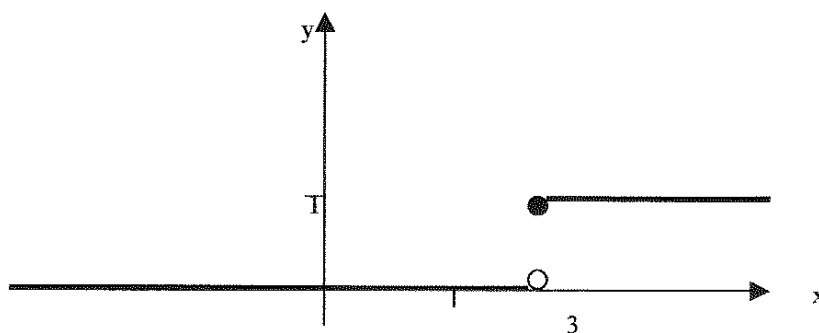


### 8.- FUNCION ESCALON UNITARIO

Es de la forma  $f(x) = u_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1, & \text{si } x \geq a \end{cases}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , siendo  $\text{dom} f = \mathbb{R}$   
y  $\text{rec } f = \{0,1\}$

**EJEMPLO:** Sea  $a = 3$

$$u_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



### 9.- FUNCION PARTE ENTERA

Es de la forma  $f(x) = [x]$ .

Se define  $[x]$  como el mayor de todos los números enteros menores o iguales a  $x$ ; es decir  $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

**EJEMPLOS:**

1.-  $f(3,2) = [3,2] = 3$

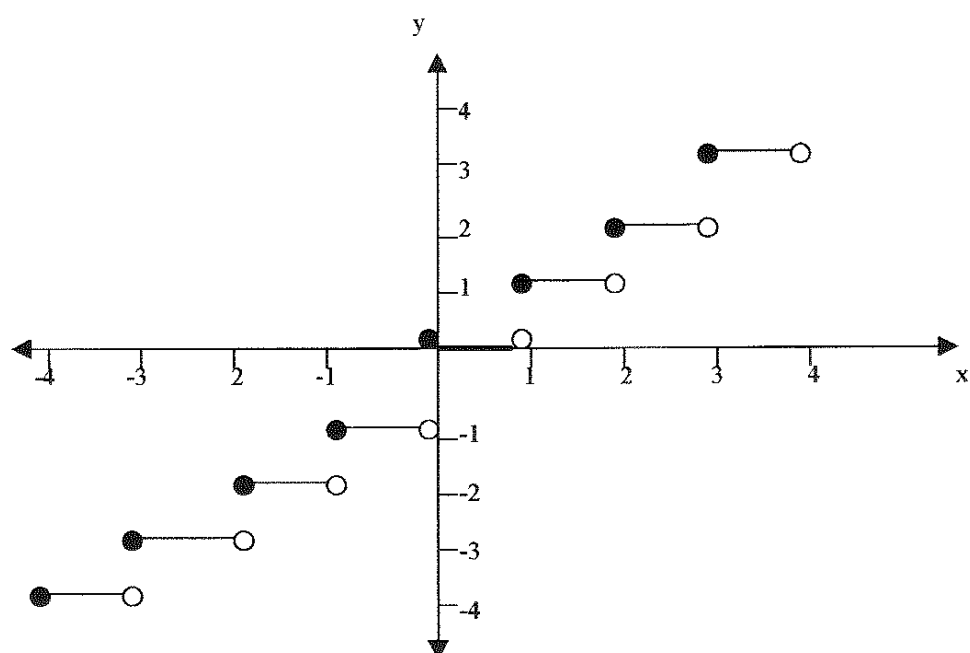
2.-  $f(4,9) = [4,9] = 4$

3.-  $f(-2,1) = [-2,1] = -3$

4.-  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

$$\text{Así } [x] = \begin{cases} -3, & \text{si } x \in [-3, -2) \\ -2, & \text{si } x \in [-2, -1) \\ -1, & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1) \end{cases}$$

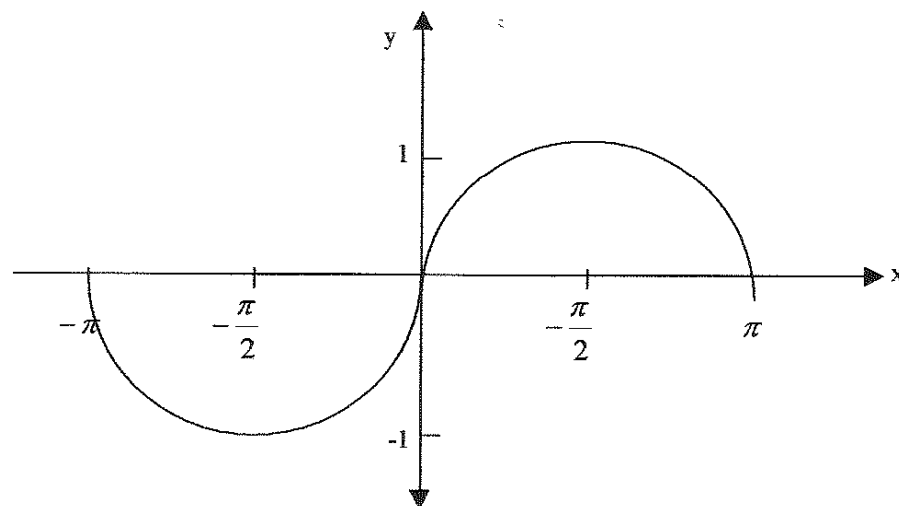
$\text{dom } f = \mathbb{R}, \text{rec } f = \mathbb{Z}.$



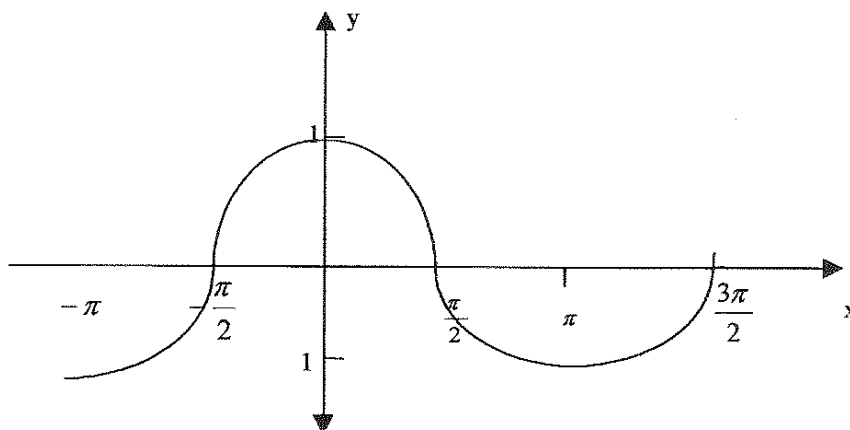
# 10.- FUNCIONES CIRCULARES :

a)  $f(x) = \sin x$ ,  $x$  medido en radianes.

$\text{dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{rec } f = [-1, 1]$ , de período  $T = 2\pi$ .



b)  $f(x) = \cos x$ ,  $x$  medido en radianes.



$\text{dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{rec } f = [-1, 1]$ , de período  $T = 2\pi$ .

**11.- FUNCION CARACTERISTICA :**

Es de la forma  $f(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in A \\ 0, & \forall x \notin A \end{cases} \quad A \subseteq \mathbb{R}.$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \text{ y } \text{rec } f = \{0, 1\}.$$

**12.- FUNCION SIGNO :**

Es de la forma  $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \text{ y } \text{rec } f = \{-1, 0, 1\}.$$

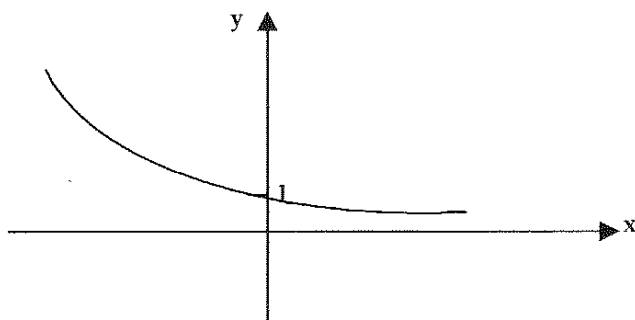
**13.- FUNCION EXPONENCIAL :**

Sea  $a > 0, a \neq 1$ , la función  $f(x) = a^x$  se denomina función exponencial en base  $a$ , con  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ ,  $\text{rec } f = \mathbb{R}^+$ .

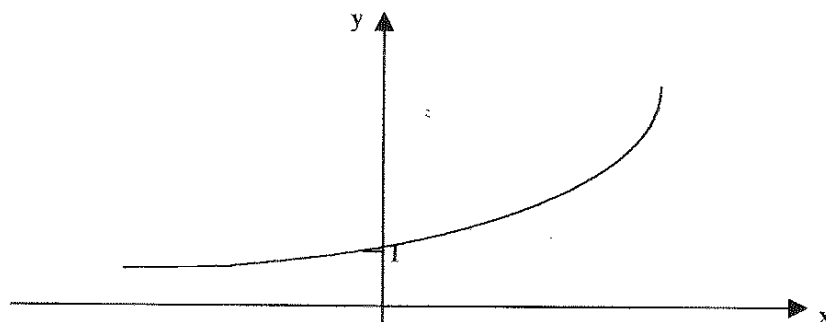
**OBSERVACIONES:**

1)  $f(x) = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

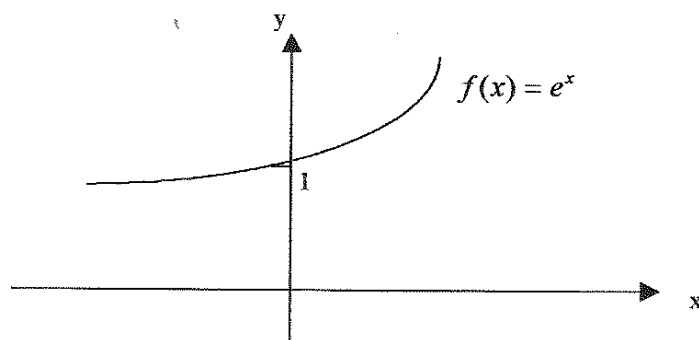
Si  $0 < a < 1$ ,  $f(x) = a^x$  es una función decreciente.



Si  $a > 1$ ,  $f(x) = a^x$  es una función creciente.



