UNIVERSIDAD DE TARAPACA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

# TOPICOS DE CALCULO

## Límites de funciones, continuidad, la derivada y sus aplicaciones.

Sra. Verónica Rey Mas.
Sra. M.Angélica Sanhueza Collinao.

Arica-Chile
2000

# UNIVERSIDAD DE TARAPACA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA



## "TOPICOS DE CALCULO: Límite de Funciones, Continuidad, la Derivada y sus Aplicaciones"

Sra. Verónica Rey Mas.
Sra. M. Angélica Sanhueza Collinao.



Arica – Chile
2000

# INDICE

**INTRODUCCIÓN**

**MATERIAS:**

**Páginas**

**CAPITULO I:**



**CAPITULO II:**

**CAPITULO III:**

## INTRODUCCIÓN

Este texto está escrito principalmente para los estudiantes de Cálculo I de la Facultad de Ingeniería y para todos aquellos interesados en temas de Cálculo Diferencial.

Para entender los contenidos de este libro es indispensable que el alumno domine los conceptos tratados en: "TOPICOS DE CALCULO: El conjunto de los Números Reales, Funciones de una Variable Real, Sucesiones", de los autores Sra. Marlene Cisternas R. Y Sr. Martín Medina Diaz. El texto anteriormente mencionado junto al desarrollo de éste conforman el programa de Cálculo I.

Teniendo presente que es un libro para el estudiante, se han presentado los conceptos de Cálculo Diferencial en forma clara y sencilla, complementados con ejemplos resueltos de modo que facilite la comprensión de los temas expuestos y finalizando con problemas propuestos.

El orden de presentación de los temas está basado en el Programa de Cálculo I de la Carrera de Ingeniería Plan Común de la Universidad de Tarapacá.

El Capítulo I trata el concepto y el cálculo de límites de una función real de una variable real. Se indican algunas demostraciones de teoremas y algunos ejemp típicos de cálculo de límites.

El Capítulo II trata la continuidad de funciones en un punto, en un interv abierto y en un intervalo cerrado, con las propiedades locales y globales de las funcio continuas. Además se analizan puntos de discontinuidad de una función y la clasificación de las mismas.

El Capítulo III trata el concepto y cálculo de derivadas, aplicaciones de las derivadas y límite de funciones que presentan formas indeterminadas. Antes de dar la definición formal de derivada se ha definido la recta tangente a una curva para mostrar con anticipación su aplicación geométrica. Se presentan las derivadas de las funciones elementales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, la derivación de funciones compuestas, etc. Además se presentan, entre otros, ejemplos de gráficas de funciones realizando un estudio detallado de ella con las herramientas que nos proporciona el cálculo de límites, la continuidad y la derivada, como ser: dominio, recorrido, intersección con los ejes, asíntotas, extremos de una función, intervalos de monotonía y de concavidad, puntos de inflexión y otros.

Finalmente, las autoras desean expresar su agradecimiento a los académicos del Departamento de Matemática de la Universidad de Tarapacá, Sra. Marlene Cisternas Riveros y Sr. Martín Medina Díaz, por la colaboración prestada, como también a la Srta. Sabina Núñez Aldoney, quien transcribió los manuscritos de este libro para llevar a feliz término este libro.

*Las Autoras*

# SIMBOLOGIA UTILIZADA

| | |
|---|---|
| $\in$ | pertenece |
| $\notin$ | no pertenece |
| $\forall$ | para todo |
| $\exists$ | existe |
| $\nexists$ | no existe |
| $\Rightarrow$ | implica |
| $\Leftrightarrow$ | si y sólo si |
| $\wedge$ | y |
| $\vee$ | o |
| $\therefore$ | luego |
| ssi | si y sólo si |
| $\overset{\frown}{AB}$ | arco AB |
| $m_T$ | pendiente de la recta tangente |
| $m_N$ | pendiente de la recta normal |

# CAPITULO I

## LIMITE DE FUNCIONES

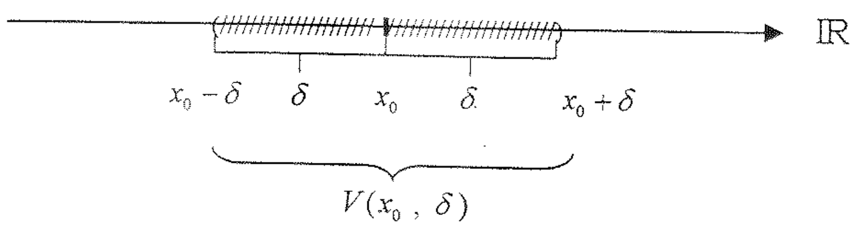
Se inicia el estudio de límite de funciones definiendo algunos conceptos básicos.

**DEFINICIONES:**

1. Vecindad : Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, se define vecindad (o entorno) de $x_0$ y de radio $\delta > 0$, al conjunto denotado por $V(x_0\ ,\ \delta) = \{x \in \mathbb{R}\ /\ |x - x_0| < \delta\ \}$.

   Se observa que $V(x_0\ ,\ \delta) = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\ \}$

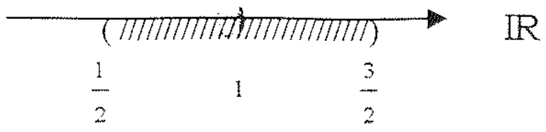
   $= \{\ x \in (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta)\ \}$.



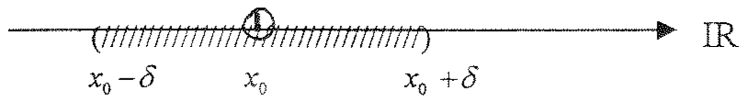

**EJEMPLO:**

$$V\left(1, \frac{1}{2}\right) = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \ |x - 1| < \frac{1}{2}\ \ \}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}\ /\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\ \ \}$$




2.- Vecindad reducida: Sea $x_0 \in \mathrm{IR}$, se define vecindad reducida de centro $x_0$ y de radio $\delta > 0$, al conjunto denotado por $V^*(x_0\ ,\ \delta) = \{\, x \in \mathrm{IR} \ /\ |\, x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \ \}$.




3.- Punto de acumulación: Sean $A \subseteq \mathrm{IR}$ y $x_0 \in \mathrm{IR}$, se define $x_0$ como punto de acumulación de A, si toda vecindad reducida de $x_0$ tiene intersección no vacía con A, es decir, $\forall\ \delta > 0,\ V^*(x_0\ ,\delta) \cap A \neq \phi$.

**EJEMPLO:**

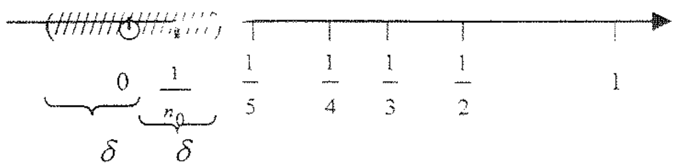
Sea $A = \{x \in \mathrm{IR}\ /\ x = \frac{1}{n},\ n \in \mathrm{IN}\ \} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

Se demostrará que 0 es punto de acumulación de A.

En efecto, dado $\delta > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathrm{IN}\ /\ n_0 > \frac{1}{\delta}$ (siempre existe un número natural mayor que un real).

Luego $\frac{1}{n_0} < \delta \Rightarrow \frac{1}{n_0} \in A \ \ y \ \ \frac{1}{n_0} \in V^*\ (0,\ \delta)$

$\therefore$ 0 es punto de acumulación de A.



Para visualizar el concepto de límite de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se analizarán los siguientes ejemplos:

1.- Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ ; $Dom\, f = \mathbb{R} - \{-2\}$

¿Qué pasa con $f(x)$ cuando $x$ toma valores cercanos a -2? Se analizará primero por la izquierda de –2, y luego por la derecha de –2.

a) Por la izquierda:

| $x$ | -2,9 | -2,8 | -2,5 | -2,4 | -2,3 | -2,1 | -2,01 | -2,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -4,9 | -4,8 | -4,5 | -4,4 | -4,3 | -4,1 | -4,01 | -4,001 |

b) Por la derecha:

| $x$ | -1 | -1,5 | -1,6 | -1,7 | -1,8 | -1,9 | -1,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -3 | -3,5 | -3,6 | -3,7 | -3,8 | -3,9 | -3,999 |

Se aprecia que a medida que $x$ se aproxima a –2, $f(x)$ se aproxima a –4.

2.- Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ que no está definida para $x = 0$ ¿Qué pasará con $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a 0?,

a) Por la izquierda:

| $x$ | -0,1 | -0,05 | -0,001 | -0,00015 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,9983 | 0,99958 | 0,99999983 | 0,999999996 |

b) Por la derecha:

| $x$ | 0,1 | 0,05 | 0,001 | 0,00015 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,998 | 0,9995 | 0,99999983 | 0,999999996 |

Se aprecia que a medida que $x$ se aproxima a 0, $f(x)=\dfrac{\text{sen } x}{x}$ se aproxima a 1.

Se dice que el límite de $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ es 1 cuando $x$ tiende a cero, lo que se denota por $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } x}{x}=1$.

**OBSERVACIONES:**

1.- En el ejemplo 1) este límite indica que la distancia de $f(x)$ y $-4$ es pequeña cuando la distancia de $x$ y $-2$ también lo es. Es decir $|f(x)-(-4)|$ es pequeño cuando $|x-(-2)|$ lo es. Así si $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ son tan pequeños como se quiera, se dice que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-4$, significando que $|f(x)-(-4)|<\varepsilon$ cuando $|x-(-2)|<\delta$. Es decir, para cualquier número pequeño $\varepsilon$ es posible determinar otro número pequeño $\delta$.

2.- Aunque en los ejemplos anteriores $f$ no está definida para $x_0=-2$ y para $x_0=0$, el proceso del límite es válido.

**DEFINICIÓN:**

Sea $f: A\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$. Se dice que un número $L\in\mathbb{R}$ es límite de $f$ cuando $x$ tiende a $x_0$, si y sólo si para todo $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ cuando $0<|x-x_0|<\delta$, es decir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0 \,/\, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Además $|f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$.

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta\ ,\ x \neq x_0 \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Es decir $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $f(x) \in (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$ siempre que $x \in (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta)$.

**TEOREMA:** Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a $L$, $L$ es único.

**Demostración:**

Sean $L_1\, y\ L_2$ los límites de $f(x)$, cuando $x \to x_0$

Luego $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0 \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\, f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\ \delta_2 > 0 \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\, f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Sea $\delta = min\,\{\delta_1\ ,\ \delta_2\}\ y\ \varepsilon > 0$ cualquiera

$\therefore$ si $0 < |\, x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |\, x - x_0| < \delta_1 \wedge 0 < |\, x - x_0| < \delta_2$

$\Rightarrow |\, f(x) - L_1\ | < \dfrac{\varepsilon}{2} \wedge |\, f(x) - L_2\,| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\therefore |\, L_1 - L_2\,| = |\, L_1 - f(x) + f(x) - L_2\,| \leq |\, f(x) - L_1| + |\, f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore |\, L_1 - L_2\ | < \varepsilon,\ \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \therefore L_1 - L_2 = 0 \Leftrightarrow L_1 = L_2$

**EJEMPLOS:**

1.- Sea $f(x) = c,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, demostrar que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c,\ \forall\ x_0 \in \mathbb{R}$

**Demostración:**

Sea $\varepsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que :

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$, pero como $f(x) = c,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, se tiene que para cualquier $\delta > 0$, $0 < |x - x_0| < \delta$, $|\, f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ (verdadero)

$$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

2.- Sea $f(x) = 4x - 1$. Si $\lim_{x \to 3} f(x) = 11$, determinar $\delta$ para $\varepsilon = 0{,}01$ tal que $|f(x) - 11| < 0{,}01$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$.

**Solución:**

$|f(x) - 11| < 0{,}01 \Rightarrow |4x - 1 - 11| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 0{,}01 \Rightarrow |x - 3| < 0{,}0025.$

Luego considerando $\delta = 0{,}0025$ se tiene que $|4x - 1 - 11| < 0{,}01$ siempre que $0 < |x - 3| < 0{,}0025$.

3.- Demostrar que $\lim_{x \to 3} (4x - 1) = 11$.

**Demostración:**

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |4x - 12| < \varepsilon$

$|4x - 12| = 4|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$

Sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 11| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to 3} (4x - 1) = 11$$

4.- Demostrar que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

**Demostración:**

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

Se tiene que $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$.

Para acotar $|x + 2|$, sea $\delta_1 = 1 \Rightarrow |x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow$

$1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow -5 < 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow |x + 2| < 5$

Como $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Sea $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

$\therefore$ Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ $\quad \therefore \lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

5.- Demostrar que $\lim_{x \to -2} x^3 = -8$.

**Demostración:**

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |x^3 + 8| < \varepsilon$.

Se tiene que $|x^3 + 8| = |(x+2)(x^2 - 2x + 4)| = |x+2||x^2 - 2x + 4|$. Para acotar $|x^2 - 2x + 4|$, se tiene:

Sea $\delta_1 = 1 \Rightarrow |x+2| < 1 \Rightarrow -1 < x + 2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1$, de donde se obtiene:

$1 < x^2 < 9 \quad y \quad 2 < -2x < 6$

$\therefore 3 < x^2 - 2x < 15 \ / \ +4$

$7 < x^2 - 2x + 4 < 19 \Rightarrow |x^2 - 2x + 4| < 19$

$\therefore |x+2||x^2 - 2x + 4| < |x+2|\,19 < \varepsilon$

$\therefore |x+2| < \dfrac{\varepsilon}{19} = \delta_2$.

Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} = min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{19}\right\} \quad \therefore \lim_{x \to -2} x^3 = -8$.

6.- Demostrar que $\lim_{x \to 5} \dfrac{2}{x-4} = 2$.

**Demostración:**

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-5| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{2}{x-4} - 2\right| < \varepsilon$.