Si  $a = e \approx 2,71828\ldots \therefore e > 1$ .



2) La función es inyectiva, ya que  $f(x) = f(y) \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow x = y$ .

3) Esta función transforma las sumas en productos.

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

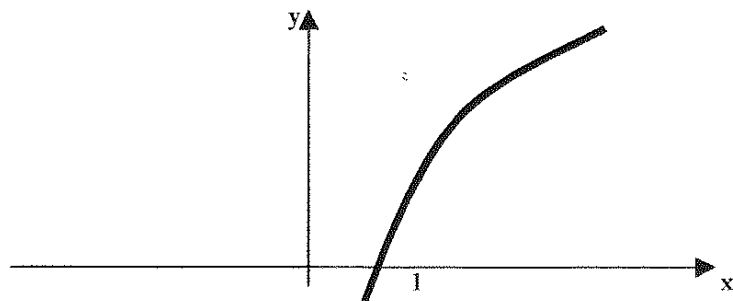
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1 - x_2) = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}, \quad f(x_2) \neq 0.$$

#### 14.- FUNCION LOGARITMICA :

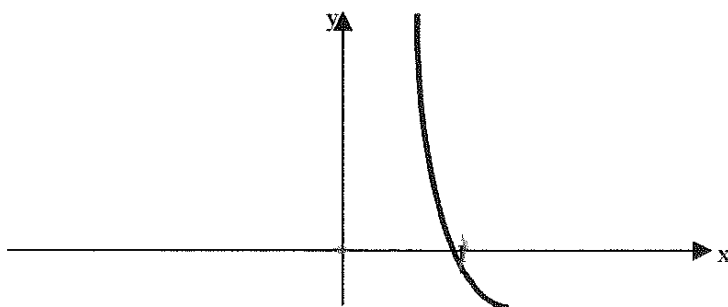
Sea  $a > 0, a \neq 1$ , la función  $f(x) = \log_a x$  se denomina función logarítmica en base  $a$ , con  $\text{dom } f = \mathbb{R}^+$  y  $\text{rec } f = \mathbb{R}$ .

**OBSERVACIONES:**

a) Si  $a > 1$ ,  $f(x) = \log_a x$  es una función creciente.



b) Si  $0 < a < 1$ ,  $f(x) = \log_a x$  es una función decreciente.



Si  $a = e$ ,  $f(x) = \ln x$ , se llama función logaritmo natural.

c)  $x = 1$  es el único cero de la función.

d)  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

**Propiedades de los logaritmos:**

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a a = 1$$

$$3. \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

$$4. \log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n$$

$$5. \log_a m^p = p \log_a m$$

$$6. \log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

### EJERCICIOS:

1.- Hallar el dominio, recorrido y la gráfica de  $f(x) = [\sqrt{x}]$

#### Solución:

Sea :

$$f(x) = [\sqrt{x}] = n. \text{ Como } x \geq 0 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}_0^+ \Rightarrow n \leq \sqrt{x} < n+1 \Rightarrow n^2 \leq x < (n+1)^2$$

Por ejemplo:

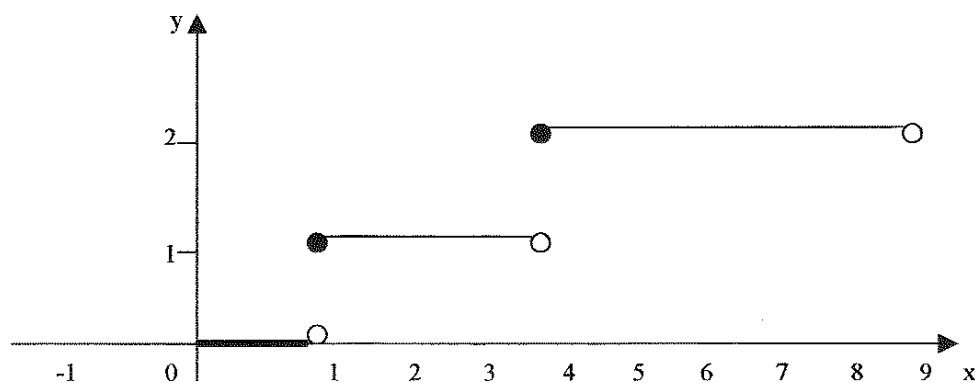
$$\text{Si } 0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow f(x) = [\sqrt{x}] = 0$$

$$\text{Si } 1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow f(x) = [\sqrt{x}] = 1$$

$$\text{Si } 4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow f(x) = [\sqrt{x}] = 2, \text{ etc.}$$

$$\therefore f(x) = [\sqrt{x}] = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ 1, & \text{si } x \in [1,4) \\ 2, & \text{si } x \in [4,9) \\ 3, & \text{si } x \in [9,16) \end{cases}, \text{ etc.}$$

$$\therefore \text{dom } f = [0, +\infty); \text{rec } f = \mathbb{Z}_0^+$$



2.- Determinar dominio, recorrido y gráfico de  $f(x) = [2x]$ .

**Solución:**

$$[2x] = n \Leftrightarrow n \leq 2x < n+1 \Rightarrow \frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{Si } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow f(x) = [2x] = -2$$

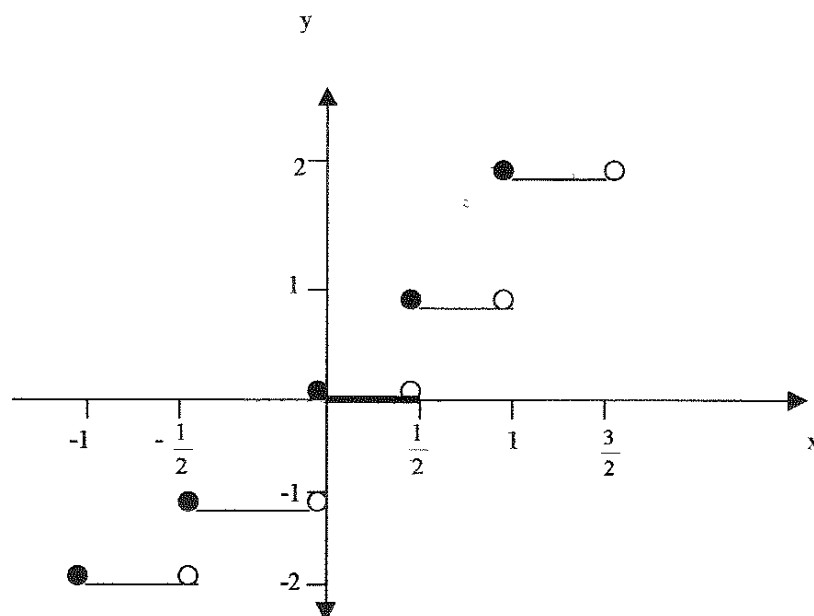
$$\text{Si } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow f(x) = [2x] = -1$$

$$\text{Si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow f(x) = [2x] = 0$$

$$\text{Si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow f(x) = [2x] = 1, \text{ etc.}$$

$$f(x) = [2x] = \begin{cases} -2, & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ -1, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2, & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2}, \text{ etc.} \end{cases}$$

$$\therefore \text{dom } f = \mathbb{R}, \text{ y } \text{rec } f = \mathbb{Z}.$$



3.- Hallar el dominio y gráfica de  $f(x) = |x| - [x]$ .

**Solución:**

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ .

a) Si  $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x - [x] = x - n$ , donde  $n \leq x < n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ .

b) Si  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x - [x] = -x - n$ , donde  $n \leq x < n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}^-$ .

Si  $-3 \leq x < -2 \Rightarrow f(x) = -x + 3$

Si  $-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = -x + 2$

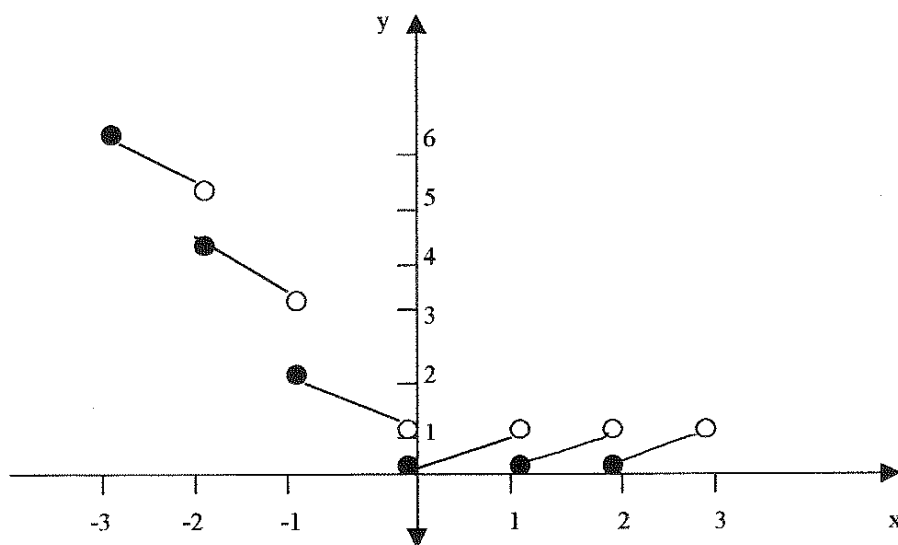
Si  $-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -x + 1$

Si  $0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x$

Si  $1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$

Si  $2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = x - 2$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -x+2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -x+1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x-2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



4.- Determinar dominio y recorrido de  $f(x) = \sqrt{[x] - x}$ .

**Solución:**

$$[x] - x \geq 0 \quad (*) \quad \text{Pero } x \geq [x], \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow [x] - x \leq 0 \quad (**). \quad \text{De } (*) \text{ y } (**) \quad [x] - x = 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{dom } f = \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \text{rec } f = 0.$$

5.- Determinar dominio y recorrido de  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ .

**Solución:**

$$x - [x] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } [x]=n \Rightarrow n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x)=n+\sqrt{x-n}$$

$$\text{Si } -2 \leq x < -1, \quad f(x)=-2+\sqrt{x+2}$$

$$\text{Si } -1 \leq x < 0, \quad f(x)=-1+\sqrt{x+1}$$

$$\text{Si } 0 \leq x < 1, \quad f(x)=\sqrt{x}$$

$$\text{Si } 1 \leq x < 2, \quad f(x)=1+\sqrt{x-1}, \text{ etc.}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -2+\sqrt{x+2}, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1+\sqrt{x+1}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1+\sqrt{x-1}, & \text{si } 1 \leq x < 2, \text{ etc} \end{cases}$$

Para determinar  $\text{rec } f$ :

$$\text{Si } -2 \leq x < -1 \Rightarrow 0 \leq x+2 < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x+2} < 1 \Rightarrow$$

$$-2 \leq -2+\sqrt{x+2} < -1 \quad \therefore \text{rec } f_1 = [-2, -1).$$

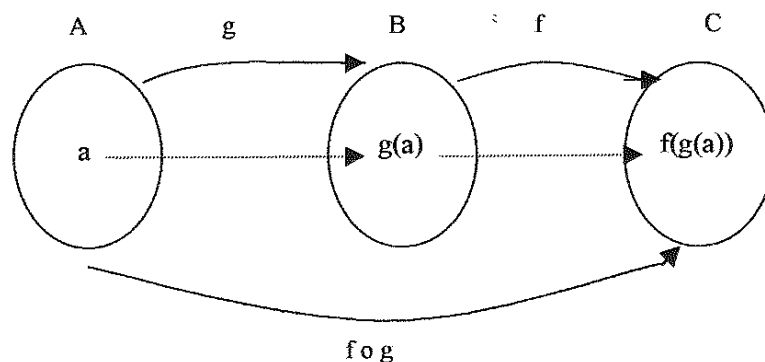
$$\text{Si } -1 \leq x < 0 \Rightarrow 0 \leq x+1 < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x+1} < 1 \Rightarrow$$

$$-1 \leq -1+\sqrt{x+1} < 0 \quad \therefore \text{rec } f_2 = [-1, 0).$$

Continuando con este desarrollo, ¿Cuál es  $\text{rec } f$ ?

### COMPOSICION DE FUNCIONES

Sea  $g$  una función de  $A$  en  $B$  y  $f$  una función de  $B$  en  $C$ , es decir  $g: A \rightarrow B$  y  $f: B \rightarrow C$  y sea  $a \in A / g(a) \in B$ , siendo  $B = \text{dom } f$ , entonces se puede encontrar una imagen de  $g(a)$  por la función  $f$ , es decir  $f(g(a))$ . O sea a cada elemento de  $A$  se le hace corresponder un  $f(g(a)) \in C$ . Es decir se tiene una función de  $A$  en  $C$ , lo que se denotará por  $(f \circ g)$ .



**DEFINICIÓN:** Sea  $g: A \rightarrow B$ ,  $f: B \rightarrow C$  funciones, entonces

$f \circ g: A \rightarrow C$ , es una función definida por  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  siendo  $\text{dom}(f \circ g)$  el conjunto de todos los números  $x \in \text{dom } g$ , tal que  $g(x)$  se encuentra en el dominio de  $f$ .

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom}(g) \mid g(x) \in \text{dom } f\}.$$

Es decir para que exista la composición  $(f \circ g)$  debe ocurrir que:  
 $\text{rec } g \cap \text{dom } f \neq \Phi$ .

### EJEMPLOS:

1.- Sean  $g(x) = \sqrt{x}$  y  $f(x) = 2x - 3$ .

a) Determinar el dominio y la expresión analítica de  $f \circ g$ .

**Solución:**

$$\text{dom } f = \mathbb{R}, \text{ dom } g = \mathbb{R}_0^+ \text{ y } \text{rec } g = \mathbb{R}_0^+.$$

Como  $\text{rec } g \cap \text{dom } f = \mathbb{R}_0^+ \neq \emptyset$ , existe composición.

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom } g \mid g(x) \in \text{dom } f\}$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R}_0^+\} = \mathbb{R}_0^+.$$

Como  $\text{rec } g \subset \text{dom } f$ ,  $\text{dom } (f \circ g) = \text{dom } g$ .

Su expresión analítica es:  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$ .

- b) Determinar el dominio y la expresión analítica de  $g \circ f$ .

**Solución:**

$$\text{dom } g = \mathbb{R}_0^+, \text{ rec } f = \mathbb{R}.$$

donde  $\text{rec } f \cap \text{dom } g = \mathbb{R}_0^+ \neq \emptyset$ , luego existe composición.

$$\begin{aligned} \text{dom}(g \circ f) &= \{x \in \text{dom } f \wedge f(x) \in \text{dom } g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \wedge (2x-3) \in \mathbb{R}_0^+\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \wedge 2x-3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq \frac{3}{2}\} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

En este caso  $\text{dom}(g \circ f) \subset \text{dom } f$ , ya que  $\text{rec } f \not\subset \text{dom } g$ .

Su expresión analítica es:  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \sqrt{2x-3}$ .

2.- Si  $f(x) = -x^2 \wedge g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ .

Determinar el dominio y la expresión analítica de  $g \circ f$ , si es que existen.

**Solución:**

$\text{dom } g = \mathbb{R}^+$  y  $\text{rec } f = \mathbb{R}_0^-$ , pero  $\text{dom } g \cap \text{rec } f = \emptyset$ ,  $\therefore$  no existe composición.

3.-  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = \frac{1}{x}$  y  $h(x) = \sin x$ .

- a) Encontrar  $(f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right)$  y  $(g \circ h)(\pi)$ , si es que existen.

- b) Determinar el dominio y la expresión analítica de  $(g \circ h)$  y  $(g \circ g)$ , si es que existen.

**Solución:**

$$a) \quad (f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(h\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = f\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$(g \circ h)(\pi) = g(h(\pi)) = g(\sin \pi) = g(0) = \frac{1}{0}$$

$$b) \quad \text{dom } g = \mathbb{R} - \{0\}, \text{ dom } h = \mathbb{R}$$

$$\text{rec } g = \mathbb{R} - \{0\}; \text{ rec } h = [-1, 1]$$

$$i) \quad \text{dom } (g \circ h) = \{x \in \text{dom } h \mid h(x) \in \text{dom } g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq h\pi, h \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \mathbb{R} - \{x = h\pi, h \in \mathbb{Z}\}$$

La expresión analítica correspondiente es:

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sin x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$ii) \quad \text{dom } (g \circ g) = \{x \in \text{dom } g \mid g(x) \in \text{dom } g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

La expresión analítica correspondiente es:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

4.- Sean  $f(x) = \sqrt{x-2}$  y  $g(x) = x^2 - 2$ . Determinar el dominio y la expresión analítica de  $(g \circ f)$ .

**Solución:**

$$\text{Dom } f = [2, +\infty); \text{ Dom } g = \mathbb{R}$$

$$\text{dom } (g \circ f) = \{x \in \text{dom } f \mid f(x) \in \text{dom } g\}$$

$$= \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x \geq 2 \mid x-2 \geq 0\}$$

$$= \{x \geq 2 \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$$

$$y \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 - 2 = x - 4$$

### OBSERVACIÓN:

En el caso de funciones por tramos se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 = \text{dom } f_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 = \text{dom } f_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in B_1 = \text{dom } g_1 \\ g_2(x), & x \in B_2 = \text{dom } g_2 \\ g_3(x), & x \in B_3 = \text{dom } g_3 \end{cases} \quad B_1, B_2 \text{ y } B_3 \text{ conjuntos disjuntos}$$

$$\begin{aligned} \text{dom } (f \circ g) &= \{x \in \text{dom } g \wedge g(x) \in \text{dom } f\} \\ &= \text{dom}(f_1 \circ g_1) \cup \text{dom}(f_1 \circ g_2) \cup \text{dom}(f_1 \circ g_3) \cup \text{dom}(f_2 \circ g_1) \cup \text{dom}(f_2 \circ g_2) \cup \\ &\quad \text{dom}(f_2 \circ g_3) \end{aligned}$$

### EJEMPLO:

$$\text{Sean } f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \in [0,2]: f_1 \\ -x+1, & x \in (2,5]: f_2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,3): g_1 \\ 4, & x \in [3,6]: g_2 \end{cases}$$

Determinar el dominio y la expresión analítica de  $(f \circ g)$

### Solución:

$$\begin{aligned} \text{dom } (f_1 \circ g_1) &= \{x \in \text{dom } g_1 \wedge g_1(x) \in \text{dom } f_1\} \\ &= \{x \in [0,3) \wedge x^2 \in [0,2]\} \\ &= \{x \in [0,3) \wedge -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{0 \leq x \leq \sqrt{2}\} = [0, \sqrt{2}] \end{aligned}$$

La expresión analítica es:  $(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x^2) = 3x^2 + 4$

$$\begin{aligned} \text{dom } (f_1 \circ g_2) &= \{x \in \text{dom } g_2 \wedge g_2(x) \in \text{dom } f_1\} \\ &= \{x \in [3,6] \wedge 4 \in [0,2]\} = \{x \in [3,6] \wedge F\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\text{dom } (f_2 \circ g_1) = \{x \in \text{dom } g_1 \wedge g_1(x) \in \text{dom } f_2\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{x \in [0, 3) \wedge x^2 \in (2, 5]\} \\
&= \{x \in [0, 3) \wedge x \in [-\sqrt{5}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{5}]\} = (\sqrt{2}, \sqrt{5}].
\end{aligned}$$

La expresión analítica es:  $(f_2 \circ g_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(x^2) = -x^2 + 1$ .

$$\begin{aligned}
\text{dom}(f_2 \circ g_2) &= \{x \in \text{dom } g_2 \wedge g_2(x) \in \text{dom } f_2\} \\
&= \{x \in [3, 6] \wedge 4 \in (2, 5]\} \\
&= \{x \in [3, 6] \wedge V\} = [3, 6].
\end{aligned}$$

La expresión analítica es:  $(f_2 \circ g_2)(x) = f_2(g_2(x)) = -3$ .

$$\therefore (f \circ g) = \begin{cases} 3x^2 + 4, & x \in [0, \sqrt{2}] \\ -x^2 + 1, & x \in (\sqrt{2}, \sqrt{5}] \\ -3, & x \in [3, 6] \end{cases}.$$

### PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

Sean  $f, g$  y  $h$  funciones e  $I$  la función idéntica.

- 1.-  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ , asociatividad.
- 2.- Existe una única función idéntica tal que:  $f \circ I = I \circ f = f, \forall f$
- 3.-  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$
- 4.-  $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) (g \circ h)$
- 5.-  $I^n \circ I^m = I^{n \cdot m}, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$
- 6.-  $I^n \circ (f + g) = (f + g)^n, n \in \mathbb{Z}^+$
- 7.- En general  $f \circ g \neq g \circ f$

### **EJERCICIOS:**

- 1) Sean  $f(x) = 3x - 5$  y  $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$ . Determinar  $g$ .