Se tiene que $\left|\dfrac{2}{x-4} - 2\right| = \left|\dfrac{2 - 2x + 8}{x-4}\right| = \left|\dfrac{-2(x-5)}{x-4}\right| = 2\left|\dfrac{x-5}{x-4}\right|$. Para acotar $\dfrac{1}{|x-4|}$, se tiene:

Sea $\delta_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow |x-5| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < x - 5 < \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} < x - 4 < \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{x-4} < 2, \quad \therefore \left|\dfrac{1}{x-4}\right| < 2$.

$$\therefore \ \frac{2\,|x-5|}{|x-4|} < 4|x-5| < \varepsilon \quad \therefore \ |x-5| < \frac{\varepsilon}{4} = \delta_2$$

Sea $\delta = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ $\therefore$ $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2}{x-4} = 2$

## OPERACIONES CON LIMITE

**TEOREMA:** Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones, $x_0$ punto de acumulación de $A$.

Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ $y$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$. Entonces:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [\ f(x) + g(x)\ ] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 + L_2$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \bullet g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \bullet \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 \bullet L_2$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} c\,f(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c\,L_1$ ; $c \in \mathbb{R}$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ , $con\ L_2 \neq 0$

5) Sea $f(x) = c \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ ; $c \in \mathbb{R}$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ , siempre que $\sqrt[n]{L_1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^n = L_1^n$ , $n \in \mathbb{R}$

**Demostración 1):**

Sean $\varepsilon > 0$ $y$ $\delta_1$ $y$ $\delta_2$ tales que:

$0 < |\ x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\ f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y

$0 < |\ x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\ g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$

Luego $\quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow 0<|x-x_0|<\delta_1 \ \wedge \ 0<|x-x_0|<\delta_2$, siendo

$$|f(x)+g(x)-L_1-L_2| \leq |f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\therefore \ \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2$$

**OBSERVACION:** Usando inducción matemática puede demostrarse una generalización del teorema 1) a más de dos límites, es decir,

$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=L_1$, $\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_2,\ldots\ldots\ldots;$ $\lim_{x\to x_0} f_n(x)=L_n$,

entonces $\lim_{x\to x_0}[\ f_1(x)+f_2(x)+\ldots\ldots\ldots+f_n(x)\ ]=L_1+L_2+\ldots\ldots\ldots+L_n$ y

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots\ldots f_n(x)]=L_1\cdot L_2\ldots\ldots L_n$$

**EJEMPLOS:**

Calcular:

1) $\lim_{x\to 5} 7=7$

2) $\lim_{x\to 3}(2x+1)=2\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}1=2\bullet 3+1=7$

3) $\lim_{x\to -2}(5x+7)=-3$

4) $\lim_{x\to -2}(5x+7)^4=\left(\lim_{x\to -2}(5x+7)\right)^4=(-3)^4=81$

5) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x}{-7x+1}=\dfrac{\lim_{x\to 4}x}{\lim_{x\to 4}(-7x+1)}=\dfrac{4}{-27}$

6) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x}{-7x+1}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\dfrac{x}{(-7x+1)}}=\left(-\dfrac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$

7) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$

8) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=27$

9) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\bullet\dfrac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\lim_{h\to 0}\dfrac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=(*)$

Sea $z^6=x+1$. Si $x\to 0 \Rightarrow z\to 1$

Además $z^2=\sqrt[3]{x+1}$ $y$ $z^3=\sqrt{x+1}$

$\therefore$ de (*) se tiene:

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-z^3}{z^6-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2(1-z)}{(z^3-1)(z^3+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{-z^2(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)(z^3+1)}=-\frac{1}{6}.$$

11) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ ; $n\in$ Q.

$\lim\limits_{x\to x_0} x^n = \lim\limits_{x\to x_0} x\bullet x\bullet x\bullet x\bullet \dots\dots\dots\bullet x$

$\lim\limits_{x\to x_0} x^n = \lim\limits_{x\to x_0} x\bullet \lim\limits_{x\to x_0} x\bullet\dots\dots\dots\bullet \lim\limits_{x\to x_0} x$

$\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0\bullet x_0\bullet\dots\dots\dots\bullet x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$.

12) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ no existe

**Demostración:**

Sea $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=L$.

$\therefore 1=\lim\limits_{x\to 0}1=\lim\limits_{x\to 0} x\bullet\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\bullet\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=0\bullet L=0$, pero $1\neq 0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ no existe

## LIMITES LATERALES.

Cuando en un límite $x \to x_0$ se entiende que este acercamiento puede ser tanto por la derecha de $x_0$ como por la izquierda de $x_0$.

**DEFINICIONES:**

1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, llamado límite lateral derecho.

   En este caso $x$ tiende a $x_0$ con valores mayores que $x_0$.

2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, llamado límite lateral izquierdo.

   En este caso $x$ se aproxima a $x_0$ con valores menores que $x_0$.

**OBSERVACIONES:**

1) De las definiciones dadas, se tiene que:

   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \;\wedge\; \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

2) Si alguno de los límites laterales no existe, entonces, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \nexists$.

3) Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$, $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe.

**EJEMPLOS:**

1) Calcular : $\lim\limits_{x \to 0} |x|$.

   **Solución:**

   Si $x > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$.

   Si $x < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = -0 = 0$.

   $\therefore\; \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

2) Analizar $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$.

**Solución:**

Como $dom\, f = \mathbb{R}_0^+$, $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ no existe. Luego $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ no existe, aunque $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$.

3) Analizar $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}+1\right)$.

**Solución:**

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Por lo tanto $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}+1\right)$ no existe.

4) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & si \quad x \le 0 \\ 1\ , & si \quad x > 0 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**Solución:**

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$. Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, entonces:

$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

5) Sea $g(x) = \begin{cases} |x|, & si \quad x \neq 0 \\ 2\ , & si \quad x = 0 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x\to 0} g(x)$.

**Solución:**

$$g(x) = \begin{cases} x, & si \quad x > 0 \\ 2\,, & si \quad x = 0 \\ -x\,, & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$\therefore \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$.

$\therefore \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$

6.- Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 & , si \quad x \le 1 \\ -x+2, & si \quad x > 1 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$.

**Solución:**

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 = 1, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x+2) = 1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 1.$

7) Sea $f(x) = \begin{cases} 4, & si \quad x < 1 \\ 3x+1, & si \quad 1 \le x < 2 \\ 4, & si \quad x = 2 \\ -5x+7, & si \quad x > 2 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$.

**Solución:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x+1) = 4 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3x+1) = 7 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-5x+7) = -3 \end{array}\right\} \ne \therefore \lim_{x\to 2} f(x) \nexists .$$

**TEOREMA:**

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ $y$ $g(x)$ es acotada en un entorno de $x_0$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) \bullet g(x) = 0$.

**EJEMPLO:**

Demostrar que $\lim_{x\to 0} x \bullet \text{sen } x = 0.$

**Demostración:**

Sea $f(x) = \text{sen } x$ $y$ $g(x) = x$

Se tiene que $\lim_{x\to 0} x = 0$ $y$ $|\text{sen } x| \le 1$, $\therefore f(x)$ es acotada.

$\therefore \lim_{x\to 0} x \bullet \text{sen } x = 0.$

**TEOREMA DE ACOTACION:**

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ , $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ y $h(x)$ es tal que $f(x) \le h(x) \le g(x)$,

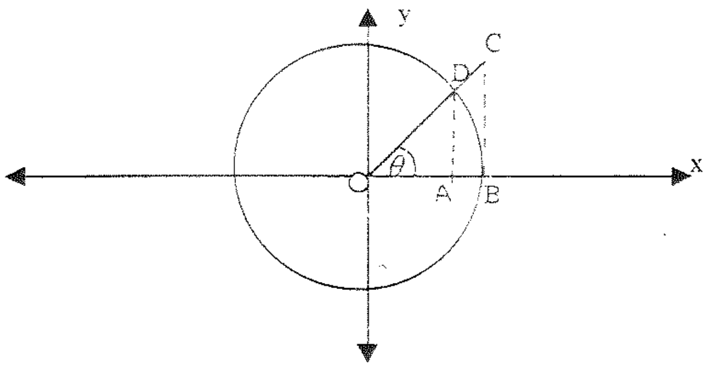
$\forall\, x \in V\,(x_0\,, \delta)$ , entonces $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$.

**LIMITES TRIGONOMETRICOS.**

I.- Obtención de los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0} \text{sen } x,\ \lim_{x\to 0} \cos x\,,\ \lim_{x\to 0} \text{tg } x.$

1.- Considerando una circunferencia C (0,0) y radio 1, se tiene :




Del gráfico se deduce que:
$$\begin{aligned} |\text{sen } \theta| &= \overline{AD} \\ |\cos\theta| &= \overline{OA} \\ |\text{tg } \theta| &= \overline{BC}. \end{aligned}$$

Además : $\overline{AD} \le \widehat{BD} \le \overline{BC} \Rightarrow |\text{ sen } \theta| \le |\theta| \le |\text{ tg}\theta| \Rightarrow -|\theta| \le \text{sen } \theta \le |\theta|.$

Como $\lim_{\theta\to 0}|\theta| = 0$, por teorema de acotamiento, $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$.

$\therefore \boxed{\lim_{\theta\to 0}\operatorname{sen}\theta = 0}$

2.- En la figura se observa también que $\overline{BD} \le \widehat{BD}$ y en triángulo $DAB$ se tiene:

$\overline{BD}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2$ ; $\overline{DA} = \operatorname{sen}\theta$ ; $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 1 - \cos\theta$

$\overline{BD}^2 = \operatorname{sen}^2\theta + (1-\cos\theta)^2$

$\overline{BD}^2 = \operatorname{sen}^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$

$\overline{BD}^2 = 2 - 2\cos\theta$.

Como $\overline{BD} \le \widehat{BD} \Rightarrow \sqrt{2-2\cos\theta} \le |\theta| \Rightarrow 2 - 2\cos\theta \le \theta^2 \Rightarrow 1 - \cos\theta \le \dfrac{\theta^2}{2} \Rightarrow$

$$-\frac{\theta^2}{2} \le -1 + \cos\theta \le 0 \Rightarrow 1 - \frac{\theta^2}{2} \le \cos\theta \le 1.$$

Pero $\lim_{\theta\to 0}\left(1 - \dfrac{\theta^2}{2}\right) = 1$, y por teorema de acotación, $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$.

$\therefore \boxed{\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1}$

3.- $\lim_{\theta\to 0}\operatorname{tg}\theta = \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{0}{1} = 0.$

$\therefore \boxed{\lim_{\theta\to 0}\operatorname{tg}\theta = 0}$

Además $\lim_{\theta\to 0}\operatorname{cotg}\theta \nexists$, $\lim_{\theta\to 0}\sec\theta = 1$ y $\lim_{\theta\to 0}\operatorname{cosec}\theta \nexists$.

II.- Obtención de los siguientes límites : $\lim_{x\to x_0}\operatorname{sen} x$ y $\lim_{x\to x_0}\cos x$.

1.- Sea $x - x_0 = h$, si $x \to x_0 \Rightarrow h \to 0$.

$\therefore \lim_{x\to x_0}\operatorname{sen} x = \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(\operatorname{sen} x_0 \bullet \cos h + \cos x_0 \bullet \operatorname{sen} h) = \operatorname{sen} x_0$.

$\therefore \boxed{\lim_{x\to x_0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0}$

2.- Análogamente

$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\ (\cos x_0 \bullet \cos h - \text{sen}\, x_0 \bullet \text{sen}\, h) = \cos x_0$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to x_0}\cos x \ = \cos x_0}$$

III.- Obtención de $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\text{sen}\ \theta}{\theta}$

De la parte I) se tiene que $|\text{sen}\,\theta| \le |\theta| \le |\text{tg}\,\theta|$. Considerando límites laterales , se tiene:

a) Si $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\text{sen}\ \theta \le \theta \le \text{tg}\,\theta /\because \text{sen}\ \theta \Rightarrow 1 \le \dfrac{\theta}{\text{sen}\,\theta} \le \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow$

$\cos\theta \le \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \le 1$ . Como $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ y por teorema de acotamiento, $\lim_{\theta\to 0^+}\dfrac{\text{sen}\ \theta}{\theta} = 1$

b) Si $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow -\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(-\theta) \le \dfrac{\text{sen}\,(-\theta)}{-\theta} \le 1$

$\Rightarrow \cos\theta \le \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \le 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0^-}\dfrac{\text{sen}\ \theta}{\theta} = 1$

de a) y b) $\boxed{\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\text{sen}\ \theta}{\theta} = 1}$

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}$

**Solución:**

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} \bullet \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\,(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}^2\,\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\ \theta}{\theta} \bullet \lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\ \theta}{(1+\cos\theta)} = 1 \bullet \frac{0}{2} = 0$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\bullet\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\bullet\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\bullet\sqrt{x}=1\bullet 0=0.$$

4.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+2\cos^2 x-1}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\,(\cos x-1)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\bullet\frac{\cos x}{\cos x+1}=\frac{-2}{2}=-1.$$

**OBSERVACION :**

Sean $f$ y $g$ funciones tales que $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$, entonces $L_1\le L_2$.

## LIMITES ESPECIALES

Se considerarán límites especiales, los siguientes:

1.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } x}{x}=1$

2.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

3.- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

4.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a\ ,\ a>0$

5.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

6.- $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}\ ,\ a>0$

**Demostración 3:**

Sea $x=\dfrac{1}{t}$. Si $x\to 0\Rightarrow t\to\infty$. Sustituyendo, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e.$$

**Demostración 4:**

Sea $a^{x}-1=t\Rightarrow a^{x}=t+1/\ln\Rightarrow x\ln a=\ln(t+1),\quad si\quad x\to 0\Rightarrow t\to 0$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{(a^{x}-1)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{t}\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}=\frac{\ln a}{\ln\left(\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\right)}=$$

$$=\frac{\ln a}{\ln e}=\ln a.$$

Si $a=e$ entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=\ln e=1.$

**EJEMPLOS:**

1.- $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 2^{\lim\limits_{x\to 0} x} = 2^0 = 1.$

2.- $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\operatorname{cosec} \pi\, x = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\operatorname{sen}\pi\, x}$

Sea $x-3=t$. Si $x\to 3 \Rightarrow t\to 0$. Sustituyendo se tiene:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen}\pi(3+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen}(3\pi+\pi t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen}(\pi+\pi t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{-\operatorname{sen}\pi t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{-\pi\,\dfrac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}} = -\frac{1}{\pi}.$$

3.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-ax}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-bx}-1}{x} =$

$$\lim_{x\to 0}(-a)\left(\frac{e^{-ax}-1}{-ax}\right) - \lim_{x\to 0}(-b)\left(\frac{e^{-bx}-1}{-bx}\right) = -a+b = b-a.$$

4.- $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln x] = \lim\limits_{x\to\infty} x \bullet \ln\dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1.$

5.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}} \bullet \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e\bullet 1 = e.$$

6.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}}{\dfrac{c^x-1}{x}-\dfrac{d^x-1}{x}} = \dfrac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d} = \dfrac{\ln\dfrac{a}{b}}{\ln\dfrac{c}{d}}.$

## LIMITES INFINITOS

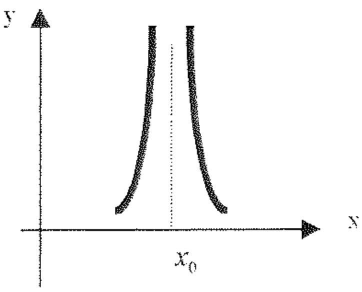
**DEFINICIONES:**

1.- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

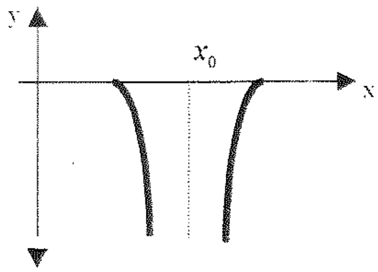
2.- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

Gráficamente se tiene:

Caso 1:




Caso 2:




La recta $x = x_0$, se denomina asíntota vertical. Según los gráficos, a medida que $x$ se aproxima a $x_0$, $f(x)$ aumenta indefinidamente (caso 1) o disminuye indefinidamente (caso 2).