**Solución:**

$$\text{Si } f(x) = 3x - 5 \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 5 = x^2 - 3 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}.$$

- 2) Sean  $g(x) = 3x - 2$  y  $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$ . Determinar  $f$ .

**Solución:**

Como:

$$g(x) = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{g(x) + 2}{3} \Rightarrow f(g(x)) = 9\left(\frac{g(x) + 2}{3}\right)^2 - 3\frac{g(x) + 2}{3} + 1$$

$$= g^2(x) + 3g(x) + 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + 3x + 3.$$

- 3) Sean  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = x^4$ .

Verificar que:  $f \circ g = g \circ f, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Solución:**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4) = x^{12}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^{12}$$

$$\therefore f \circ g = g \circ f, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 4) Sean  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x + 3$ . Determinar si  $f \circ g = g \circ f$ .

**Solución:**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$$

$$\therefore f \circ g \neq g \circ f.$$

### FUNCION INVERSA

Sea  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$  una función real. De acuerdo a lo que ya se sabe, toda función establece una ley que asocia a cada elemento de  $A$ , un único elemento en  $B$ . Se revertirá el proceso, estableciendo cuando es posible determinar una función  $g$  que vaya de  $B$  en  $A$ .

**TEOREMA:** Sea  $f: A \rightarrow B$ , una función  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , llamada "función inversa de  $f$ ", existe  $\Leftrightarrow f$  es biyectiva.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Hipótesis :  $f^{-1} : B \rightarrow A$  función

Tesis :  $f$  es biyectiva

Demostración:

a)  $\forall y \in B, \exists x \in A / f^{-1}(y) = x \Rightarrow y = f(x)$

$\therefore f$  es sobreyectiva

b) Sean  $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ . Si  $f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow$

$f^{-1}(y) = x_1, f^{-1}(y) = x_2 \Rightarrow f^{-1}$  no es función

$\therefore f(x_1) \neq f(x_2) \therefore f$  es inyectiva

de a) y b)  $f$  es biyectiva

$\Leftarrow$ ) Hipótesis :  $f$  es biyectiva

Tesis :  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es función

Demostración:

a) Como  $f$  es sobreyectiva  $\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$

b) Sea  $y \in B$ . Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos imágenes de  $y$  según  $f^{-1} \Rightarrow$

$f^{-1}(y) = x_1 \wedge f^{-1}(y) = x_2 \Rightarrow f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$ . Como  $f$  es

inyectiva,  $x_1 = x_2$

de a) y b)  $f^{-1}$  es función

**DEFINICIÓN:**

Sea  $f : A \rightarrow B$  biyectiva, entonces  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es función llamada función inversa de  $f$ , también biyectiva.

**OBSERVACIÓN:**

- 1)  $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
- 2) La función inversa  $f^{-1}$ , toma los elementos  $f(x) \in B$  y los asocia con un  $x \in A$ .
- 3) Si  $f: A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces  

$$\text{Dom } f^{-1} = B = \text{Rec } f \wedge \text{Rec } f^{-1} = A = \text{Dom } f.$$
- 4) Expresión analítica de la inversa: Sea  $f: A \rightarrow B / f(x) = y$  es biyectiva.  
 Luego  $f$  es invertible. Como se tiene  $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$ ,  
 intercambiando  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x$ , se tiene  $y = f^{-1}(x)$ .

**EJEMPLO:**

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 3x - 2$ . Hallar  $f^{-1}$ , si es que existe.

**Solución:**

Como  $f$  es lineal entonces  $f$  es biyectiva.

Se determinará la expresión analítica de  $f^{-1}$ :  $y = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$ ,

haciendo cambio de variable,  $y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

**TEOREMA:**

Sean  $f: A \rightarrow B$  y  $g: C \rightarrow D$ , funciones biyectivas, entonces:

- a)  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$
- b)  $f \circ f^{-1} = I_B$
- c)  $f^{-1} \circ f = I_A$
- d)  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  (siempre que la composición exista)
- e)  $(g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}) = I$  (siempre que la composición exista)

**EJEMPLOS:**

1.- Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2$ . Halle  $f^{-1}$ .

**Solución:**

a)  $f$  definida en ese dominio no es inyectiva, para que lo sea, se restringe su dominio:  $\text{dom } f = \mathbb{R}_0^+ \vee \text{dom } f = \mathbb{R}_0^-$ .

b)  $f$  no es sobre  $\therefore$  se restringe el conjunto  $B$  a  $\mathbb{R}_0^+$ ,  $\therefore f$  es biyectiva si  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \vee f: \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ .

Expresión analítica de  $f^{-1}$ :

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow x = \sqrt{y}.$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}_0^- \Rightarrow x = -\sqrt{y}.$$

Haciendo cambio de variable, se tiene:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} / f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+.$$

$$\text{ó } f^{-1}(x) = -\sqrt{x} / f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^-.$$

2.- Sea  $f(x) = \sqrt{x+2}$ . Determinar  $f^{-1}(x)$ .

**Solución:**

$$\text{dom } f = [2, +\infty), \text{ rec } f = \mathbb{R}_0^+.$$

Luego  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , biyectiva.

$$\Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [2, +\infty) / f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

Además se observa que:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x, x \in [2, +\infty).$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2 - 2} = x, x \in \mathbb{R}_0^+.$$

3.- Sea  $(f(x) = 3 - \sqrt{2x-5})$ . Determinar  $f^{-1}(x)$ .

**Solución:**

a) Para que sea función real, es necesario que  $2x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

$$\therefore \text{dom } f = \left[ \frac{5}{2}, +\infty \right).$$

$$f: \left[ \frac{5}{2}, +\infty \right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ es función.}$$

b)  $f(a) = f(b) \Rightarrow 3 - \sqrt{2a-5} = 3 - \sqrt{2b-5} \Rightarrow 2a-5 = 2b-5 \Rightarrow a = b, \therefore f$  es inyectiva.

c)  $y = 3 - \sqrt{2x-5} \Rightarrow 3 - y = \sqrt{2x-5} \Rightarrow 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3, f$  no es sobreyectiva.

Para que lo sea se debe definir  $f$  como:

$$f: \left[ \frac{5}{2}, +\infty \right) \rightarrow (-\infty, 3], \therefore f^{-1} \text{ existe, ya que } f \text{ es biyectiva,}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{(3-x)^2 + 5}{2}.$$

4.- Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3$ . Hallar  $f^{-1}$

**Solución:**

$$a) \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a^3 = b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0.$$

$$\Rightarrow a = b \vee a^2 + ab + b^2 = 0, \therefore \text{es inyectiva ya que } a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2} \notin \mathbb{R}.$$

b) ¿Es sobreyectiva?

$$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x, \therefore \text{es sobreyectiva en } \mathbb{R}.$$

De a) y b)  $f$  es biyectiva, siendo  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ .

5.- Sea la relación  $(x-1)^2 - (y+2)^2 = 3$  en  $\mathbb{R}$ . Hacer las restricciones necesarias para que la relación sea función biyectiva y hallar su inversa.

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (y+2)^2 &= (x-1)^2 - 3 \Rightarrow y = -2 \pm \sqrt{(x-1)^2 - 3} \Rightarrow y = -2 + \sqrt{(x-1)^2 - 3} \quad \text{ó} \\ y &= -2 - \sqrt{(x-1)^2 - 3}. \end{aligned}$$

Se determinará el dominio en ambos casos:

$$\therefore (x-1)^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x-1| \geq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \geq (x-1) \vee (x-1) \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x \leq 1 - \sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} + 1 \Rightarrow \therefore x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, +\infty)$$

$$f_1: (-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ es función. } / f_1(x) = -2 + \sqrt{(x-1)^2 - 3}.$$

$$f_2: (-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ es función. } / f_2(x) = -2 - \sqrt{(x-1)^2 - 3}.$$

a) P.D. si  $f_1$  es inyectiva.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow -2 + \sqrt{(a-1)^2 - 3} = -2 + \sqrt{(b-1)^2 - 3} \Rightarrow (a-1)^2 = (b-1)^2$$

$$(a-1)^2 - (b-1)^2 = 0 \Rightarrow ((a-1) - (b-1))((a-1) + (b-1)) = 0$$

$$(a-b)(a+b-2) = 0 \Rightarrow \therefore a = b \vee a+b = 2$$

$\therefore f_1$  no es inyectiva. Reemplazando  $a=b$  en  $a+b=2$ , se obtiene  $2b=2 \Rightarrow b=1$ , que nos indica la restricción del dominio. Luego definiendo  $f_1$  como.

$$f_1: (-\infty, 1 - \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R} / f_1(x) = -2 + \sqrt{(x-1)^2 - 3} \quad \text{ó}$$

$$f_1: [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} / f_1(x) = -2 + \sqrt{(x-1)^2 - 3}.$$

$\therefore f_1$  es inyectiva.

b) Sea  $f_1: [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , se analizará si  $f$  es sobreyectiva.

$$y = -2 + \sqrt{(x-1)^2 - 3} \Rightarrow y + 2 = \sqrt{(x-1)^2 - 3} \Rightarrow y + 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq -2, \therefore f_1 \text{ no es sobreyectiva.}$$

$$\therefore f_1: [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow [-2, +\infty) \text{ es biyectiva,}$$

$$\therefore f_1^{-1}: [-2, +\infty) \rightarrow [1 + \sqrt{3}, +\infty) / f_1^{-1}(x) = 1 + \sqrt{(x+2)^2 + 3}.$$

c) P.D. si  $f_2$  es inyectiva.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow -2 - \sqrt{(a-1)^2 - 3} = -2 - \sqrt{(b-1)^2 - 3} \Rightarrow (a-1)^2 = (b-1)^2 \Rightarrow$$

$$a = b \vee a + b = 2$$

$\therefore f_2$  no es inyectiva. Considerando a) se obtiene:

$$f_2: (-\infty, 1 - \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f_2(x) = -2 - \sqrt{(x-1)^2 - 3},$$

$$f_2: [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f_2(x) = -2 - \sqrt{(x-1)^2 - 3}.$$

d) Sea  $f_2: [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ; se analizará si es sobreyectiva.

$$f_2(x) = -2 - \sqrt{(x-1)^2 - 3} \Rightarrow y + 2 = -\sqrt{(x-1)^2 - 3} \Rightarrow y + 2 \leq 0 \Rightarrow y \leq -2.$$