Con respecto a los límites laterales, se tiene:

1.1.- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$

1.2.- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$

1.3.- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

1.4.- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

**EJEMPLOS:**

1.- Probar que $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4} = +\infty.$

**Demostración:**

$\forall\ M > 0, \exists\ \delta\ > 0/\ 0 < x-4 < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x-4} > M$ , es decir debe $\exists\delta > 0\ /\ x-4 < \delta.$

Si $\dfrac{1}{x-4} > M \Rightarrow \dfrac{1}{M} > x-4$, ya que $x > 4$ , $\therefore\ x-4 > 0 \Rightarrow$

$x-4 < \dfrac{1}{M} = \delta.$

$\therefore \exists\ \delta = \dfrac{1}{M}\ /\ 0 < x-4 < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x-4} > M.$

2.- Probar que $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty.$

**Demostración:**

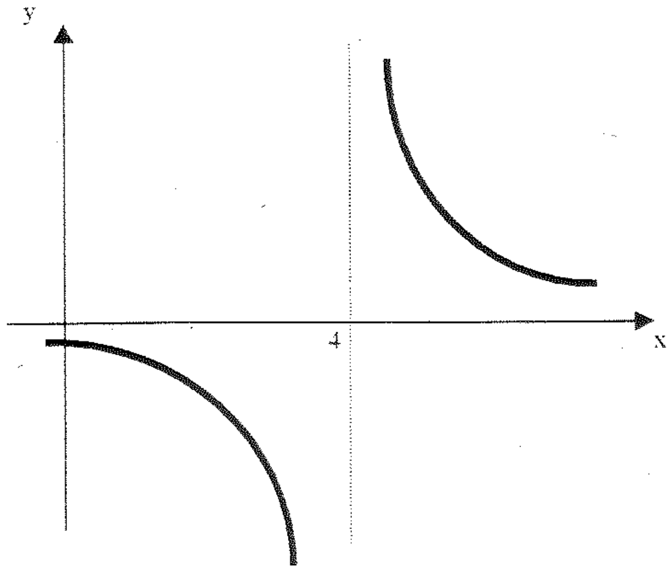
$\forall\ M > 0\ ,\ \exists\ \delta > 0\ /\ 0 < 4-x < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x-4} < -M.$

$\dfrac{1}{x-4} < -M$ ; *con* $x < 4,\ \ x-4 < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{M} < x-4 \big/ (-1)$

$\dfrac{1}{M} > 4-x \Rightarrow 4-x < \dfrac{1}{M} = \delta,$

$\therefore\ \exists\ \delta = \dfrac{1}{M}\ /\ \dfrac{1}{x-4} < -M$ , cuando $0 < 4-x < \delta.$

Gráficamente la situación de ambos es:



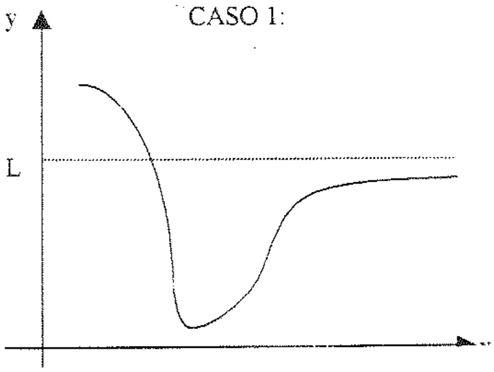

**LIMITES AL INFINITO**

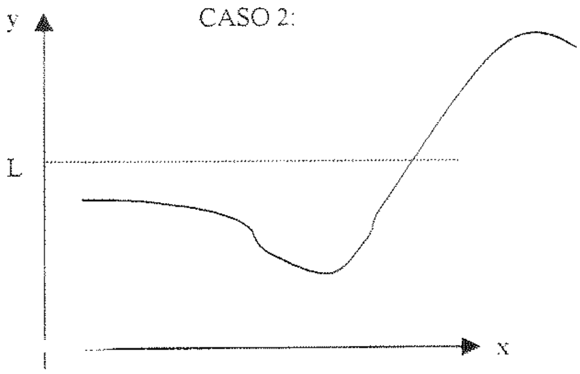
**DEFINICION:**

1.- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \ / \ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

2.- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \ / \ x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

Gráficamente se tiene:




La recta $y = L$ se denomina asíntota horizontal.

**EJEMPLOS:**

1.- Demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

**Demostración:**

P.D. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists M > 0\ /\ x > M \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x-1}\right| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{|x-1|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < |x-1|.$$

Sea $x-1>0 \Rightarrow x-1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \dfrac{1}{\varepsilon}+1$.

Haciendo $M = 1+\dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, se verifica que $M$ existe.

$$\therefore\ x > 1+\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x-1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right| < \varepsilon\ \therefore\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0.$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+3x^2+1}{6x^4-7x+3}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+1}{6x^4-7x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+1}{6x^4-7x+3} \bullet \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{6-\frac{7}{x^3}+\frac{3}{x^4}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$

**Solución:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+5}{4x^3-1} \bullet \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{4-\frac{1}{x^3}} = 0.$$

4.- Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

5.- Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x+1}, & si \quad x\le 0\\ \dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}, & si \quad 0<x<2\\ 5x+1, & si \quad x\ge 2\end{cases}$

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

**Solución:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+3}{x+1}=3\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}3\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}=3\bullet1=3\end{array}\right\}\therefore\lim_{x\to0}f(x)=3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}=\dfrac{\operatorname{sen}6}{2}\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(5x+1)=11\end{array}\right\}\neq\therefore\lim_{x\to2}f(x)\nexists.$$

6.- Calcular $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$.

**Solución:**

$$\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1+\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{m}-1}\bullet m\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)}.$$

Si $m\to\infty\Rightarrow\left(\cos\dfrac{x}{m}-1\right)\to0$.

Entonces $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1+\left(\cos\dfrac{x}{m}-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{m}-1}}\right]^{m\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)} = e^{\lim\limits_{m\to\infty} m\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)} = e^0 = 1,$

ya que

$$\lim_{m\to\infty} m\left(\cos\frac{x}{m}-1\right) = \lim_{m\to\infty} x\bullet\frac{m}{x}\left(\cos\frac{x}{m}-1\right) = \lim_{m\to\infty} -x\frac{\left(1-\cos\frac{x}{m}\right)}{\frac{x}{m}} = -x\bullet 0 = 0.$$

Haciendo $\dfrac{x}{m}=u$. Si $m\to\infty \Rightarrow u\to 0$. Luego $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m = e^0 = 1.$

7.- Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

**Solución:**

Sea $x-\dfrac{\pi}{2}=t$. Si $x\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t\to 0.$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{\ln \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{-t} = \lim_{t\to 0}\ln(\cos t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\ln(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}\bullet\frac{-(\cos t-1)}{t}} = \ln e^0 = \ln 1 = 0.$$

8.- Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+4x-4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

**Solución:**

Si $x\to 1\to x-1\to 0$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+4x-4}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{-3x+3}{x^2+4x-4}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{-3(x-1)}{x^2+4x-4}\right)^{\frac{(x^2+4x-4)}{-3(x-1)}\bullet\frac{3}{x^2+4x-4}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[ \left( 1 + \frac{-3(x-1)}{x^2+4x-4} \right)^{\frac{x^2+4x-4}{-3(x-1)}} \right]^{\frac{3}{x^2+4x-4}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{x^2+4x-4}} = e^3.$$

## ASINTOTAS VERTICALES, HORIZONTALES Y OBLICUAS

**DEFINICION:**

1.- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f$, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

2.- La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua derecha de $f$, si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = b$.

3.- La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua izquierda de $f$, si $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = b$.

4.- Si en los casos 2 ó 3, $m = 0$ se tendrá una asíntota horizontal $y = b$.

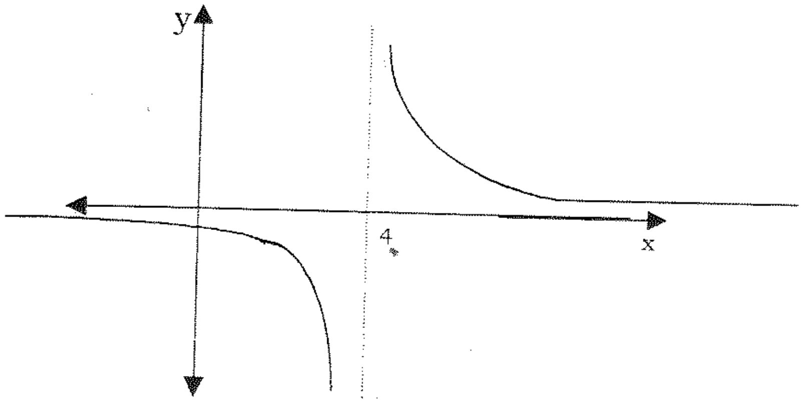
**EJEMPLOS:**

1.- Sea $f(x) = \frac{1}{x-4}$, determinar las asíntotas verticales y horizontales.

**Solución:**

$\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty$.

Luego $x = 4$ es asíntota vertical. Además $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-4} = 0 \therefore y = 0$ es asíntota horizontal.




2.- Determinar las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

**Solución:**

a) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1^+}x^2}{\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x+1}\bullet\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x-1}}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt2}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=+\infty$

$\therefore\ x=1$ es una asíntota vertical

Análogamente $x=-1$ es otra asíntota vertical (comprobarlo).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1=m$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\bullet\dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{x^2+x\sqrt{x^2-1}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^4-x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2+x\sqrt{x^2-1})}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\bullet(x^2+x\sqrt{x^2-1})}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x^2-1}\bullet\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2} = 0.$$

$\therefore\ y = x$ es una asíntota oblicua derecha.

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right]$$

Sea $z=-x$ . Si $x\to-\infty \Rightarrow z\to+\infty$ .

Luego $\lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}}-z\right) = 0 = b$ (calculado anteriormente).

$\therefore\ y=-x$ es una asíntota oblicua izquierda.

3.- Sea $f(x) = |x+4| + \frac{4}{|x|-3}$ . Hallar las asíntotas de $f$ .

**Solución:**

a) $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$

$\therefore\ x=3,\ x=-3$ son asíntotas verticales.

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x}+\frac{4}{x(x-3)}\right) = 1 = m.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+4+\frac{4}{x-3}-x\right)=4=b.$$

$\therefore\ y=x+4$ es asíntota oblicua derecha.

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-4}{x}+\frac{4}{x(-x-3)}=-1=m$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-4-\frac{4}{x+3}+x\right)=-4=b$$

$\therefore\ y=-x-4$ es asíntota oblicua izquierda.

4.- Dada $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{1}{x+1}, & si\ x<-1 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & si\ x>-1 \end{cases}$

Hallar las asíntotas.

**Solución:**

a) Para $x=-1$.

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+2x+2}{x+1}=-\infty$$

$\therefore\ x=-1$ es asíntota vertical.

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3+x}=0=m.$$

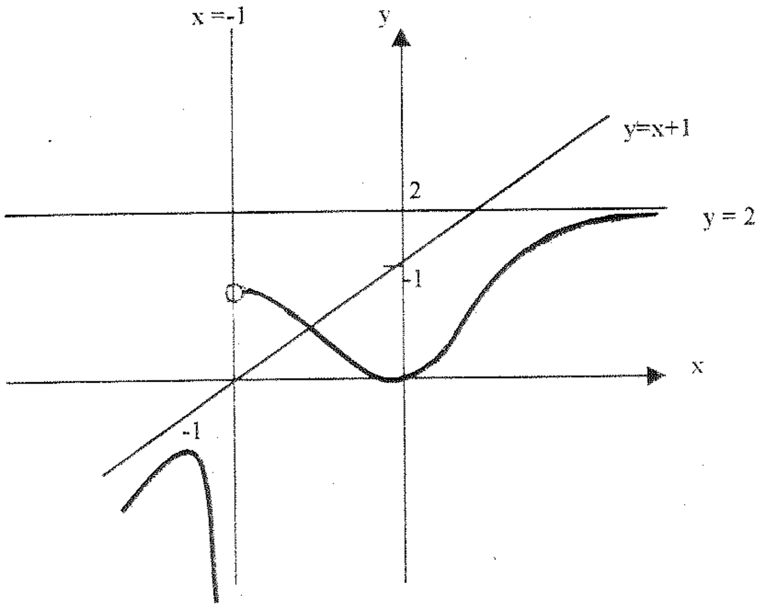
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2+1}-0\right)=2=b.$$

$\therefore\ y=2$ es asíntota horizontal.

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x^2+x}\right)=1=m.$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left( x + 1 + \frac{1}{x+1} - x \right) = 1 = b.$$

$\therefore\ y = x + 1$ es asíntota oblicua izquierda.




**EJERCICIOS:**

1.- Aplicando la definición de límite, demostrar:

a) $\lim_{x \to 4} \frac{4}{x-2} = 2$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2(x^2+1)} = 0$

c) $\lim_{x \to 1} \left( x^3 + \frac{1}{x} \right) = 2$

d) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \sqrt{4x-1} = 1$

2.- Calcular :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ $\left(\text{Resp.}: \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{x^3-1}-\dfrac{2}{x-1}\right)$ $(\text{Resp.}: -2)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}\right)$ $\left(\text{Resp.}: \dfrac{q}{p}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt[5]{x^5+2x}}$ $(\text{Resp.}: 0)$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$ $(\text{Resp.}: \nexists)$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x}$ $(\text{Resp.}: \nexists)$

g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}, & si\ x>1\\ \dfrac{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x-1}, & si\ x<1\end{cases}$ $\left(\text{Resp.}: \dfrac{3}{2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases}5x-1, & si\ x\le 1\\ 4-x, & si\ x>1\end{cases}$ ; $g(x)=\begin{cases}3-2x, & si\ x<1\\ x-1, & si\ x=1\\ 4x-2, & si\ x>1\end{cases}$

$(\text{Resp.}: 5)$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-3)+g(x-2)}{h(x+5)}$, siendo $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{1+x}, & si\ x<-1\\ x^2+2x, & si\ x>-1\end{cases}$ ;

$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & si\ x<0\\ 1+2x, & si\ x>0\end{cases}$ ; $h(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-21}{7-x}, & si\ x<7\\ 2x^2-22x+56, & si\ x>7\end{cases}$ $\left(\text{Resp.}: \dfrac{1}{3}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(x+3)^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ $(\text{Resp.}: 0)$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{x^3}$ $\left(\text{Resp.}: -\dfrac{1}{2}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-\cot g\, x-1+\operatorname{cosec} x}{x}$ $\left(\text{Resp.}: \dfrac{5}{6}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$ $\left(\text{Resp.}: \dfrac{1}{2}\right)$

n) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{2x}{m}\right)^m$ $(\text{Resp.}: 1)$

o) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x+1}{(x+3)(x-3)}$ $(\text{Resp.}: -\infty)$

p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$ $(\text{Resp.}: e^3)$

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ $(\text{Resp.}: 1)$

r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$ $(\text{Resp.}: e^{-2})$

s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{sen}(\pi x)-\operatorname{sen}(3\pi x)}{x^3}$ $\left(\text{Resp.}: 4\pi^3\right)$

3.- Determinar los valores de $a,\ b\ y\ L$, si $L=\lim\limits_{x\to 2b}\dfrac{x^3-x^2+ax+12}{x^2-4bx+4b^2}\in\mathbb{R}$.