Luego  $f_2$  no es sobreyectiva, para que lo sea:

$$f_2: [1 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow (-\infty, -2] \text{ es biyectiva.}$$

$$\therefore f_2^{-1}: (-\infty, -2] \rightarrow [1 + \sqrt{3}, +\infty) / f_2^{-1}(x) = 1 - \sqrt{(x+2)^2 + 3}.$$

### EJERCICIOS:

1.- Determinar dominio, recorrido, ceros y gráfico para:

a)  $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Resp.:  $\begin{matrix} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{rec } f = [-1, +\infty). \end{matrix}$

b)  $f(x) = |-\sqrt{x}|$

Resp.:  $\text{dom } f = \text{rec } f = \mathbb{R}_0^+.$

c)  $f(x) = \sqrt{|x|}$

Resp.:  $\text{dom } f = \mathbb{R}, \text{rec} = \mathbb{R}_0^+.$

d)  $f(x) = \frac{4-x}{x-3}$

Resp.:  $\begin{matrix} \text{dom } f = \mathbb{R} - \{3\} \\ \text{rec } f = \mathbb{R} - \{-1\}. \end{matrix}$

e)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Resp.:  $\begin{matrix} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{rec } f = [1, +\infty). \end{matrix}$

f)  $f(x) = [\sqrt{x}]$

Resp.:  $\begin{matrix} \text{dom } f = \mathbb{R}_0^+ \\ \text{rec } f = \mathbb{Z}_0^+. \end{matrix}$

g)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 3 \\ 2x - 5, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Resp.:  $\begin{matrix} \text{dom } f = \mathbb{R} \\ \text{rec } f = [-4, +\infty). \end{matrix}$

$$h) f(x) = \begin{cases} x-4, & \text{si } x < -9 \\ x^2 - |x|, & \text{si } -9 \leq x \leq 9 \\ 2x+5, & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Resp.: } \text{rec } f = (-\infty, -13) \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

$$i) f(x) = 2x + |x+1| - |2x-4|$$

$$\text{Resp.: } \text{dom } f = \text{rec } f = \mathbb{R}.$$

$$j) f(x) = \text{sgn} \left( \frac{x-1}{x+2} \right)$$

$$\text{Resp.: } \begin{aligned} \text{dom } f &= \mathbb{R} - \{-2\} \\ \text{rec } f &= \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$

$$k) f(x) = [\text{sen } x], \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Resp.: } \text{rec } f = \{-1, 0, 1\}.$$

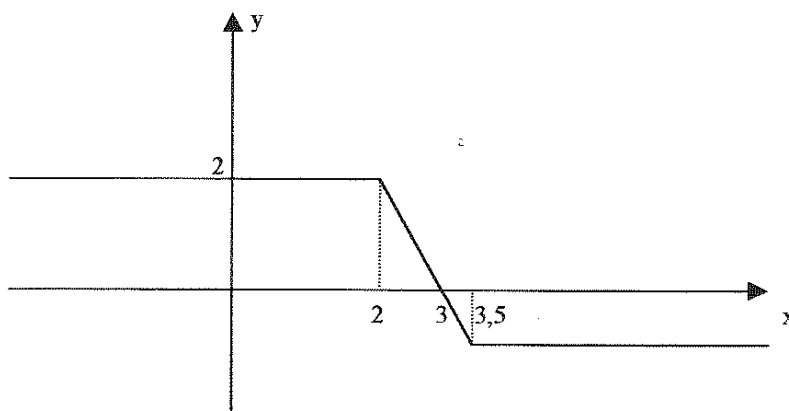
2.- Sean  $4f(x-3) = x^2 + 4$  y  $g(x) = \frac{f(2x-3) - kx}{f(2x-3) + x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , determinar los valores de  $k$  tal que  $\text{rec } g = (-3, 3)$  Resp.:  $k \in (-5, 1)$ .

3.- Sean  $f(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{x-3}$  y  $g(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$ , hallar  $\text{dom } f$  y  $\text{dom } g$  y determinar si  $f = g$ .

4.- Sean  $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \in [0, 2] \\ 3, & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \in [1, 4] \\ x-6, & \text{si } x \in [5, 6] \end{cases}$ , hallar  $f+g$ ,  $f-g$  y  $f \cdot g$ .

5.- Sean  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ x+2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 1 \\ 4x, & \text{si } x > 1, \end{cases}$  determinar  $-f$ ,  $|f|$ ,  $f+3$ ,  $5 \cdot g$ ,  $f+g$ ,  $\frac{f}{g}$

6.- Dado el gráfico de  $f$ :



Dibujar los gráficos de las siguientes funciones:

$$f(x-2), f(2-x), f\left(\frac{x}{2}\right), 1+f(x).$$

7.- Dadas las siguientes funciones, determinar si ellas son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 3x + 2$

b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = 1 - x^2$

c)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = [x]$

d)  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / p(x) = |x| \cdot (x-1)$

8.- Sea  $f(x) = \left(x|x| + \frac{1}{x}\right) \sin x^2$ , determinar si  $f$  es par o impar.

Resp.:  $f$  es impar.

9.- Demostrar que si  $f$  es par y  $g$  es impar, entonces  $f \cdot g$  es impar.

10.- Determinar el período mínimo de:  $f(x) = \cos 2x + \sin 4x$ ,

Resp.:  $T = \pi$ .

11.- Graficar  $f$  tal que su dominio es  $\mathbb{R}$  y

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

sabiendo que:

- a)  $f$  es impar y tiene período 4.
- b)  $f$  es par y tiene período 4.

12.- Determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento:

a)  $f(x) = x^3 + 3x + 5$

b)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Resp.:  $x \in (-1, 1)$  creciente  
 $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$  decreciente.

13.- Sean  $f(x) = 2x + 6$ ,  $x \in [0, 8]$  y  $g(x) = x^2 - 1$ ,  $x \in [-2, 2]$ , determinar  $\text{dom } f \circ g$  y la expresión analítica de  $f \circ g$ .

14.- Sean  $g(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$  y  $(f \circ g)(x) = 2x + 3$ . Determinar  $f(x)$ .

Resp.:  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 4$ .

15.- Sean  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x+2, & \text{si } x < 0 \vee x > 1, \end{cases}$  determinar  $g \circ f$  y  $f \circ g$ .

16.- Sean  $f(x) = 4|x| - x^2$ ,  $x \in (-8, 1)$  y  $g(x) = \sqrt{1-x}$ ,  $x \in (-4, 0)$ , determinar  $\text{dom } g \circ f$  y la expresión analítica de  $g \circ f$ .

17.- Sean  $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$  y  $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ . Demostrar que:  $f \circ g = g \circ f$ .

18.- Sean  $g(x) = 2x - 3$  y  $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 4x + 3, & \text{si } x < 1 \end{cases}$  Determinar  $f(x)$ .

$$\text{Resp.: } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1, & \text{si } x \geq -1 \\ 2x + 9, & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

19.-Determinar la inversa de las siguientes funciones reales, haciendo las restricciones del dominio y/o recorrido, en caso necesario:

a)  $f(x) = -2x^2 + 4x + 6, x \in (-\infty, 1]$  Resp.:  $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\frac{8-x}{2}}, x \in (-\infty, 8]$ .

b)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  Resp.:  $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ .

c)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$  Resp.:  $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 1}$ .

d)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & \text{si } x \geq 2 \\ 2x - 1, & \text{si } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$  Resp.:  $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x-3}, & \text{si } x \geq 3 \\ \frac{x+1}{2}, & \text{si } -3 < x < 3 \\ -1 - \sqrt{-x-3}, & \text{si } x \leq -3. \end{cases}$

e)  $f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{x^2 + 12x + 27}, & \text{si } x \leq -11 \\ x^2 + 6x + 6, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\text{Resp.: } f^{-1}(x) = \begin{cases} -6 - \sqrt{(x-4)^2 + 9}, & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ -3 + \sqrt{x+3}, & \text{si } x \in (6, +\infty). \end{cases}$$

f)  $f(x) = 2x + |x+1| - |2x-4|$  Resp.:  $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-5, & \text{si } x \geq 7 \\ \frac{x+3}{5}, & \text{si } -8 \leq x < 7 \\ \frac{x+5}{3}, & \text{si } x < -8. \end{cases}$

20.- Sean  $f(x) = x^2$ , si  $\sqrt{x}(x-1) \geq 0$  y  $g(x) = \sqrt{3-x}$ , si  $x \in (-1, 3]$ . Determinar si existe,  $f \circ g^{-1}$ .

$$\text{Resp.: } (f \circ g^{-1})(x) = (3-x^2)^2, \text{ si } x \in [0, \sqrt{2}] \cup \{\sqrt{3}\}.$$

21.- Sean  $f(x) = \begin{cases} x^3+2, & \text{si } x \geq 0 \\ 3x+2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{si } x > -1 \\ 3x-2, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

Demostrar que  $f$  es biyectiva pero  $g$  no lo es. Determinar  $g \circ f^{-1}$

$$\text{Resp.: } (g \circ f^{-1})(x) = \begin{cases} x-4, & \text{si } x \leq -1 \\ \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 - 1, & \text{si } x \in (-1, 2) \\ (\sqrt[3]{x-2})^2 - 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

22.- Si  $f(x) = x-4$ ,  $x \in (-\infty, 4]$  y  $g(x) = \begin{cases} 4+\sqrt{x^2+9}, & \text{si } x \geq -4 \\ 8, & \text{si } x < -4 \end{cases}$ . Hallar

$$f+g \text{ y } (f+g)^{-1}, \text{ si existe.} \quad \text{Resp.: } (f+g)^{-1} = \begin{cases} \frac{x^2-9}{2x}, & \text{si } x \in [1, 9] \\ x-4, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

23.- Hallar  $f^{-1}$ , si existe, de:  $f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x+2}, & \text{si } x > 2 \\ x-\sqrt{-x}, & \text{si } x < -4 \end{cases}$

$$\text{Resp.: } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x+1-\sqrt{4x+9}}{2}, & \text{si } x \in (4, +\infty) \\ \frac{2x-1+\sqrt{1-4x}}{2}, & \text{si } x \in (-\infty, -6). \end{cases}$$

## CAPITULO III

### SUCESIONES

**DEFINICIÓN:** Una sucesión de números reales es una función real cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

**Notación:**  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad a(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

#### **OBSERVACIONES:**

1. El dominio de una sucesión es  $\mathbb{N}$ .
2. La imagen del natural  $n$  se denota por  $a_n$ .
3. El  $\text{rec}(a) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} ; \forall n \in \mathbb{N}.$
4. Dos sucesiones se diferencian por el recorrido.
5. Los recorridos de una sucesión pueden expresarse como  

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n / n \in \mathbb{N}\} = \{a_i\}, i \in \mathbb{N} = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}.$$
6. Una sucesión se identifica por su recorrido  $\{a_n / n \in \mathbb{N}\}$  o bien por su expresión analítica  $a_n$ , llamado también término general de la sucesión.

Formas de expresar una sucesión:

- a) A través de una fórmula, como se hace con las funciones.

#### **EJEMPLOS:**

- 1)  $a_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N} \quad \therefore \text{rec}(a) = \{1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots\}.$
- 2)  $a_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N} \quad \therefore \text{rec}(a) = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}.$
- 3)  $a_n = n^2 + 1, \therefore \text{rec}(a) = \{2, 5, 10, \dots\} \vee \text{rec}(a) = \{n^2 + 1 / n \in \mathbb{N}\}.$

$$4) \ a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{2n} & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \therefore \text{rec}(a) = \left\{ 2, \frac{1}{2}, 6, \frac{1}{4}, 10, \dots \right\}$$

$$5) \ a_{3n-2} = \frac{1}{(n+1)^2}; \ a_{3n-1} = \frac{2n}{n+2}; \ a_{3n} = (-1)^{n+1}; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{para } n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}, \ a_2 = \frac{2}{3}, \ a_3 = 1$$

$$\text{para } n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{9}, \ a_5 = 1, \ a_6 = -1, \text{ etc.}$$

b) Por Recurrencia

Es posible definir términos de la sucesión a partir de términos que se han definido previamente.

**EJEMPLOS:**

$$1) \ a_1 = \frac{1}{2}, \ a_n = a_{n-1}^2, \ \forall n \geq 2 \quad \therefore \ a_1 = \frac{1}{2}; \ a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}; \ a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \text{ etc.}$$

$$2) \ a_1 = a_2 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_{n-1} + a_n, \quad \forall n \geq 2$$

$$\therefore a_1 = 1; \ a_2 = 1; \ a_3 = a_1 + a_2 = 2; \ a_4 = a_2 + a_3 = 3; \ a_5 = a_3 + a_4 = 5, \text{ etc.}$$

llamada sucesión de números de Fibonacci.

$$3) \ a_1 = a, \ a_n = a_{n-1} + d, \quad \forall n > 1, \ a, d \in \mathbb{R}$$

$$\therefore a_1 = a, \ a_2 = a + d, \ a_3 = a + 2d, \text{ etc... llamada sucesión aritmética.}$$

$$4) \ a_1 = a, \ a_n = ar^{n-1}, \quad \forall n > 1, \ a, r \in \mathbb{R} \wedge r \neq 1$$

$$\therefore a_1 = a, \ a_2 = ar, \ a_3 = ar^2, \text{ etc... llamada sucesión geométrica.}$$

**CONVERGENCIA DE SUCESIONES**

Sea la sucesión  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dándole valores a "n", se obtiene:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}$$

$$n=107 \Rightarrow a_{107} = \frac{107}{108}$$

Se observa, intuitivamente, que a medida que  $n$  aumenta, los valores de la sucesión se aproximan a 1.

Entonces  $\frac{n}{n+1}$  tiende a 1 cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , lo que se simboliza por

$$\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \text{ y se dice que el límite de la sucesión es 1.}$$

Además se verifica que:

$$\text{Para } n=20 \Rightarrow \left| \frac{20}{21} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{21} \right| = \frac{1}{21}$$

$$\text{Para } n=80 \Rightarrow \left| \frac{80}{81} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{81} \right| = \frac{1}{81}$$

$$\text{Para } n=170 \Rightarrow \left| \frac{170}{171} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{171} \right| = \frac{1}{171}, \text{etc.}$$

Es decir, a medida que  $n$  crece, la diferencia entre  $a_n$  y el límite se aproxima a 0, o sea,  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \rightarrow 0$  ó  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right|$  puede hacerse tan pequeño como un número cualquiera  $\varepsilon > 0$ .

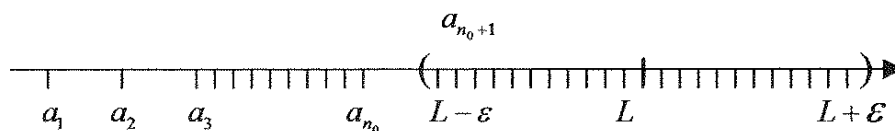
**DEFINICIÓN:** Se dice que la sucesión  $\{a_n\}$  converge a un número real  $L$  ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ .

Luego se dice que la sucesión tiene límite  $L$  o que  $L$  es el límite de la sucesión  $\{a_n\}$  y se simboliza por  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  ó  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ .

A partir de la definición se tiene:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

gráficamente:



**LEMA:** (muy útil en varias demostraciones)

Si  $|a| < \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$ .

**Demostración:**

Sea  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $|a| < \varepsilon \wedge a \neq 0$

Entonces  $|a| > 0$

Sea  $\varepsilon = \frac{1}{2}|a| \Rightarrow 2\varepsilon = |a|$ , luego  $|a| > \varepsilon$ , lo cual es contradictorio ya que

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $|a| < \varepsilon$ . Luego  $a = 0$ .

**UNICIDAD DEL LIMITE:** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión convergente a  $L$ , dicho límite es único, es decir: si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$ .

**Demostración:**

Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2 \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon$  y  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} /$

$\forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - L_2| < \varepsilon$

$\therefore |L_1 - L_2| = |L_1 - a_n - L_2 + a_n| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2|$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0; |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow \frac{|L_1 - L_2|}{2} < \varepsilon.$$

Por lema  $\frac{|L_1 - L_2|}{2} = 0 \therefore L_1 = L_2.$

### EJEMPLOS:

1.- Demostrar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

#### Demostración:

P.D.  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\therefore$  haciendo  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$  ó  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$  (para cautelar que  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) se

tiene que  $n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$

Por ejemplo

a) Sea  $\varepsilon = 10^{-3}, n > \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 \therefore n_0 = 10^3.$  Esto va a significar que a

partir de  $n > 10^3$ , cualquier valor de  $n$  satisface la desigualdad

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 10^{-3}$$

b) Sea  $\varepsilon = \frac{2}{125}, n > \frac{125}{2} = 62,5 \therefore n_0 = 62$  y se tendrá la seguridad que

para  $n \geq 63, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{2}{125} = 0,016.$

Comprobación:  $n = 70, n = 100$

$$\left| \frac{1}{70} - 0 \right| = 0,014 < 0,016.$$

$$\left| \frac{1}{100} - 0 \right| = 0,01 < 0,016$$

2.- Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

**Demostración:**

$$\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

$$\therefore \text{ haciendo } n_0 = \left[ \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + 1, \text{ se tendrá que } \forall n > n_0, \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

Por ejemplo:

a) Sea  $\varepsilon = \frac{1}{20}, n > 40 - 1 = 39, \therefore n_0 = 39$ , y se tendrá la seguridad que para

$$n > 39, \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{20}$$

Comprobación:  $n = 40; n = 50$

$$\left| \frac{80}{41} - 2 \right| < \frac{1}{20} \Rightarrow 0,048 < 0,05$$

$$\left| \frac{100}{51} - 2 \right| < \frac{1}{20} \Rightarrow 0,03 < 0,05$$

b) Sea  $\varepsilon = \frac{3}{125}, n > \frac{2}{\frac{3}{125}} - 1 \Rightarrow n > \frac{247}{3} = 82, \bar{3}; \therefore n_0 = 82$ , y se tendrá la

$$\text{seguridad que para } n > 82, \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \frac{3}{125}$$

Comprobación:  $n = 84; n = 100; n = 83$

$$\left| \frac{166}{84} - 2 \right| < \frac{3}{125} \Rightarrow 0,0238 < 0,024$$

$$\left| \frac{200}{101} - 2 \right| < \frac{3}{125} \Rightarrow 0,0198 < 0,024$$

$$\left| \frac{168}{85} - 2 \right| < \frac{3}{125} \Rightarrow 0,0235 < 0,024$$

3.- Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ .

**Demostración:**

$$\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n-2n-1}{2(2n+1)} \right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < 2n+1, \therefore n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Luego haciendo  $n_0 = \left\lceil \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \right\rceil + 1$  y considerando  $n$  natural se tiene que

$$n > \left\lceil \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \right\rceil + 1 \Rightarrow \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Por ejemplo:

Si  $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ,  $n > \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil \Rightarrow n > 1, \therefore n_0 = 1$ . Por lo tanto, para  $n > 1$  se cumple

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{8}.$$

Comprobación :  $n = 3 ; n = 2$ .

$$\left| \frac{3}{7} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{14} \right| = \frac{1}{14} < \frac{1}{8} \Rightarrow 0,0714 < 0,125$$

$$\left| \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{10} \right| = \frac{1}{10} < \frac{1}{8} \Rightarrow 0,1 < 0,125$$

4.- Demostrar que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - (-1)^n}{2^n} = 1$ .

**Demostración:**

$$\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{2^n - (-1)^n}{2^n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{2^n - (-1)^n - 2^n}{2^n} \right| = \left| \frac{-(-1)^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n / \ln \Rightarrow \ln \frac{1}{\varepsilon} < n \ln 2$$

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil + 1.$$

5.- Demostrar que no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ , es decir que  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge.

**Demostración:**

Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = L$ .

Entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow |(-1)^n - L| < \varepsilon$ .

Si lo anterior es cierto  $\forall \varepsilon > 0$ , sea  $\varepsilon = 1$ , entonces :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |(-1)^n - L| < 1 \Leftrightarrow -1 < (-1)^n - L < 1$$

Si  $n$  es par  $-1 < 1 - L < 1 \Leftrightarrow -2 < -L < 0 \Leftrightarrow 0 < L < 2$ .

Si  $n$  es impar  $-1 < -1 - L < 1 \Leftrightarrow 0 < -L < 2 \Leftrightarrow -2 < L < 0$

Las dos restricciones para  $L$  son contradictorias, luego la sucesión no tiene límite. Por lo tanto la sucesión no converge y se dice que **diverge** o es **divergente**.