$\left(\begin{array}{c}\text{Resp.}: a=-8,\ b=1\\ L=5\end{array}\right)$

4.- Determinar *dom f* y las asíntotas (si existen) para:

a) $f(x)=-x+1+\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-13x^2+36}}$ $(\text{Resp.}: x=\pm 3,\ x=\pm 2,\ y=x+1)$

b) $f(x)=3-2x-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x-2}}$ $\left(\begin{array}{c}\text{Resp.}: x=-1,\ x=2,\\ y=-3x+\dfrac{5}{2},\ y=-x-\dfrac{7}{2}\end{array}\right)$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}+x-5$ $\left(\begin{array}{c}\text{Resp.}: y=2x-5\\ y=-5\end{array}\right)$

# CAPITULO II

## FUNCIONES CONTINUAS

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0$ un punto de acumulación de $A$.

Se dice que $f$ es continua en $x = x_0 \Leftrightarrow$

a) $f(x_0)$ está definida $(x_0 \in Dom\, f)$

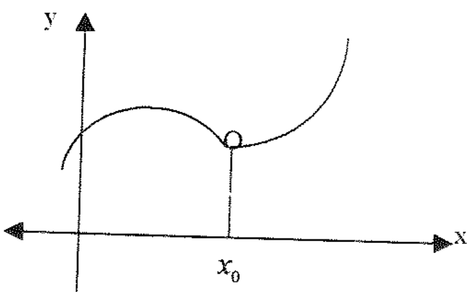
b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe $y$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

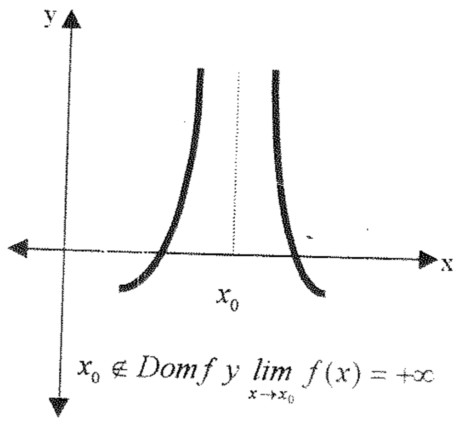
Si una de estas condiciones no se cumple, se dice que $f$ es discontinua en $x = x_0$.

**OBSERVACION:**

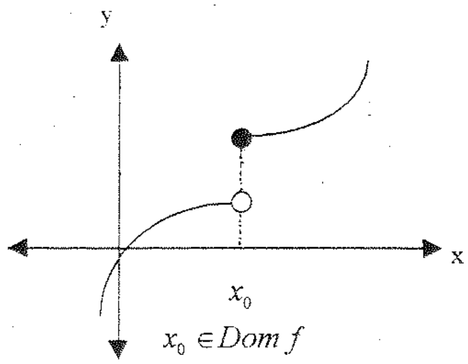
Los siguientes gráficos muestran ejemplos de algunas funciones discontinuas en $x = x_0$:




$x_0 \notin Dom\, f$, pero $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$



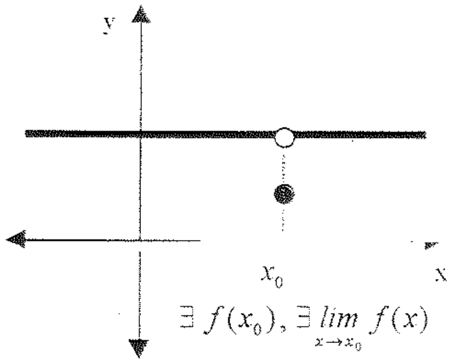

$x_0 \notin Dom\, f$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$




$x_0 \in Dom\, f$

$\therefore \exists f(x_0)$ pero $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

ya que los límites laterales son distintos




$\exists f(x_0)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

pero $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

**EJEMPLOS:**

1.- Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}, & si\ x \neq 1 \\ 2, & si\ x = 1 \end{cases}$ ¿Es continua en $x = 1$?

**Solución:**

a) $f(1) = 2$, está definida

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 5$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

$\therefore f$ no es continua en $x = 1$.

2.- $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ¿Dónde $f$ es continua?

**Solución:**

a) Si $x = 0$, $f$ es discontinua ya que $0 \notin Dom\, f$.

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x > 0 \\ -1, & si\ x < 0 \end{cases}$

$$\therefore f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}, \text{ es continua } \forall x\in \mathrm{IR}$$

2.- Sea $f(x)=\begin{cases}0, & si \quad x\le 0\\ 1, & si \quad x>0\end{cases}$ $y$ $g(x)=\begin{cases}1, & si \quad x\le 0\\ 0, & si \quad x>0\end{cases}$

Analizar la continuidad de $f\bullet g,\ f+g,\ c\bullet f$ $y$ $\dfrac{f}{g}$ en $x=0$

**Solución:**

$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)\nexists$ $\therefore f$ es discontinua en $x=0$

Como $f$ no es continua en $x=0$, entonces $f\bullet g,\ f+g,\ c\bullet f$ $y$ $\dfrac{f}{g}$

no son continuas en $x=0$.

3.- Sea $f(x)=\begin{cases}|x-3|, & si\ x\ne 3\\ 2, & si\ x=3\end{cases}$ ¿Es $f$ continua en $x=3$?

**Solución:**

i) $f(3)=2$

ii) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}|x-3|$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x-3, & si\ x>3\\ 2, & si\ x=3\\ 3-x, & si\ x<3\end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3^-}(3-x)=0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$

iii) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\ne f(3)$

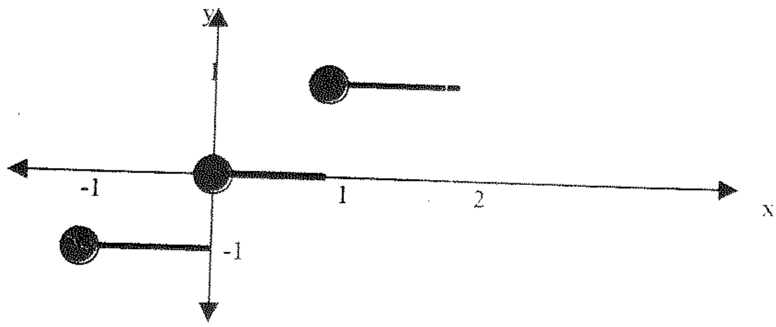
$\therefore f$ es discontinua en $x=3$ .

4.- Las funciones $f(x)=x^2$, $p(x)=a_0+a_1x+....+a_nx^n$, $f(x)=\text{sen } x$, $f(x)=\cos x$, etc. son continuas en IR.

5.-La función $f(x)=\text{tg}x$ es continua en $\text{IR}-\left\{x=(2k-1)\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}$

**OBSERVACION:** Gráficamente una función continua en un conjunto es una representación "sin saltos".

Por ejemplo: La función $f(x)=[x]$ no es continua en $Z$.




**DEFINICIONES:**

1) Se dice que $f$ es una función continua por la derecha de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

2) Se dice que $f$ es una función continua por la izquierda de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

3) Se dice que $f$ es una función continua en $(a,b) \Leftrightarrow f$ es continua $\forall\ x_0\in(a,b)$

4) Se dice que $f$ es una función continua en $[a,b] \Leftrightarrow f$ es continua en $(a,b)$ y es continua por la derecha de $a$ y por la izquierda de $b$.

Es decir : i) $f$ es continua en $(a,b)$

ii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) \;\wedge\; \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ .

5) Se dice que $f$ es una función continua en $(a,b] \Leftrightarrow f$ es continua en $(a,b)$ y continua por la izquierda de $b$ .

6) Se dice que $f$ es una función continua en $[a,b) \Leftrightarrow f$ es continua en $(a,b)$ y continua por la derecha de $a$ .

**OBSERVACION:**

Se dice que $f$ es continua en $x = x_0$, si $f$ es continua por la derecha de $x_0$ y por la izquierda de $x_0$.

**EJEMPLOS:**

1) Analizar si $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0,2]$

**Solución:**

$\forall\, x_0 \in (0,2)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0) \;\wedge$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x} = \sqrt{2} = f(2)$. Luego $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0,2]$

2) Analizar si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x+1}, & si \quad -\dfrac{1}{2} < x \le 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}, & si \quad 0 < x < 2 \\ 5x+1, & si \quad 2 \le x < 5 \end{cases}$ ,

es continua en $\left(-\dfrac{1}{2}, 5\right)$

**Solución:**

Sea $f_1(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$, continua $\forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Sea $f_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$, continua $\forall x \in (0,2)$

Sea $f_3(x) = 5x+1$, continua $\forall x \in (2,5)$

Se analizará la continuidad en $x=0$ $y$ $x=2$

a) Para $x=0$

i) $f(0)=3$

ii) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+3}{x+1} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,3x}{x} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

De i) y ii) $f$ es continua en $x=0$

b) Para $x=2$

i) $f(2)=11$

ii) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\text{sen}\,3x}{x} = \dfrac{\text{sen}\,6}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (5x+1) = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) \nexists$

De i) y ii) $f$ es discontinua en $x=2$

$\therefore$ de a) y b) $f$ es continua $\forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 5\right) - \{2\}$

y por lo tanto $f$ no es continua en $\left(-\dfrac{1}{2}, 5\right)$

**TEOREMA:** Si $f$ es continua en $x_0$ $y$ $g$ es continua en $f(x_0) \Rightarrow g \;o\; f$ es continua en $x_0$.

**Demostración:**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \wedge \lim\limits_{z\to f(x_0)} g(z) = g(f(x_0))$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} (g o f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) = (g \;o\; f)(x_0)$

**EJEMPLO:**

Sea $h(x)=\sqrt{3x^2+4}$ , donde $h(x)=(f\ o\ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{3x^2+4}$

donde $g(x)=3x^2+4$ ; $f(x)=\sqrt{x}$

$$\left.\begin{array}{ll} g \text{ es continua} & \forall x\in IR \\ f \text{ es continua} & \forall\ x\geq 0 \end{array}\right\} \therefore f\ o\ g \text{ es continua } \forall\ x\geq 0$$

**OBSERVACION:**

Si $g\ o\ f$ es continua en $x_0$ entonces :

$$\lim_{x\to x_0}(g\, o\, f)(x)=\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)=g(f(x_0))$$

**EJEMPLO:**

Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2+2x}$

Entonces $(f\ o\ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2+2x}\right)=\sqrt{\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2+2x}}$

$$\lim_{x\to 0}(f\ o\ g)(x)=\lim_{x\to 0} f(g(x))=\ f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+2x}}$$

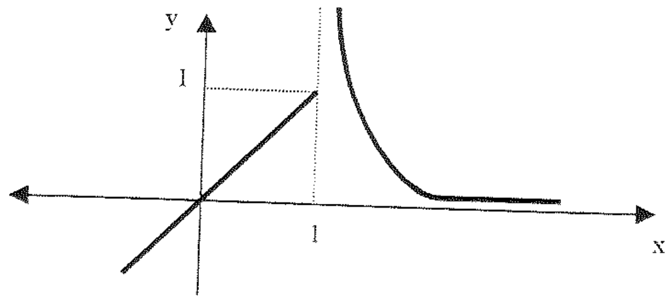
$$=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3x+2)}{x(x+2)}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x+2}{x+2}}=\sqrt{1}=1$$

## CLASIFICACIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES

1.- Si $x_0$ es punto de acumulación del Dominio $f$ y al menos uno de los límites laterales $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ó $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ es $+\infty$ ó $-\infty$, entonces $f$ tiene en $x_0$ una discontinuidad de salto infinito.

**EJEMPLO:**

Sea $f(x)=\begin{cases} x, & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si\ x>1 \end{cases}$ cuya representación gráfica es:




$\therefore$ en $x=1$ hay una discontinuidad de salto infinito ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ .

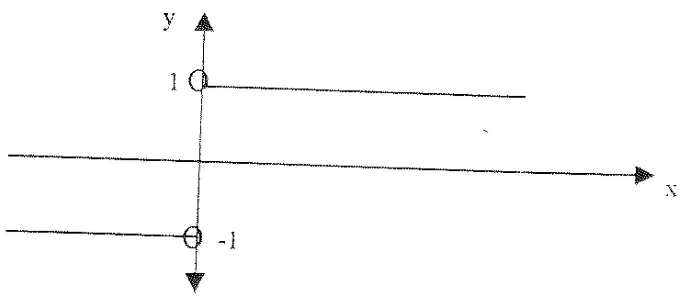
2.- Si $x_0$ es un punto de acumulación del dominio $f$ y existen.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L_1 \ \wedge\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L_2$ , pero $L_1\neq L_2$

$\Rightarrow f$ tiene en $x_0$ un punto de discontinuidad de salto finito; la magnitud del salto es $|L_1-L_2|$.

**EJEMPLO:**

Sea $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$, cuya representación gráfica es:



$Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\},\ \therefore x_0 = 0$ es un punto de acumulación.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \ \wedge \ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

$\therefore f(x)$ es discontinua en $x = 0$ y es discontinua de salto finito; la magnitud del salto es 2.

3.- Si $x_0$ es un punto de acumulación del dominio de $f$ y existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \Rightarrow f$ tiene en $x_0$ una discontinuidad reparable.

Las discontinuidades correspondientes a los casos 1) y 2) se llaman **irreparables.**

**EJEMPLO:**

Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

$Dom\, f = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$.

a) Esta función es discontinua en $x = 1$. $f(1)$ no está definida.

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \bullet \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = 2$.

Así $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, $\therefore$ es una discontinuidad reparable.

c) Como $f(1)$ no está definida, se le asigna el valor del límite.

Luego $f$ es continua en $x = 1$, redefiniéndola de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & si\ x \neq 1 \\ 2, & si\ x = 1 \end{cases}$$

**CONCLUSION:**

Una función $f$ tiene una discontinuidad:

a) Reparable, solamente si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\ \exists$.

En este caso se repara definiendo una nueva función.

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & si \;\; x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & si \;\; x=x_0 \end{cases}.$$

Es evidente que esta función es continua, ya que se ha reparado el salto que dio la función asignándole a su imagen el valor límite.

Luego $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=F(x_0)$

$\therefore F$ es continua en $x_0$ .

b) Irreparable si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \nexists$ .

**EJEMPLOS:**

1) Analizar si $f$ es continua en $x=0$. En caso de no serlo, clasificar la discontinuidad y redefinir, si es posible.

a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ .

**Solución:**

i) $f(0)$ no está definida

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\therefore f$ tiene en $x=0$ una discontinuidad reparable.

Para ello se redefine $f$ como:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & si\, x\neq 0 \\ 1, & si\; x=0 \end{cases}$$

b) $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{sen} x, & si\;\; x\neq 0 \\ 1, & si\;\; x=0 \end{cases}$ .

**Solución:**

i) $f(0)=1$

ii) $\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\,x = 0 \neq 1$, $\therefore f$ tiene que $x=0$ una discontinuidad reparable, redefiniendo :

$$f(x)=\begin{cases} x\,\text{sen}\,x, & si\ x\neq 0 \\ 0, & si\ x=0 \end{cases}$$

c) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ .

**Solución:**

i) $f(0)$ no está definida .

ii) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}+\frac{(e^{-x}-1)}{-x}\right]=1+1=2\ .$$

$\therefore f$ tiene en $x=0$ una discontinuación reparable. Luego definiendo una nueva función, se tiene:

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}, & si\ x\neq 0 \\ 2, & si\ x=0 \end{cases}$$

d) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{|x|}$ .