6.- Si  $\varepsilon = 0,0001$ , ¿cuántos términos se encuentran dentro de

$$|a_n - 2| < 0,0001 \text{ y cuántos son exteriores, si } a_n = \frac{2n-1}{n+2}?$$

**Solución:**

$$|a_n - 2| < 0,0001 = \varepsilon \Rightarrow -0,0001 < a_n - 2 < 0,0001 \Rightarrow 1,9999 < a_n < 2,0001$$

Por otro lado:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{n+2} \right) = 2.$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{2n-1}{n+2} - 2 \right| < 0,0001,$$

$$\left| \frac{2n-1}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n-1-2n-4}{n+2} \right| = \frac{5}{n+2} < 0,0001 = \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} < n+2 \Rightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$$

$$\therefore n_0 = \left[ \frac{5}{\varepsilon} - 2 \right], \text{ pero } \varepsilon = 0,0001$$

$$\therefore \frac{5}{\varepsilon} - 2 = \frac{5}{10^{-4}} - 2 = \frac{5 - 2 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} = \frac{5 - 0,0002}{10^{-4}} = \frac{4,9998}{10^{-4}} = 4,9998 \cdot 10^4$$

$\therefore n_0 = 49998.$  Se encuentran dentro del intervalo todos los  $a_n$  con  $n > 49.998$ , quedan fuera del intervalo los  $a_n$  con  $n \leq 49.998$ .

Por Ejemplo:

$$\text{Si } n = 49999 \Rightarrow a_{49999} = \frac{99998-1}{49999+2} = \frac{99997}{50001}$$

$$\therefore 1,9999 < \frac{99997}{50001} < 2,0001$$

7.- Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$  y determinar si  $a_{120}$  y  $a_{30} \in$  al intervalo

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon), \text{ con } \varepsilon = \frac{1}{10^2}.$$

**Solución:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1-2n-4}{n+2} \right| = \frac{3}{n+2} < \varepsilon \therefore n > \frac{3}{\varepsilon} - 2$$

$$\therefore n_0 = \left[ \frac{3}{\varepsilon} - 2 \right], \text{ si } \varepsilon = \frac{1}{10^2} \therefore n_0 = [3 \cdot 10^2 - 2] = 298, \therefore \text{ los } a_n \text{ con } n > 298$$

quedan dentro del intervalo. Luego  $a_{120}$  y  $a_{30}$  quedan fuera del intervalo.

$$\therefore a_{120} \text{ y } a_{50} \notin \left( 2 - \frac{1}{10^2}, 2 + \frac{1}{10^2} \right).$$

**DEFINICION:** Una sucesión  $\{a_n\}$  es acotada si el conjunto de los valores  $\{a_n / n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto acotado, es decir,  $\exists k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|a_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**EJEMPLOS:**

1.-  $\{(-1)^n\}$  es una sucesión acotada, ya que el conjunto  $\{-1, 1\}$  es acotado.

2.-  $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$  es una sucesión acotada, ya que el conjunto

$\left\{ 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots \right\}$  es conjunto acotado. En efecto

$$\left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq |1| + \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

**TEOREMA:** Si una sucesión  $\{a_n\}$  es convergente, entonces  $\{a_n\}$  es acotada.

**Demostración:**

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Tomando :  $\varepsilon = 1$

$$\therefore \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < 1$$

pero  $|a_n - L| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n - L < 1 \Leftrightarrow L - 1 < a_n < 1 + L$  y como

$-|L| \leq L \leq |L|$  entonces se tiene:

$$-|L| - 1 \leq L - 1 < a_n < 1 + L \leq 1 + |L| \Leftrightarrow -(|L| + 1) < a_n < |L| + 1$$

$$\Leftrightarrow |a_n| \leq |L| + 1$$

Lo que indica que el conjunto  $\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots\}$  está acotado por  $|L|+1$ .

Queda un número finito de términos de la sucesión :  $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ , conjunto que puede acotarse por:

$$m = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$$

$\therefore$  si se elige  $k = m + |L| + 1$ , se estará seguro que

$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < k$  y así  $\{a_n\}$  será acotada.

### **OBSERVACIONES:**

- El recíproco del teorema anterior no es válido, es decir  $\{a_n\}$  acotada no implica que  $\{a_n\}$  es convergente.
- El contra recíproco del teorema es válido, es decir  $\{a_n\}$  no es acotada  $\Rightarrow \{a_n\}$  no es convergente.

### **EJEMPLO:**

Las sucesiones :  $\{2n\}, \{\sqrt{n}\}, \left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}$  no son acotadas y por lo tanto son divergentes.

### **OPERACIONES CON SUCESIONES**

Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  sucesiones,  $k \in \mathbb{R}$ . Se define:

1.- La suma de  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , como la sucesión  $\{c_n\}$ , siendo :

$$c_n = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ y } \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}.$$

2.- La multiplicación de  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , como la sucesión  $\{c_n\}$ , siendo :

$$c_n = a_n \bullet b_n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ y } \{a_n\} \bullet \{b_n\} = \{a_n \bullet b_n\}$$

3.- La multiplicación de  $\{a_n\}$  por  $k \in \mathbb{R}$ , como la sucesión  $\{c_n\}$ , siendo:

$$c_n = k a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ y } k \{a_n\} = \{k a_n\}$$

4.- La división de  $\{a_n\}$  por  $\{b_n\}$ ,  $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , como la sucesión  $\{c_n\}$ ,

$$\text{siendo } c_n = \frac{a_n}{b_n}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ y } \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$$

### EJEMPLOS:

1.- Sean  $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  y  $\{b_n\} = \left\{ \frac{n+1}{n+2} \right\}$

a)  $\{a_n\} + \{b_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} \right\} = \left\{ \frac{n^2 + 2n + n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \right\} = \left\{ \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 3n + 2} \right\}$

b)  $\{a_n\} \bullet \{b_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \bullet \frac{n+1}{n+2} \right\} = \left\{ \frac{n}{n+2} \right\}$

c)  $5 \{a_n\} = \left\{ 5 \bullet \frac{n}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{5n}{n+1} \right\}$

d)  $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{ \frac{n}{n+1} \bullet \frac{n+2}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right\}$

**TEOREMA:** Si  $\{a_n\}$  converge a  $L_1$  y  $\{b_n\}$  converge a  $L_2$ , entonces:

1.-  $\{a_n + b_n\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_1 + L_2$

2.-  $\{a_n \bullet b_n\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \bullet b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_1 \bullet L_2$

3.-  $\{ka_n\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = kL_1, k \in \mathbb{R}$

4.- Si  $L_2 \neq 0$ ,  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$

**Demostración:**

1.- Como  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son convergentes, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left( n > n_0 \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists m_0 \in \mathbb{N}) \left( n > m_0 \Rightarrow |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Sea  $n' = \max \{n_0, m_0\}$  y  $\varepsilon > 0$  cualquiera.

Entonces para  $n' \in \mathbb{N}$ ,  $n' > n_0 \wedge n' > m_0 \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$  y en

consecuencia:  $|a_n + b_n - L_1 - L_2| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

**LEMAS:**

a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$

b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \wedge \exists \sqrt[k]{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{L}, \quad k \in \mathbb{Q}.$

c) Si  $\{a_n = c\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 7}{2n^2 - 5n - 1}.$

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 7}{2n^2 - 5n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{2 - 0 - 0} = \frac{3}{2}.$$

2.- Calcular :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{2n^3 - 5n + 1}.$

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{2n^3 - 5n + 1} \div n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{0+0}{2-0+0} = 0.$$

3.- Calcular :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n - 2}{5n^2}.$

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n - 2}{5n^2} \div n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{\frac{5}{n}} = \frac{1+0-0}{0} = \frac{1}{0} = \nexists.$$

4.- Calcular :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \right).$

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n - n^2 - 1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 - n - 1}{n^2 + n} = -1.$$

**TEOREMA:** Si  $\{a_n\}$  es acotada y  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

**TEOREMA:** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_0 \Rightarrow a_n > 0$ , es decir, si el límite es positivo, entonces a partir de cierto índice todos los términos son positivos.

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } n}{n}.$

**Solución:**

Como  $|\text{sen } n| \leq 1$  entonces  $\{\text{sen } n\}$  es acotada y como  $\left\{ \frac{1}{n} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

2.- Calcular :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n!}{n+1}.$

**Solución:**

$\{\sin n!\}$  es una sucesión acotada.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1} \div n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n!}{n+1} = 0.$$

3.- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \cdot \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1-2n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \div \sqrt{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = 0.$$

**TEOREMA DE ACOTACION:** Sean  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$  sucesiones, tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \text{ y } a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

**Demostración:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0' \in \mathbb{N} / \forall n > n_0' \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon.$$

Sea  $M = \max \{n_0, n_0'\}$ .

$$\text{Luego } n > M \Rightarrow n > n_0 \wedge n > n_0' \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \wedge |b_n - L| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \wedge -\varepsilon < b_n - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \wedge L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$$

$$\text{como } a_n \leq c_n \leq b_n, L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

### EJEMPLO:

Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ .

### Solución:

$$|\sin n| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ pero } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

**LEMA:** Desigualdad de Bernoulli.

Si  $k > -1$  entonces  $(1+k)^n \geq 1+nk, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**TEOREMA:** Sea  $\{a_n\}$  una progresión geométrica, es decir,

$$a_n = ar^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, a \neq 0. \text{ Demostrar que si } |r| < 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ converge y } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

### Demostración:

a) Si  $r = 0$ , es claro que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

b) Si  $0 < r < 1, \exists h > 0$  tal que  $r = \frac{1}{1+h}$

Aplicando la desigualdad de Bernoulli, resulta que:

$$(1+h)^n \geq 1+nh \Leftrightarrow \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \Rightarrow 0 \leq r^n \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{nh}$$

Ahora, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} = \frac{1}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{h} \cdot 0 = 0$

Resulta que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \Rightarrow \frac{a}{r} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

c) Si  $-1 < r < 0$ , y además  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Rightarrow -|a||r|^{n-1} \leq ar^{n-1} \leq |a|r^{n-1} \leq |a||r|^{n-1} \Rightarrow -|a||r|^{n-1} \leq |a|r^{n-1} \leq |a||r|^{n-1}$$

$$\Rightarrow -|r|^{n-1} \leq r^{n-1} \leq |r|^{n-1}$$

y como  $0 < |r| < 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^{n-1} = 0$ .