**Solución:**

i) $f(0)$ no está definida .

ii) $$f(x)=\frac{\text{sen}\,x}{|x|}=\begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,x}{x}, & si\ x>0 \\ -\dfrac{\text{sen}\,x}{x}, & si\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 0} f(x) \nexists$$ y la discontinuidad es irreparable.

2) Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & si\ x\neq 3 \\ M, & si\ x=3 \end{cases}$

Determinar el valor $M$ de modo que $f$ sea continua en $x=3$.

**Solución:**

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & si \ \ x > 3 \\ -1, & si \ x < 3 \\ M, & si \ x = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -1 \quad , \quad \therefore \lim_{x\to 3} f(x) \nexists .$$

Como $f(x)$ es discontinua irreparable en $x = 3$, no existe $M \in \mathrm{IR}$ que haga $f$ continua.

3) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, & si \ x \neq 4 \\ M, & si \ x = 4 \end{cases}$

Determinar el valor de $M$ de modo que $f$ sea continua en $x = 4$.

**Solución:**

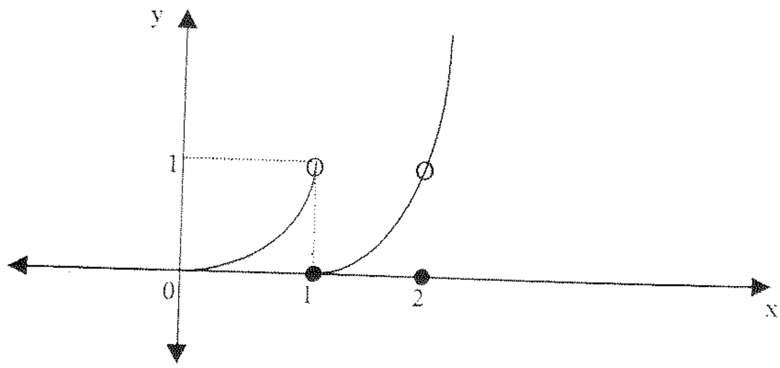
$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \bullet \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ si $M = \dfrac{1}{4}$, $f$ es continua en $x = 4$.

4) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & si \ 0 \leq x < 1 \\ 0, & si \ x = 2 \\ (x-1)^2, & si \ x > 2 \end{cases}$ periódica en $[0,2]$ con período igual a 1.

Identificar los puntos de discontinuidad, graficar y reparar $f$ donde sea posible.

**Solución:**



Puntos de discontinuidad : $x = 1,\ x = 2$

a) $f(1) = 0$ está definida y $\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = & \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = & \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) \nexists$

$\therefore f$ es discontinua irreparable en $x = 1$

b) $f(2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^2 = 1$, $\therefore$ en $x = 2$ hay una discontinuidad reparable, redefiniendo:

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ 0 \le x < 1 \\ (x-1)^2, & si\ x \ge 2 \end{cases}$$

## PROPIEDADES LOCALES DE UNA FUNCION CONTINUA

Las propiedades locales de una función continua en $x_0$ son :

1) La función $f$ mantiene el mismo signo de $f(x_0)$ en las proximidades de $x_0$ , es decir:

   a) $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, r > 0$ tal que $f(x) > 0,\ \forall\, x \in (x_0 - r,\ x_0 + r)$

   b) $f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\, r > 0$ tal que $f(x) < 0,\ \forall\, x \in (x_0 - r,\ x_0 + r)$

2) La función es acotada en las proximidades de $x_0$, es decir:

   $\exists\, M > 0$ tal que $|f(x)| \le M,\ \forall x \in (x_0 - r,\ x_0 + r),\ \forall\, r > 0$

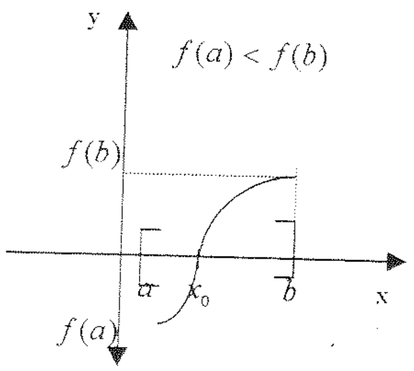
# PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

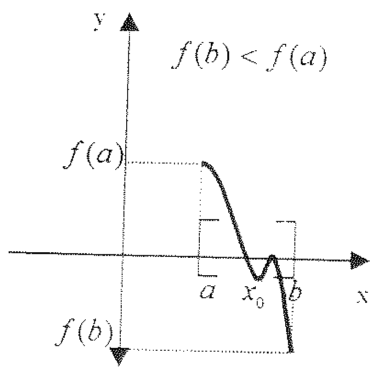
Se refieren a propiedades que poseen las funciones que son continuas en intervalos cerrados.

## 1.- TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO:

Si $f$ es una función continua en $[a,b]$ y $f(a) \bullet f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$ .

Gráficamente se tiene:




**OBSERVACION:**

El teorema afirma que en tales condiciones $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$, siendo $x_0$ una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ .

**EJEMPLOS:**

1.- Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$, $f(x)$ es continua $\forall x \in$ IR, en particular lo será para $[-1,0]$.

$f(-1) = -1$ , $f(0) = 1 \Rightarrow f(-1) \bullet f(0) < 0$

$\therefore f$ posee una raíz real entre $-1$ y $0$. Es decir $\exists\, x_0 \in (-1,0)\ /\ f(x_0) = 0$.

Aminorando el intervalo $[-1,0]$ a $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$,

se tiene: $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\therefore f(-1)\bullet f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0, \Rightarrow \exists x_0 \in \left(-1, \frac{-1}{2}\right) / f(x_0) = 0$,

es decir $f$ posee una raíz real en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

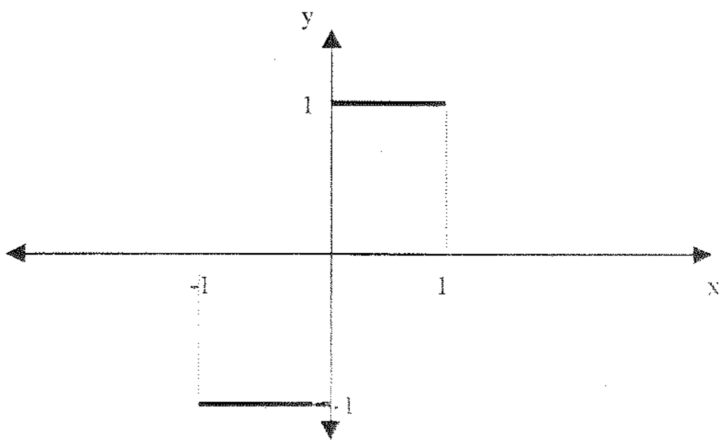
2.- Sea $f(x) = \begin{cases} 1, \ si & 0 \le x \le 1 \\ -1, \ si & -1 \le x < 0 \end{cases}$

$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$

$\therefore f(1) \bullet f(-1) < 0$.

Sin embargo no hay punto en $(-1, 1)$ tal que $f(x) = 0$, ya que $f(x)$ no es continua en $[-1, 1]$.

Gráficamente se tiene:




2) **TEOREMA DE WEIERSTRASS:**

Sea $f$ una función continua en $[a,b]$, entonces $f$ alcanza un máximo valor y un mínimo valor en este intervalo.

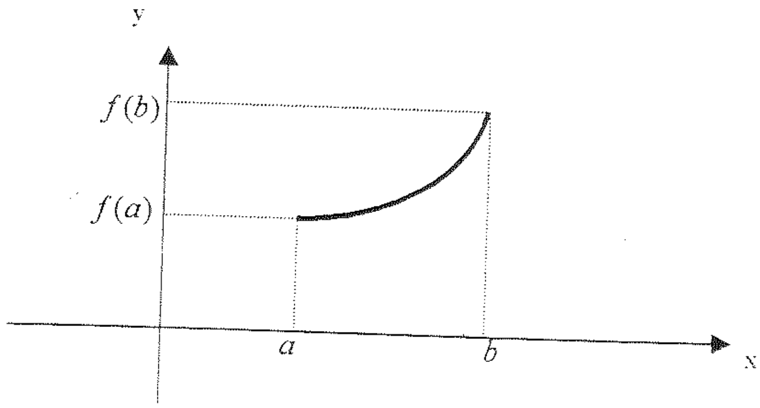
Es decir , $\exists\, x_0$ , $x_1 \in [a,b]$ tal que:

a) $f(x_0) \leq f(x), \ \forall\, x \in [a,b]$ , luego $f(x_0)$ es el valor mínimo de $f$.

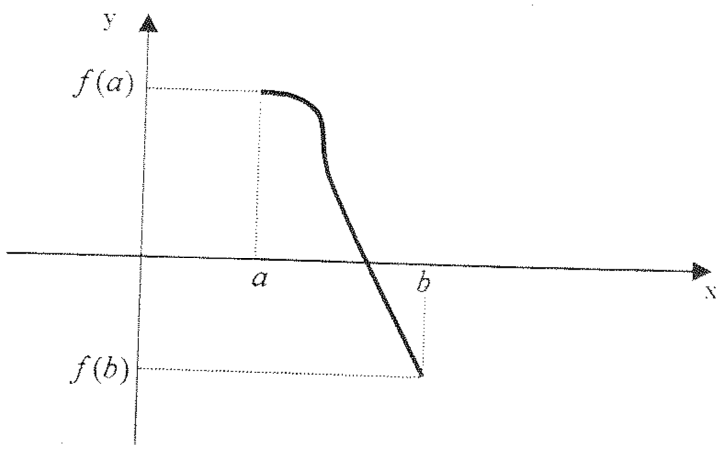
b) $f(x_1) \geq f(x), \ \forall\, x \in [a,b]$ , luego $f(x_1)$ es el valor máximo de $f$.

**EJEMPLOS:**

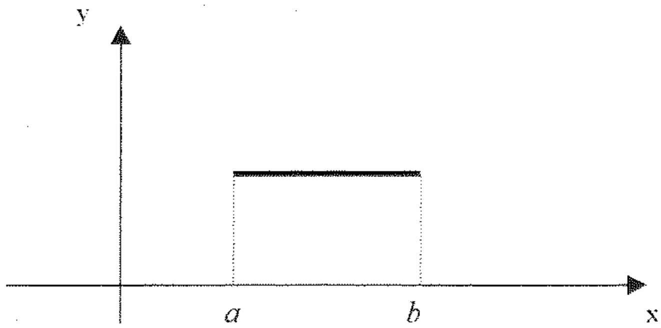
1) Si $f$ es continua en $[a,b]$ y creciente en $[a,b] \Rightarrow$ sus valores máximos y mínimos son $f(b)$ y $f(a)$, respectivamente.




2) Si $f$ es continua en $[a,b]$ y decreciente en $[a,b] \Rightarrow$ sus valores máximos y mínimos son $f(a)$ y $f(b)$, respectivamente.

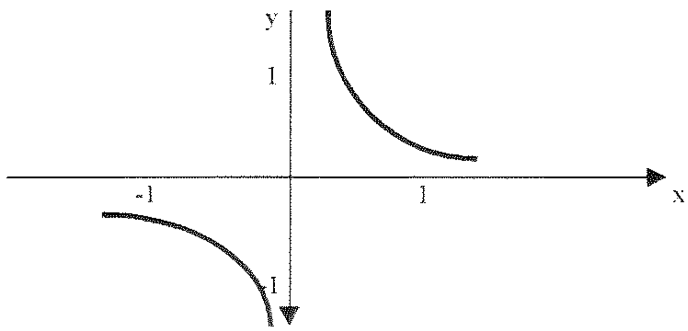


3) Si $f$ es una función constante en $[a,b] \Rightarrow$ cualquier valor $x \in [a,b]$ es un punto máximo y/o mínimo para $f$ en $[a,b]$.




4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[-1,1]$.

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $f$ no alcanza un máximo ni mínimo en $[-1,1]$.




**EJERCICIOS:**

1.- Analizar si $f(x) = [x]$ es continua en $x = 3$.

2.- Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt[5]{x}} - 2}{x - 32}$, $x \neq 32$. Definir $f(32)$ de tal manera que $f$ sea continua en $IR_0^+$. (Resp.: $f(32) = \dfrac{1}{320}$).

3.- Determinar $a$ y $b$ para que $f$ sea continua en $x=0$ y en $x=\pi$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}, & si \quad x\in(-\pi,0)\\ ax+b, & si \quad x\in[0,\pi)\\ \cos x, & si \quad x\in[\pi,2\pi)\end{cases}$$

( Resp. $a=0, b=-1$).

4.- Determinar $a$ y $b$ para que $f$ sea continua en $x=2$, siendo :

$$f(x)=\begin{cases} b\,[3x+4], & si \quad x\in[1,2)\\ 3x\sqrt{a-2x}, & si \quad x\in(2,3)\\ 18, & si \quad x=2\end{cases}$$

(Resp.: $a=13$, $b=2$).

5.- Analizar la continuidad de $f\circ g$ y $g\circ f$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} 2, & si \quad x>0\\ 0, & si \quad x=0\\ -2, & si \quad x<0\end{cases} \quad y \quad g(x)=x(4-x^2)$$

6.- Sea $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$. Analizar si $f$ es continua en $x=8$. En caso negativo determinar el tipo de discontinuidad y redefinir la función, si corresponde.

7.- Analizar la existencia de una solución real de la ecuación $3x^3-4x^2+13x+2=0$ en $[-1,0]$.

8.- Suponer que $f$ es continua en $[0,4]$, $f(0)=1$ y $f(4)=-1$ ¿Puede tener $f$ un número infinito de ceros en este intervalo?.

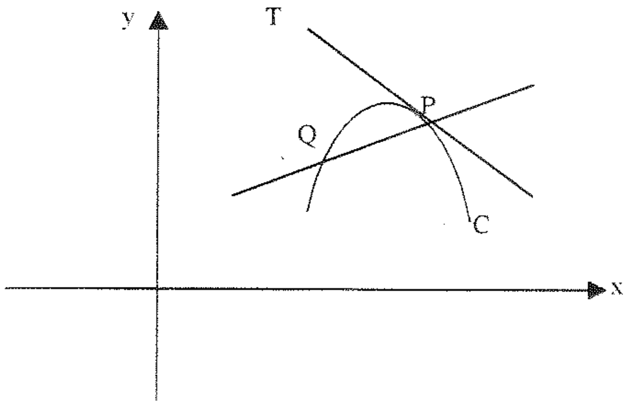
9.- Analizar porqué $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}+\dfrac{x^4+1}{x-3}$ tiene por lo menos una raíz entre $-2$ y 3.