Por teorema de acotamiento,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} = 0$  y así  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

$$\therefore \text{ de a) , b) y c) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

### EJEMPLOS:

1.- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5 \cdot 3^n}{2 \cdot 7^n + 3 \cdot 4^n}$ .

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5 \cdot 3^n / : 7^n}{2 \cdot 7^n + 3 \cdot 4^n / : 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n - 5\left(\frac{3}{7}\right)^n}{2 + 3\left(\frac{4}{7}\right)^n} = \frac{0 - 5 \cdot 0}{2 + 3 \cdot 0} = 0.$$

2.- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n} - 5^n + 3}{3^n + 3^{n+1} + 4(5)^{2n}}$ .

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n} - 5^n + 3}{3^n + 3^{n+1} + 4(5)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5^n}{5^n \cdot 5^n} + 3 \frac{1}{5^{2n}}}{\frac{3^n}{5^n \cdot 5^n} + \frac{3^n \cdot 3}{5^n \cdot 5^n} + 4} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{5^n} + 3 \frac{1}{5^{2n}}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{5^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{3}{5^n} + 4} = \frac{1}{4}.$$

**CRITERIO DE LA RAZÓN:** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**EJEMPLO:**

Demostrar que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

**Demostración:**

Aplicando el criterio de la razón:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)} = 0 < 1, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

**LEMAS:**

1. Si  $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
2. Si  $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  entonces:

a)  $L \geq 0$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$ .

**EJEMPLO:**

Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

**Demostración:**

Haciendo  $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$  se demostrará que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow 1 + b_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow (1 + b_n)^n = n \Rightarrow$$

$$1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} (b_n)^2 + \dots + (b_n)^n = n$$

$$\Rightarrow n \geq 1 + \binom{n}{2} (b_n)^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (b_n)^2 = \frac{2 + n(n-1)(b_n)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2n \geq 2 + n(n-1) \cdot (b_n)^2 \Rightarrow 2n - 2 \geq n(n-1) \cdot (b_n)^2 \Rightarrow 0 \leq b_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (b_n)^2 \leq \frac{2}{n}$$

$$\text{y como } \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (b_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ahora,  $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$  pues  $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$  de modo tal que:

$$(b_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge b_n \geq 0 \Rightarrow b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

**SUCESIONES MONOTONAS****DEFINICION:**

1. Se dice que  $\{a_n\}$  es monótona creciente (o simplemente creciente) si

$$a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Se dice que  $\{a_n\}$  es monótona decreciente (o simplemente decreciente)

$$\text{si } a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Se dice que  $\{a_n\}$  es monótona, si es monótona creciente o monótona decreciente.
4. Se dice que  $\{a_n\}$  es **estrictamente creciente**, si  $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$  y es **estrictamente decreciente**, si  $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

### EJEMPLOS:

- 1.-  $\{n^2\}$  es estrictamente creciente, ya que
- $$(n+1)^2 > n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
- 2.-  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  es estrictamente decreciente, ya que  $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- 3.-  $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$  no es monótona, ya que  $a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3}$ , o sea,
- $$a_1 < a_2 \text{ y } a_2 > a_3.$$
- 4.-  $\{\sqrt{n}\}$  es estrictamente creciente, ya que  $n < n+1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ .
- 5.-  $a_1 = 1$  y  $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$  para  $n = 2, 3, 4, \dots$
- $$\therefore a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n-1}$$
- $\therefore \{a_n\}$  es estrictamente creciente.
- 6.-  $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$  es estrictamente creciente, ya que si
- $$a_n = \frac{n}{2n+1} \text{ y } a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} \Rightarrow a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{(n+1)}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} < 0 \Rightarrow$$
- $$\frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**OBSERVACIONES:**

1. Si  $\{a_n\}$  es creciente y  $m, n \in \mathbb{N} / n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$ .
2. Si  $\{a_n\}$  es decreciente y  $m, n \in \mathbb{N} / n > m \Rightarrow a_n \leq a_m$ .

**TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUCESIONES MONOTONAS**

Sea  $\{a_n\}$  una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces  $\{a_n\}$  es convergente.

**COROLARIO:** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces  $\{a_n\}$  converge.

**EJEMPLOS:**

- 1.- Demostrar  $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$  es convergente.

**Demostración:**

a)  $a_n = \frac{2^n}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ , como los términos de la sucesión

son:  $\left\{2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2^n}{n!}\right\}$ , la sucesión puede ser decreciente.

Se demostrará que  $a_n \geq a_{n+1}$ , verificando que  $a_n - a_{n+1} \geq 0$

$$\frac{2^n}{n!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n(n+1) - 2^{n+1}}{n!(n+1)} = \frac{2^n n + 2^n - 2 \cdot 2^n}{n!(n+1)} = \frac{2^n n - 2^n}{n!(n+1)} =$$

$$\frac{2^n(n-1)}{(n+1)!} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore a_n \geq a_{n+1}.$$

b) Como  $\frac{2^n}{n!} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , la sucesión  $\{a_n\}$  es acotada

inferiormente.

De a) y b),  $\{a_n\}$  es convergente.

2.- Demostrar que  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \forall n \geq 1$  es convergente y encontrar su límite.

**Demostración:**

La sucesión es  $\left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots \right\}$

a) Se demostrará por inducción que  $a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Si } n=1, a_1 = \sqrt{2} < 2$$

$$\text{Sea cierto para } n=k, \text{ luego } a_k = \sqrt{2+a_{k-1}} < 2$$

$$\text{P.D. para } n=k+1, \text{ es decir, } a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < 2$$

$$\text{Como } a_k < 2 \Rightarrow a_k + 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{a_k + 2} < 2, \therefore a_{k+1} < 2$$

Luego se ha demostrado que el conjunto es acotado superiormente.

b) Ahora se demostrará por inducción que es creciente, o sea,

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Si } n=1, a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow a_1 < a_2$$

$$\text{Sea cierto para } n=k, \text{ o sea, } a_k \leq a_{k+1}.$$

$$\text{P.D. para } n=k+1, \text{ o sea } a_{k+1} \leq a_{k+2}.$$

Como  $a_k \leq a_{k+1} \Rightarrow a_k + 2 \leq a_{k+1} + 2 \Rightarrow \sqrt{2+a_k} \leq \sqrt{2+a_{k+1}} \Rightarrow a_{k+1} \leq a_{k+2}$

De a) y b),  $\{a_n\}$  es convergente.

Se calculará el límite:

Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow a_{n+1}^2 = 2+a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2+a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\Rightarrow L^2 = 2+L \Rightarrow L = -1 \vee L = 2.$$

$L = -1$  se debe descartar pues  $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$  y  $L \geq 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

### EL NUMERO e

Sea la sucesión  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ . Para demostrar que ella converge, se utilizará el teorema fundamental.

a) Por demostrar que es acotada.

Utilizando el teorema del binomio, se tiene:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{3!} + \\ &\dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Sea } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Restando ambas igualdades se tiene:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$$

$$\therefore a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 1 + 1 = 3$$

$\therefore$  la sucesión es acotada superiormente.

b) Por demostrar que es monótona:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Es una sucesión creciente, ya que a partir del tercer término resulta ser una función creciente de  $n$ .

De a) y b)  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$  es convergente y la sucesión tiene límite.

Se define  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots = e$ .

### EJEMPLOS:

1.- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ .

**Solución:**

Sea  $p = \frac{n}{k} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{k}{n} \Rightarrow n = p \cdot k$ . Además si  $n \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow \infty$ .

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p \cdot k} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \right]^k = e^k.$$

2.- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{5n}$ .

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-5} = e^{-5}.$$

3.- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-2} \right)^{5n}$ .

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-2} \right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^{-5n} = (e^{-2})^{-5} = e^{10}.$$

### EJERCICIOS:

1.- Demostrar :

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}.$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2.$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1.$

2.- Demostrar que no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n + 1)$ , es decir que  $\{(-1)^n + 1\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge.

3.- Analizar si las siguientes sucesiones son acotadas:

a)  $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$  Resp.: si.

b)  $\{-2n\}$  Resp.: no.

c)  $\left\{ \frac{n+1}{n+2} \right\}$  Resp.: si.

d)  $\left\{ \frac{n-n^3}{n^2+1} \right\}$  Resp.: no.

4.- Analizar la monotonía de las siguientes sucesiones:

a)  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Resp.: decreciente.

b)  $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$

Resp.: creciente.

c)  $\{(-1)^n\}$

Resp.: sin monotonía.

d)  $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

Resp.: sin monotonía.

e)  $\{\sqrt{n}\}$

Resp.: creciente.

f)  $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$

Resp.: creciente.

5.- Verificar que:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+10^n}{3+3 \cdot 10^n} = \frac{1}{3}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{10+n\sqrt{n}} = 0$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2^n}{5+2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right] = \frac{1}{3}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \sin^2 n}{(4n)^2} = 0$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n!)}{n^2} = 0$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = 0$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-1}{n} \right)^n = \text{diverge}$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+5}{n+4} \right)^n = e$

$$j) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-3}{n-1} \right)^{n-3} = e^{-2}$$

$$k) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n} \right)^{2n} = e^6$$

$$l) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right] = \frac{1}{2}$$

$$m) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = 3$$

$$n) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) = 0$$

$$o) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin \frac{n\pi}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$p) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0$$

$$q) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$r) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$$

6.- Determinar si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes.

Si son convergentes, calcular su límite.

$$a) a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}, \forall n \geq 2 \quad \text{Resp.: } 2.$$

$$b) a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 2n + 3} \quad \text{Resp.: } 1.$$

$$c) a_n = \frac{2n}{1 + 2n} \quad \text{Resp.: } 1.$$

$$d) a_1 = 1, a_n = \sqrt{\frac{2a_{n-1} + 3}{4}}, \forall n \geq 2 \quad \text{Resp.: } \frac{1 + \sqrt{13}}{4}.$$

## BIBLIOGRAFIA

1. J. Armando Venero  
Análisis Matemático I  
Ediciones Gemar 1992. Lima Perú
2. N. Piskunov  
Cálculo Diferencial e Integral  
Montaner y Simon, S.A. 1997  
Barcelona
3. Sherman K. Syein  
Cálculo y Geometría Analítica  
Editorial Mc Graw Hill 1995  
México
4. Jack R. Britton, R. Ben Kriegh, León W. Rutland  
Matemáticas Universitarias. Tomo I  
Compañía Editorial Continental S.A. 1970  
México - España - Argentina - Chile
5. Material docente de los académicos.