# CAPITULO III

## LA DERIVADA

**INTRODUCCIÓN:**

**Problema de la tangente:**

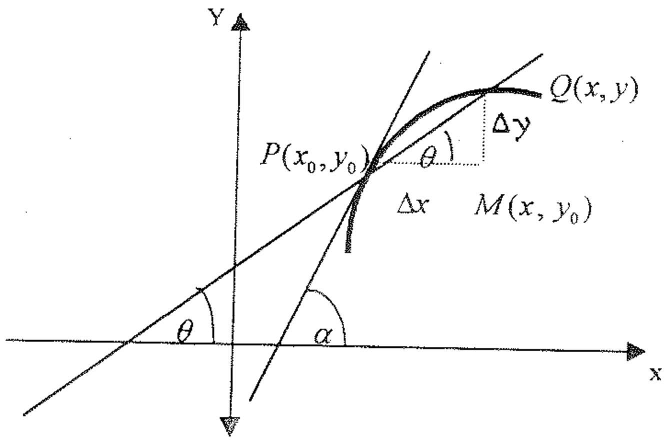



Sea $C$ una curva continua y $\overleftrightarrow{PQ}$ una secante de ella. Si a lo largo de la curva se hace que $Q$ se aproxime a $P$, la secante girará alrededor de $P$ hasta llegar a la posición límite $PT$. Luego la recta $\overleftrightarrow{PT}$ es el límite de la secante $\overleftrightarrow{PQ}$ cuando $Q$ se acerca a $P$.

**DEFINICIÓN:** Sea $\overleftrightarrow{PQ}$ una secante que pasa por los puntos $P$ y $Q$ de una curva continua $C$. El límite de la secante, cuando $Q$ se aproxima a $P$, a lo largo de la curva, se llama tangente a la curva $C$ en $P$.

Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva, siendo $f$ continua.
Sean $P(x_0, y_0)$ un punto de tangencia de $f$, $Q(x, y)$ otro punto cualquiera de la curva y $\theta$ el ángulo que forma $\overleftrightarrow{PQ}$ con el eje $X$.

Gráficamente se tiene:




$\therefore \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, siendo $\Delta x$ y $\Delta y$ el incremento de $x$ e $y$, respectivamente.

Cuando $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la curva, la inclinación $\theta$ de la secante se aproxima a la inclinación $\alpha$ de la tangente, es decir: $\lim\limits_{Q \to P} \theta = \alpha$.

Además la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente, o sea: $\lim\limits_{Q \to P} \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha$.

También cuando $Q$ se aproxima a $P$, $x$ se aproxima a $x_0$. Luego: $\lim\limits_{Q \to P} \operatorname{tg}\theta = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \operatorname{tg}\alpha$ que es la pendiente de la tangente a la curva en el punto $P(x_0, y_0)$ y se simboliza por : $\boxed{m(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

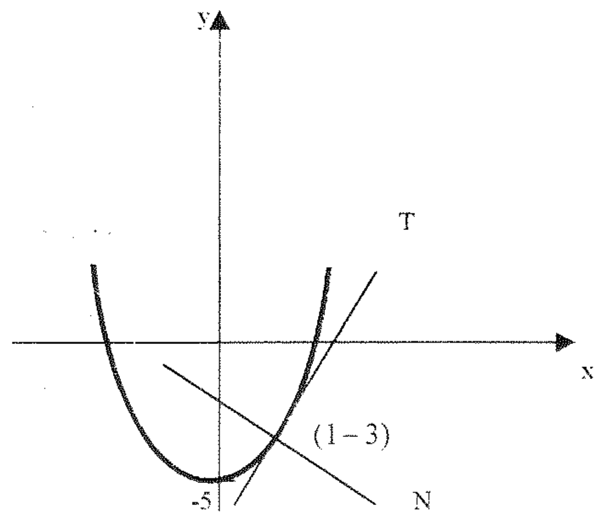
siendo $y - y_0 = m(x_0)(x - x_0)$ la ecuación de la tangente a $f$ en $P(x_0, y_0)$.

La normal a una curva en un punto dado es una recta perpendicular a la tangente en ese punto. Luego se cumple que: $m_T = -\dfrac{1}{m_N}$.

**EJEMPLOS:**

1) Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = 2x^2 - 5$ en el punto $(1,-3)$.

**Solución:**

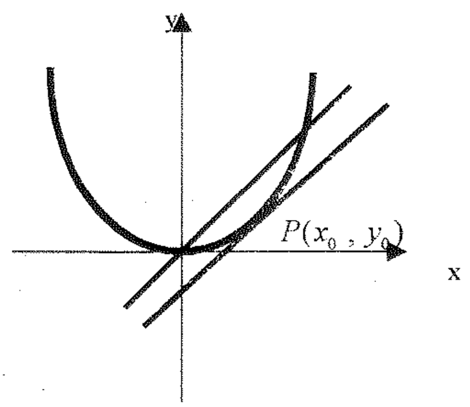



$$m(1) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5 + 3}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x - 1}$$
$$m(1) = 4$$

$\therefore$ La ecuación de la tangente : $y + 3 = 4(x - 1) \Rightarrow 4x - y - 7 = 0$

La ecuación normal : $y + 3 = -\frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow x + 4y + 11 = 0$

2) Hallar la ecuación de la tangente a $y = x^2$ y que es paralela a la recta $y = 4x$




$$m(x_0) = 4 = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$
$$4 = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$$
$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4$$
$$\therefore\ P(2,4)$$

$\therefore$ La ecuación de la tangente es : $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow 4x - y - 4 = 0$

3) ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 + 2x - 1$ tiene la normal una pendiente igual a $-\frac{1}{5}$?.

**Solución:** $m_N = -\frac{1}{5} \Rightarrow m_T = 5$

$$\therefore 5 = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 + 2x - 1 - x_0^3 - 2x_0 + 1}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3 + 2(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 + 2)}{x - x_0} = 3x_0^2 + 2$$

$$\therefore 3x_0^2 + 2 = 5 \Rightarrow x_0 = \pm 1$$

$\therefore$ La normal tiene pendiente $-\frac{1}{5}$ en los puntos $(1,2)$ y $(-1, -4)$.

4) Hallar la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = \text{sen}\, x$ en $(0,0)$.

**Solución:**

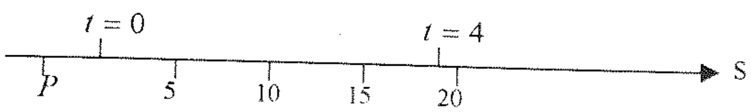
$$m(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

$\therefore$ La ecuación de la tangente es : $y = x$.

## PROBLEMA DE LA VELOCIDAD INSTANTANEA

Si una partícula se mueve a lo largo de una recta de tal manera que su distancia a un punto fijo $P$ está dada por : $s(t) = t^2 + 2$

Cuando $t = 0$, la partícula está a 2 pies de $P$ y cuando $t = 4$, la partícula está a 18 pies de $P$.



$\therefore$ la velocidad media para estos 4 segundos es:

$$V_{med} = \frac{18-2}{4-0} = \frac{16}{4} = 4 \quad pies/seg.$$

En general la velocidad media para el movimiento visto desde $t = 4$ hasta cualquier otro tiempo es:

$$V_{med} = \frac{s(t)-s(4)}{t-4} = \frac{s(t)-18}{t-4}$$

Si se desea conocer la velocidad en un instante $t$, se utiliza la siguiente definición: "Si una partícula se mueve sobre una recta de tal manera que su distancia $s$ a un punto fijo de la recta es $s = s(t)$, la velocidad en cualquier instante $t_1$ es: $v(t_1) = \lim\limits_{t \to t_1} \frac{s(t)-s(t)}{t-t_1}$"

Luego en el problema anterior:

$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{s(t)-s(4)}{t-4} = \lim_{t \to 4} \frac{t^2+2-18}{t-4} = \lim_{t \to 4} \frac{t^2-16}{t-4} = 8$$

$\therefore$ la velocidad instantánea en $t = 4$ es de 8 pies por segundo.

**EJEMPLOS:**

1. Una partícula se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación $s = \sqrt{2t}$. Hallar la velocidad en $t = 8$ segundos.

   **Solución:**

$$v(8) = \lim_{t \to 8} \frac{\sqrt{2t}-4}{t-8} \bullet \frac{\sqrt{2t}+4}{\sqrt{2t}+4} = \lim_{t \to 8} \frac{2t-16}{(t-8)(\sqrt{2t}+4)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \; pies/seg.$$

2. Una partícula $P$ se mueve en línea recta según la ecuación $s = 15t - 3t^2$. Hallar la distancia de $P$ al punto de partida cuando la velocidad es nula.

**Solución:**

$$v(t_0)=0=\lim_{t\to t_0}\frac{15t-3t^2-15t_0+3t_0^2}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{15(t-t_0)-3(t-t_0)(t+t_0)}{t-t_0}=15-6t_0$$

$$\therefore 15-6t_0=0\Rightarrow t_0=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\qquad \therefore s=15\left(\frac{5}{2}\right)-3\left(\frac{25}{4}\right)=18\frac{3}{4}\ pies$$

3. Se arroja una pelota hacia arriba hasta una altura que se puede expresar en metros, por $s(t)=125t-16t^2$, $t$ en segundos es el tiempo desde que ha sido lanzada. Hallar la velocidad instantánea después de 3 segundos y después de 5 segundos.

**Solución:**

a) $$v(3)=\lim_{t\to 3}\frac{125t-16t^2-375+144}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{125t-16t^2-231}{t-3}=$$

$$=-\lim_{t\to 3}\frac{(16t-77)(t-3)}{t-3}=29$$

$\therefore v(3)=29\ m/seg.$ (significa que la pelota se eleva)

b) $$v(5)=\lim_{t\to 5}\frac{125t-16t^2-625+400}{t-5}=-\lim_{t\to 5}\frac{-125t+16t^2+225}{t-5}=$$

$=-\lim_{t\to 5}\frac{(16t-45)(t-5)}{t-5}=-35$ , luego $v(5)=-35m/seg.$ (significa que la pelota está cayendo).

## LA DERIVADA

Al comparar la definición de pendiente de una tangente a una curva con la de velocidad instantánea de una partícula, se observa que formalmente son las mismas.

**DEFINICIÓN:** "Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, se llama derivada de $f$ en $x_0$ y se simboliza por $f'(x_0)$".

Otra forma: Sea $x - x_0 = h$. Si $x \to x_0 \Rightarrow h \to 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Otros símbolos : $D_x f(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\ f(x)}{dx} = f'(x) = y'$.

**EJEMPLOS:**

1. Determinar $f'(2)$ para $f(x) = c$.

   **Solución:**

   $$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

2. Determinar $f'(-1)$ para $f(x) = 3x^2 - 1$.

   **Solución:**

   $$f'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(-1+\Delta x)^2 - 1 - 2}{\Delta x}$$

   $$= 3 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 1}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 2)}{\Delta x} = -6.$$

3. Determinar $f'(3)$ para $f(x) = e^{x^2}$.

   **Solución:**

   $$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{e^{x^2} - e^9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{e^9\left(e^{x^2-9} - 1\right)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{e^9(e^{x^2-9}-1)(x+3)}{x^2-9} = 6e^9.$$

## FUNCIONES DERIVABLES

Se dice que $f$ es derivable en $x = x_0$, si $f'(x_0)$ existe , es decir, si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, existe.

Si $f$ es derivable en todo punto de un intervalo abierto, se dice que $f$ es derivable en dicho intervalo.

Si $f$ es derivable en su dominio, se dice que $f$ es derivable y su derivada se denota por $f'(x)$, siendo $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, que es una nueva función . Esta nueva función permite calcular la derivada de $f$ en cualquier punto de ella.

**EJEMPLOS:**

1. Sea $f(x) = 6x^3 + 4$. Determinar $f'(x)$, y a partir de ella, obtener el valor de $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(\sqrt{2})$.

   **Solución:**

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{6(x+h)^3 + 4 - 6x^3 - 4}{h} = 6 \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

   $$= 6 \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 18x^2$$

   $$\therefore f'(1) = 18 \bullet 1^2 = 18,\ f'(0) = 18 \bullet 0^2 = 0,\ f'\left(\sqrt{2}\right) = 18 \bullet \left(\sqrt{2}\right)^2 = 36.$$

2. Determinar $f'(x)$ si $f(x) = c$, $c \in \mathrm{IR}$.

   **Solución:**

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

3. Sea $f(x)=\dfrac{9}{3x^2-5}$ , determinar $f'(x)$.

**Solución:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{9}{3(x+h)^2-5}-\dfrac{9}{3x^2-5}}{h}\quad \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{27x^2-45-27x^2-54xh-27h^2+45}{[3(x+h)^2-5][3x^2-5]}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-54x+27h)}{h[3(x+h)^2-5][3x^2-5]}=\frac{-54x}{(3x^2-5)^2}.$$

4. Sea $f(x)=x^n$, $n\in\mathrm{IN}$, determinar $f'(x)$.

**Solución:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+....+h^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+.....+h^{n-1})}{h}=nx^{n-1}.$$

**OBSERVACIÓN:**

Sea $f(x)=x^n$, $n\in\mathrm{IR}$, entonces $f'(x)=nx^{n-1}$.

Si $n=1\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ .

Si $n=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(x)=x^{1/2}=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Si $n=-1\Rightarrow f(x)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ .

Si $n=\dfrac{2}{3}\Rightarrow f(x)=x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ .

**TEOREMA:** Si $y = f(x)$ es derivable en $x = x_0$, entonces $f$ es continua en dicho punto.

**Demostración:**

Es necesario probar que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a $f(x_0)$, o sea: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Para $x \neq 0$ se tiene que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \bullet (x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \bullet 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} (f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \ \textit{es continua en} \ x = x_0 \ .$$

El recíproco de este teorema no es válido, es decir, que una función sea continua en un punto, no implica necesariamente que ella sea derivable en dicho punto.

**DERIVADAS LATERALES:**

**DEFINICIÓN:**

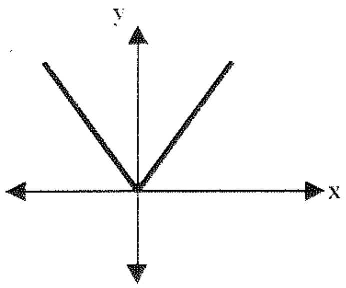
1. Sea $f$ una función real y $x_0 \in \mathrm{IR}$, se dice que $f$ es derivable por la derecha de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe y se denota por $f'_+(x_0)$.
2. Sea $f$ una función real y $x_0 \in \mathrm{IR}$ , se tiene que $f$ es derivable por la izquierda de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe y se denota por $f'_-(x_0)$.

**OBSERVACIÓN:** $f'(x_0)$ existe $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

**EJEMPLOS:**

1. Probar que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

**Solución:**




$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ y

$f(0) = 0$

$\therefore$ *f es continua en* $x = 0$

Para probar que no es derivable en $x = 0$, bastará probar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ no existe.

a) Cuando $x \to 0^+$, se tiene: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} = 1$

b) Cuando $x \to 0^-$, se tiene: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x - 0}{x - 0} = -1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ no existe.

$\therefore f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, a pesar de ser continua en $x = 0$.

2. Sea $f(x) = \begin{cases} -3x^2, & si \ x \leq 2 \ ; \quad f_1 \\ ax + b, & si \ x > 2 \ ; \quad f_2 \end{cases}$

Determinar los valores de $a$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $f$ sea derivable en $x = 2$.

**Solución:**

Para que sea derivable en 2 es necesario que $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ exista.
Como $f$ está definida por tramos se tiene:

a) $\lim_{x\to 2^-}\frac{-3x^2+12}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-3(x-2)(x+2)}{x-2}=-12$

b) $\lim_{x\to 2^+}\frac{ax+b+12}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{ax+b+12+2a-2a}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(x-2)+b+12+2a}{x-2}$

Para que el límite exista es necesario que $b+2a+12=0$. Luego $\lim_{x\to 2^+}\frac{a(x-2)}{x-2}=a$

$\therefore$ para que $f$ sea derivable en $x=2$ es necesario que $a=-12$. Para determinar $b\in\mathbb{R}$, se tiene que como $f$ es derivable en $x=2$, por teorema es continua en $x=2$. Luego:

$$f_1(2)=f_2(2)\Rightarrow -12=2a+b\Rightarrow -12=-24+b\Rightarrow b=12$$

3. Sea $f(x)=\begin{cases}3x^2-8x+8, & si\ x\geq 2\\ \sqrt{3x^2+4}, & si\ x<2\end{cases}$

Analizar si $f'(2)$ existe.

**Solución:**

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}\bullet\frac{\sqrt{3x^2+4}+4}{\sqrt{3x^2+4}+4}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(3x^2+4)-16}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3(x^2-4)}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$f_{+}^{'}(2)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{3x^{2}-8x+8-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{3x^{2}-8x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{(3x-2)(x-2)}{(x-2)}=4$$

$\therefore\ f_{-}^{'}(2)\neq f_{+}^{'}(2)\Rightarrow f$ no es derivable en $x=2$ .

4. Sea $f(x)=\begin{cases} f_1(x)=x-1, & si\ \ x\leq 2 \\ f_2(x)=x+1, & si\ \ x>2 \end{cases}$

   Analizar y determinar $f^{'}(x)$ en el dominio de $f$ .

   **Solución:**

   a) $f_1^{'}(x)=1,\ \forall\ x<2$

      $f_2^{'}(x)=1\ ,\ \forall\ x>2$

   b) En $x=2$

   $$f_{-}^{'}(2)=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{x-1-1}{x-2}=1$$

   $$f_{+}^{'}(2)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{x}{x-2}=+\infty$$

   $\therefore f^{'}(2)$ no existe.

   El problema podría haberse visualizado antes, comprobando que $f$ no es continua en $x=2$ y por lo tanto no es derivable en $x=2$

   $$\therefore\ f^{'}(x)=\begin{cases} 1\ , & si\ \ x<2 \\ 1, & si\ \ x>2 \end{cases}$$

## ALGEBRA DE DERIVADAS

1. **TEOREMA:** Si $f$ y $g$ son funciones reales y derivables, entonces $f+g$ es derivable y $(f+g)^{'}=f^{'}+g^{'}$, (análogamente para $f-g$).

   **Demostración:**

   Sea $F(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow F(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)$

   $$\therefore F^{'}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) = f'(x) + g'(x).$$

2. **TEOREMA:** Si $f$ y $g$ son funciones reales y derivables, entonces $f \bullet g$ es derivable y $(f \bullet g)' = f \bullet g' + g \bullet f'$.

**Demostración:**

Usando $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x}$

Sea $F(x) = f(x) \bullet g(x) \Rightarrow F(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) \bullet g(x+\Delta x)$

Además $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$

$\therefore\ F(x+\Delta x) = (f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g))$

$F(x+\Delta x) = f(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet \Delta g + g(x) \bullet \Delta f + \Delta f \bullet \Delta g$

Pero $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$

$\Delta F = f(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet \Delta g + g(x) \bullet \Delta f + \Delta f \bullet \Delta g - f(x) \bullet g(x)$

$\Delta F = f(x) \bullet \Delta g + g(x) \bullet \Delta f + \Delta f \bullet \Delta g$

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \bullet \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \bullet \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \bullet \Delta g}{\Delta x}$$

$F'(x) = f(x) \bullet g'(x) + g(x) \bullet f'(x)$

$\therefore (f \bullet g)' = f \bullet g' + g \bullet f'$.

**COROLARIO:** $(c \bullet f)' = c \bullet f'$.

**Demostración:**

Considerando la derivada de un producto se obtiene que:

$(c \bullet f)' = c \bullet f' + f \bullet c' = c \bullet f' + f \bullet 0 = c \bullet f'$.

3. **TEOREMA:** Si $f$ y $g$ son funciones reales y derivables, entonces $f/g$ también lo es y $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g \bullet f' - f \bullet g'}{g^2}$.

**Demostración:**

Sea $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F(x+\Delta x)=\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}$

Además $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$, $\Delta g = g(x+\Delta x)-g(x)$

$\therefore F(x+\Delta x)=\dfrac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g}$

$$\Delta F=\frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\bullet g(x)+\Delta f\bullet g(x)-f(x)\bullet g(x)-\Delta g\ f(x)}{g(x)[g(x)+\Delta g]}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x)\bullet\dfrac{\Delta f}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)\bullet\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x)[g(x)+\Delta g]}$$

$$F'(x)=\frac{g(x)\bullet f'(x)-f(x)\bullet g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\therefore \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{g\bullet f'-f\bullet g'}{g^2} .$$

**COROLARIO:** $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=\dfrac{-f'}{f^2}$ .

**Demostración:**

Considerando la derivada de un cuociente, se obtiene que:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{f\bullet 0-1\bullet f'}{f^2}=\frac{-f'}{f^2} .$$

**EJEMPLOS:**

1. Derivar:

   a) $f(x)=k\,x,\ k\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(x)=k\,x'=k$ .

   b) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{d\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)}{dx}=\dfrac{(x+1)'\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}\right)'(x+1)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ .

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3} \Rightarrow \dfrac{d\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)}{dx}=\dfrac{(x-1)'(x+3)-(x-1)(x+3)'}{(x+3)^2}=$

$=\dfrac{x+3-(x-1)}{(x+3)^2}=\dfrac{4}{(x+3)^2}$.

2. Si $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+h2$

Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f'(x)=0$.

**Solución:**

$f'(x)=x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1$.

3. Hallar el tiempo donde la velocidad es nula, para $s=\dfrac{t^2}{\sqrt{t}-1}$, $t>0$.

**Solución:**

$$\frac{ds}{dt}=v=\frac{\left(\sqrt{t}-1\right)\bullet 2t-t^2\bullet\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{\left(\sqrt{t}-1\right)^2}=\frac{3t^2-4t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-1\right)^2}=0$$

$$\Rightarrow t\left(3t-4\sqrt{t}\right)=0 \Rightarrow 3t-4\sqrt{t}=0 \Rightarrow 3t=4\sqrt{t}\quad /^2 \Rightarrow 9t^2=16t \Rightarrow t=\frac{16}{9}$$

4. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y=x^2+4x$ que pasan por el punto $(-1,-4)$

**Solución:**

$y=x^2+4x \Rightarrow y'=2x+4$

$y+4=m(x+1) \Rightarrow y+4=(2x+4)(x+1) \Rightarrow x^2+4x+4=2x^2+6x+4$

$\Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0,\ x=0 \Rightarrow y'=4 \Rightarrow$ ecuación tangente: $y=4x$

$x=-2 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow$ ecuación tangente: $y=-4$.

## DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

1. Sea $f(x)=a^x$, $a\in\mathbb{R}^+$ , $a\neq 1 \Rightarrow f'(x)=a^x \ln a$.

**Demostración:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a$$

2. Sea $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$.

**Demostración:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x.$$

3. Sea $f(x)=\log_a x \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$.

**Demostración:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\frac{h}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x}\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

4. Sea $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$.

**(Demostrar)**

5. Sea $f(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x)=\cos x$.

**Demostración:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\cos h+\cos x\operatorname{sen}h-\operatorname{sen}x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos h-1)+\cos x\operatorname{sen}h}{h}=\operatorname{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}$$

$$=\operatorname{sen}x\bullet 0+\cos x\bullet 1=\cos x\ .$$

6.Sea $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen}x$ .

**Demostración:**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}h-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}h}{h}=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\operatorname{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}$$

$$=\cos x\bullet 0-\operatorname{sen}x\bullet 1=-\operatorname{sen}x\ .$$

7. Sea $f(x)=\operatorname{tg}x \Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$ .

**Demostración:**

Como $f(x)=\operatorname{tg}x=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ por algebra de derivadas

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(\operatorname{sen})'\cos x-\operatorname{sen}x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\ .$$

8. Sea $f(x)=c\operatorname{tg}x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{cos}ec^2 x$ .

(Demostrar)

9. Sea $f(x)=\sec x \Rightarrow f'(x)=\sec x\operatorname{tg}x$.

**Demostración:**

Como $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{\cos^2(x)}\bullet(\cos x)'$

$$\therefore f'(x)=\frac{-1}{\cos^2 x}\bullet-\operatorname{sen}x=\frac{1}{\cos x}\bullet\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\sec x\bullet\operatorname{tg}x\ .$$

10. Sea $f(x)=\operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{cosec} x \bullet c\operatorname{tg} x$.

**(Demostrar)**

**EJEMPLOS:**

1) $s(t)=\dfrac{e^t}{t} \Rightarrow s'(t)=\dfrac{t\bullet e^t-e^t\bullet 1}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$.

2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(\operatorname{tg} x)\,2x-(x^2-1)\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

3) $g(x)=2^x(3x^2-\ln x) \Rightarrow g'(x)=2^x\left(6x-\dfrac{1}{x}\right)+\left(3x^2-\ln x\right)2^x\ln 2.$

## DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS
## REGLA DE LA CADENA

Se determinará $(f\ o\ g)'$ conociendo $f'$ y $g'$, siempre que $f\ o\ g$ exista.

**TEOREMA:** Si $g(x)$ es derivable en $x_0$ y $f(x)$ es derivable en $g(x_0)$ entonces $f\ o\ g$ es derivable en $x_0$ y $(f\ o\ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)$.

**Demostración:**

La función $f\ o\ g\ \exists$, si $rec\ g \cap dom f \neq \phi$.

Además $g$ es derivable en $x_0 \in dom g$ y $f(x)$ es derivable en $g(x_0)\subset dom f$, o sea $g'(x_0)$ y $f'(g(x_0))$ existen, esto significa que $g(x)$ es continua en $x_0$, es decir : $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$ o bien $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h)=g(x_0)$.

Por definición de derivada de la función $(f\ o\ g)(x)=f(g(x))$ en el punto $x=x_0$, se tendrá:

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(f \circ g)(x_0+h)-(f \circ g)(x_0)}{h}$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$$

Sea $g(x_0+h)-g(x_0)=k$ entonces $g(x_0+h)=k+g(x_0)$

Si $h\to 0$; $k\to 0$

$$\therefore (f \circ g)' = \lim_{k\to 0}\frac{f(k+g(x_0))-f(g(x_0))}{k}\bullet\frac{k}{h}$$

$$(f \circ g)' = \lim_{k\to 0}\frac{f(k+g(x_0))-f(g(x_0))}{k}\bullet\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$(f \circ g)' = \lim_{k\to 0}\frac{f(k+g(x_0))-f(g(x_0))}{k}\bullet\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$(f \circ g)' = f'(g(x_0))\bullet g'(x_0)$$

Que es la expresión de la derivada de $f \circ g$, en términos de $f'$ y $g'$ (Regla de la Cadena).

Si $y=f(v)$; $v=g(x)\Rightarrow D_x y = D_v y\bullet D_x v$ ó $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dv}\bullet\dfrac{dv}{dx}$

En general si: $y=f(u)$, $u=g(s)$, $s=h(t)$ y $t=i(x)\Rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\bullet\dfrac{du}{ds}\bullet\dfrac{ds}{dt}\bullet\dfrac{dt}{dx}$ ó $D_x y = D_u y\bullet D_s u\bullet D_t s\bullet D_x t$ .

**TEOREMA:** Sea $u=f(x)$ una función derivable entonces:

$$D_x u^n = n u^{n-1} D_x u,\ n\in\mathbb{R}\ .$$

## TABLA DE DERIVADAS:

Sea $u = f(x)$, entonces si:

1) $y = u^n \Rightarrow y' = n\,u^{n-1} \cdot D_x u \;,\; n \in \mathbb{R}$

2) $y = \dfrac{1}{u} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot D_x u$

3) $y = a^u \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot D_x u$

4) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot D_x u$

5) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u} \cdot D_x u$

6) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot D_x u$

7) $y = \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = \cos u \cdot D_x u$

8) $y = \cos u \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} u \cdot D_x u$

9) $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot D_x u$

10) $y = \cot g\, u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot D_x u$

11) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot D_x u$

12) $y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \cot g\, u \cdot D_x u$

**EJEMPLOS:**

1) Derivar $y = \sqrt{x^2+1}$ .

**Solución:**

Sea $y = \sqrt{z}$ , $z = x^2+1 \Rightarrow$

$$y' = \frac{dy}{dz} \bullet \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \bullet 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} .$$

2) Hallar $\dfrac{dz}{dx}$ ; *si* $z = 3u^2 - 2u + 5$ ; $u = \sqrt{4 - y^2}$ ; $y = \dfrac{1}{x}$.

**Solución:**

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \bullet \frac{du}{dy} \bullet \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = (6u - 2) \bullet \frac{1}{2\sqrt{4 - y^2}} (-2y)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2} \bullet \frac{6u - 2}{\sqrt{4 - y^2}} = \frac{6\sqrt{4x^2 - 1} - 2x}{x^3\sqrt{4x^2 - 1}} .$$

3) Derivar $y = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$ .

**Solución:**

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}} \bullet \frac{1}{-2\sqrt{1 + x}} \bullet 1 = -\frac{1}{4\sqrt{1 + x}\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}} .$$

4) Derivar $y = xe^{-x}$.

**Solución:**

$$y' = e^{-x} + xe^{-x} \bullet -1 = e^{-x} - x\,e^{-x} .$$

5) Derivar $y = e^{c\operatorname{tg} x^3}$ .

**Solución:**

$$y' = e^{c\operatorname{tg} x^3} \bullet \left(-\operatorname{cosec}^2 x^3\right) \bullet 3x^2 .$$

6) Derivar $y = 5^{\sqrt{4+x^2}}$.

**Solución:**

$$y' = 5^{\sqrt{4+x^2}} \bullet \frac{2x}{2\sqrt{4 + x^2}} \bullet \ln 5 = \frac{5^{\sqrt{4+x^2}} \bullet x \bullet \ln 5}{\sqrt{4 + x^2}} .$$

7) Derivar $y = \ln \dfrac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - 1}$.

**Solución:**

$$y = \ln(e^{3x} + 1) - \ln(e^{3x} - 1)$$

$$y' = \frac{1}{e^{3x}+1} \bullet e^{3x} \bullet 3 - \frac{1}{e^{3x}-1} \bullet e^{3x} \bullet 3 = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} - \frac{3e^{3x}}{e^{3x}-1}$$

$$= \frac{3\,e^{3x}}{e^{6x}-1}(e^{3x}-1-e^{3x}-1) = \frac{-6e^{3x}}{e^{6x}-1} .$$

8) Derivar $y = e^{x \ln x}$.

**Solución:**

$$y' = e^{x\ln x} \bullet \left( \ln x + x\frac{1}{x} \right) = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (\ln x + 1)e^{\ln x^x} = x^x(\ln x + 1) .$$

9) Sea $g(x) = \ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$. Verificar que $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

**Solución:**

$$g'(x) = \frac{\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x}-1} - \frac{\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x}+1} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \bullet \left( \frac{\sqrt{1+e^x}+1-\sqrt{1+e^x}+1}{1+e^x-1} \right) =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} .$$

10) Sea $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y' = \frac{x^3 \bullet \dfrac{1}{x} - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1-3\ln x}{x^4} .$$

11) Sea $y = \sqrt{x}\log x^3$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x^3 + \sqrt{x} \bullet 3x^2 \bullet \frac{1}{x^3}\log e = \frac{3}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{3\sqrt{x}}{x}\log e =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{3}{\sqrt{x}}\log e = \frac{3}{2\sqrt{x}}(\log x + 2\log e) = \frac{3}{2\sqrt{x}}\log xe^2 .$$

12) Sea $y=\ln^3(x+3)$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y'=3\ln^2(x+3)\bullet\frac{1}{x+3}\bullet 1=\frac{3}{x+3}\ln^2(x+3).$$

13) Sea $y=\ln(\operatorname{tg}3x)$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y'=\frac{1}{\operatorname{tg}3x}\bullet\sec^2 3x\bullet 3=\frac{3\cos 3x}{\operatorname{sen}3x}\bullet\frac{1}{\cos^2 3x}=\frac{3}{\operatorname{sen}3x\cos 3x}.$$

14) Sea $y=\operatorname{sen}^3\sqrt{x^3+1}$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y'=3\operatorname{sen}^2\sqrt{x^3+1}\bullet\cos\sqrt{x^3+1}\bullet\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}.$$

**EJERCICIOS:**

1.- Determinar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ en $x_0=3$.

Resp.: $ec.\operatorname{tg}: y-4=-3(x-3)$

$ec.normal: y-4=\dfrac{1}{3}(x-3)$

2.-a) Determinar los puntos pertenecientes a la curva $y=x^4-4x^3-8x^2-12x+10$, tal que la recta tangente que pasa por ellos sea paralela a la recta $-12x+y-5=0$. Resp.: $(0,10),(-1,19),(4,-166)$

b) Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes correspondientes.

3.- Una piedra cae $16\,t^2$ pies en $t$ segundos ¿Cuál es su velocidad después de 2 segundos?. Resp.: 64 *pies/seg*.

4.- Una partícula se muere en línea recta, de tal manera que su distancia $s$ (en pies) al origen en el tiempo $t$ (en segundos) está dada por $s = t^3 - 4t^2 , t \geq 0$. ¿En qué instantes es su velocidad de 3 pies / seg.?.

Resp.: $\left(3 , \frac{1}{3}\left(4 \pm \sqrt{7}\right)\right)$

5.- Aplicando la definición de derivada, calcular:

a) $y'$ para $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ . Resp.: $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^{3/2}}$

b) $y'(-3)$ para $y = \ln(x^2+1)$ . Resp.: $-\dfrac{3}{5}$

6.- Calcular $y'$ para:

a) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$ . Resp.: $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$

b) $y = -\dfrac{\cos x}{2\,\text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\text{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)$. Resp.: $y' = \dfrac{1}{\text{sen}^3 x}$

c) $y = \text{sen}(x+a) \bullet \cos(x+a)$ . Resp.: $y' = \cos 2(x+a)$

d) $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{1+\cos x}$ . Resp.: $y' = \dfrac{1}{1+\cos x}$

e) $y = \begin{cases} -x^3 , & si\ x < -1 \\ \frac{1}{2}(3-x^2) , & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} , & si\ \ x > 1 \end{cases}$ . Resp. $y' = \begin{cases} -3x^2 , & s\ x < -1 \\ -x , & si\ -1 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} , & si\ x > 1 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} x^3 - x^2 + x , & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{2-x} , & si\ 1 < x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ . Resp.: $y' = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 , & si\ 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{(2-x)^2} , & si\ 1 < x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

7.- Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x+a} , & si\ x < 1 \\ x^3 + bx^2 - 5x + 3 , & si\ x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right] \end{cases}$

Si $f$ es derivable en $\left(-\infty\,,\,\dfrac{3}{2}\right]$, determinar $a$ y $b$.

Resp.: $a = b = -2$

8.- Determinar la ecuación de cada una de las rectas que pasan por $(3,-2)$, y que son tangentes a la curva $y = x^2 - 7$.

Resp.: $\begin{aligned} y-18 &= 10(x-5) \\ y+6 &= 2(x-1) \end{aligned}$

9.- Determinar la derivada de: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1\,, & si\ \ 0 \le x < 2 \\ 4x-2\,, & si\ x \ge 2 \end{cases}$.

Resp.: $f'(x) = \begin{cases} 2x\,, & si\ 0 < x < 2 \\ 4\,, & si\ x > 2 \end{cases}$

10.- Determinar $y'$ para:

a) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ .  Resp.: $\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

b) $y = a^{\operatorname{tg}(nx)}$ .  Resp.: $n\ a^{\operatorname{tg}(nx)} \bullet \sec^2(nx) \bullet \ln a$

c) $y = e^{\cos x} \bullet \operatorname{sen} x$ .  Resp.: $e^{\cos x}(\cos x - \operatorname{sen}^2 x)$

d) $y = a^{\ln x}$ .  Resp.: $\dfrac{a^{\ln x} \bullet \ln a}{x}$

## DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sea $f$ una función derivable en $A \subseteq$ IR. Esto significa que existe $f'(x)\,,\ \forall\ x \in A$. Luego la derivada de $f$ en $x \in A$ está dada por la expresión: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Como $x \in A$ esta expresión corresponde a la derivada de una función.

Como la derivada es a su vez una función, puede derivarse nuevamente, es decir la derivada de $f$ es $f'$, de $f'$ es $f''$, es decir,

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

En símbolos:

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = D_x^2 y = y'' = \text{etc.}$$

En general se tiene:

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = D_x^n\, y = \text{etc.}$$

**EJEMPLOS:**

1.- Si $f(x) = 2x \operatorname{sen} x + \cos x$, determinar $\dfrac{d^5 f}{d\,x^5}$.

**Solución:**

$f'(x) = 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 2x\cos x + \operatorname{sen} x$

$f''(x) = -2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + \cos x = -2x\operatorname{sen} x + 3\cos x$

$f'''(x) = -2x\cos x - 2\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen} x = -2x\cos x - 5\operatorname{sen} x$

$f^{iv}(x) = 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x - 5\cos x = 2x\operatorname{sen} x - 7\cos x$

$f^{v}(x) = 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x + 7\operatorname{sen} x = 2x\cos x + 9\operatorname{sen} x$

2.- Sea $y = 3x^3 + x^2 - 4x + 10$, determinar $\dfrac{d^4 f}{dx^4}$.

**Solución:**

$y' = 9x^2 + 2x - 4$

$y'' = 18x + 2$

$y''' = 18$

$y^{iv} = 0$

3.- Determinar una expresión para $f^{(n)}$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

**Solución:**

$$f(x) = (1+x)^{-1}$$

$$f'(x) = -1\,(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = 1 \bullet 2(1+x)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} = -1 \bullet 2 \bullet 3\,(1+x)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \quad n!(1+x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n\ n!}{(1+x)^{n+1}}$$

## DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Las funciones de la forma $y = f(x)$ a veces se dan mediante una relación entre $x$ e $y$, como por ejemplo $x^2 + y^2 = 25$, que resuelta para "$y$" da $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Ambas ecuaciones satisfacen la original, y se dice que la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ describe la función $y = f(x)$ implícitamente. En cambio las ecuaciones $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = -\sqrt{25 - x^2}$, describe la función explícitamente.

La ecuación $x^2 + y^2 = 25$ está escrita en la forma $F(x, y) = 0$ y se dice que $y$ es una función implícita de $x$.

**OBSERVACIONES:**

1) A veces no es fácil despejar $y$ en función de $x$, como por ejemplo: $x^2 y + 7y^5 + 3y - 1 = 0$.
2) Para derivar funciones implícitas de la forma $F(x,y) = 0$, se deriva aplicando las reglas ya vistas, teniendo presente que $y = f(x)$.

**EJEMPLOS:**

1) Sea $x^3 + x^2 y - 10y^4 = 0$, determinar $y'$.

**Solución:**

$$3x^2 + x^2 y' + 2xy - 40y^3 y' = 0 \Rightarrow y'(x^2 - 40y^3) = -3x^2 - 2xy \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 2xy}{40y^3 - x^2}$$

2) Sea $3x^2 - 2xy + y^2 = 0$, determinar $y''$.

**Solución:**

$3x^2 - 2xy + y^2 = 0$. Derivando se obtiene:

$$6x - 2xy' - 2y + 2yy' = 0 \quad / : 2$$

$$3x - xy' - y + yy' = 0$$

$$(*) \quad y'(y - x) = y - 3x \quad \Rightarrow y' = \frac{y - 3x}{y - x}$$

Derivando (*) se tiene:

$$y''(y - x) + y'(y' - 1) = y' - 3 \Rightarrow y''(y - x) + y'^2 - y' = y' - 3 \Rightarrow y'' = \frac{2y' - 3 - y'^2}{y - x}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2\dfrac{y - 3x}{y - x} - 3 - \left(\dfrac{y - 3x}{y - x}\right)^2}{y - x}$$

$$y'' = \frac{2(y - 3x)(y - x) - 3(y - x)^2 - (y - 3x)^2}{(y - x)^3}$$

3) Usando derivación implícita determinar la ecuación de la tangente y de la normal a las curvas en los puntos dados.

a) $x^2y^3 = 4$, en $(2,1)$

**Solución:**

$$x^2y^3 = 4 \Rightarrow 2xy^3 + x^2 3y^2 y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2} = -\frac{2y}{3x} \Rightarrow y'(2) = -\frac{1}{3} = m_T$$

Ecuación de la recta tangente: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2)$

Ecuación de la normal: $y - 1 = 3(x-2)$.

b) $x^3y^2 + y^3 = 2x^3$ en $(1.1)$

**Solución:**

$$x^3y^2 + y^3 = 2x^3 \Rightarrow 3x^2y^2 + x^3 2yy' + 3y^2y' = 6x^2 \Rightarrow y'(2x^3y + 3y^2) = 6x^2 - 3x^2y^2$$

$$y' = \frac{x^2(6-3y^2)}{y(2x^3+3y)} \Rightarrow y'(1) = \frac{3}{5} = m_T$$

Ecuación de la tangente: $y - 1 = \frac{3}{5}(x-1)$

Ecuación de la normal: $y - 1 = -\frac{5}{3}(x-1)$

4) Hallar $y''(2)$ si $y(2) = 1$ y $x^3 + x^2y - xy^3 = 10$

**Solución:**

$$3x^2 + 2xy + x^2y' - x \bullet 3y^2y' - y^3 = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 2xy + y^3}{x^2 - 3xy^2} \Rightarrow y'(2) = \frac{-12-4+1}{4-6} = \frac{15}{2}$$

$$6x + 2xy' + 2y + 2xy' + x^2y'' - 3x(2yy'^2 + y^2y'') - 3y^2y' - 3y^2y' = 0$$

$$12 + 30 + 2 + 30 + 4y'' - 6\left(2 \bullet \frac{225}{4} + y''\right) - 6 \bullet \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow 74 + 4y'' - 675 - 6y'' - 45 = 0$$

$$2y'' = -646 \Rightarrow y''(2) = -323$$

## DERIVACIÓN LOGARÍTMICA:

Para derivar productos, cuocientes o expresiones exponenciales complicadas puede aplicarse previamente logaritmo y luego derivar implícitamente.

**EJEMPLOS:**

1.- Sea $y = x^{\ln x}$. Calcular $y'$.

**Solución:**

$$y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \bullet \ln x \Rightarrow \ln y = \ln^2 x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \bullet y' = 2\ln x \bullet \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{2y}{x}\ln x \Rightarrow y' = 2\frac{x^{\ln x}}{x}\ln x$$

2.- Sea $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$\ln y = \cos x \ln \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} y' = -(\operatorname{sen} x)\,(\ln \operatorname{sen} x) \;+\; \cos x \frac{1}{\operatorname{sen} x} \bullet \cos x$$

$$y' = y\left[\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x\right] \Rightarrow y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x\right]$$

3.- Sea $y = \dfrac{x^5 \sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{1+3x}}$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$\ln y = 5 \ln x + \frac{1}{3} \ln (1-x^2) - \frac{1}{2} \ln (1+3x)$$

$$\frac{1}{y}\; y' = \frac{5}{x} + \frac{1}{3(1-x^2)}(-2x) - \frac{1}{2(1+3x)} \bullet 3$$

$$y' = \frac{x^5 \sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{1+3x}}\left[\frac{5}{x} - \frac{2x}{3(1-x^2)} - \frac{3}{2(1+3x)}\right].$$

## DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

1.- Sea $y = arc\,\text{sen}\,x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Demostración:**

Si $y = arc\,\text{sen}\,x \Rightarrow x = \text{sen}\,y \Rightarrow 1 = \cos y\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore\ D_x(arc\,\text{sen}\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Si $u = f(x),\ D_x(arc\,\text{sen}\,u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \bullet D_x u,\quad -\dfrac{\pi}{2} \le \text{arcsen}\,x \le \dfrac{\pi}{2}$

2.- Sea $y = arc\cos x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Demostración:**

$y = arc\,\cos x \Rightarrow x = \cos y \Rightarrow 1 = -\,\text{sen}\,y\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\text{sen}\,y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} =$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore\ D_x(\,arc\cos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Si $u = f(x)\,,\ D_x(\,arc\,\cos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \bullet D_x u\,,\quad 0 \le arc\,\cos x \le \pi$

3.- Sea $y = arc\,\text{tg}\,x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

**Demostración:**

$y = arc\,\text{tg}\,x \Rightarrow x = \text{tg}\,y \Rightarrow 1 = \sec^2 y\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore\ D_x(arc\,\text{tg}\,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Si $u = f(x),\ D_x(arc\,\text{tg}\,u) = \dfrac{1}{1+u^2} \bullet D_x u\,,\ -\dfrac{\pi}{2} < arc\,\text{tg}\,x < \dfrac{\pi}{2}$

Análogamente se obtiene que:

4.- $D_x(arc\ c\text{tg}u) = -\dfrac{1}{1+u^2} \bullet D_x u$

5.- $D_x(arc\ \sec u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \bullet D_x u$

6.- $D_x(arc\cos ec\ u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \bullet D_x u$

Demostrar las derivadas 4, 5, 6.-

**EJEMPLOS:**

1.- Sea $y = arc\ \text{sen}\, e^x$ , calcular $y'$.

**Solución:**

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

2.- Sea $y = \left(arc\ \text{sen}\ \dfrac{1}{x}\right)^2$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y' = 2\left(arc\ \text{sen}\ \frac{1}{x}\right) \bullet \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \bullet \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -2\left(arc\ \text{sen}\ \frac{1}{x}\right) \bullet \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$$

3.- Sea $y = arc\cos(\text{tg}^2 x)$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y' = -\frac{2\,\text{tg}\, x}{\sqrt{1-\text{tg}^4 x}} \bullet \sec^2 x = \frac{-2\,\text{tg}\, x \bullet \sec^2 x}{\sqrt{1-\text{tg}^4 x}}$$

4.- Sea $y = (arc\,\text{tg}\,x^3)^4$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y' = 4(arc\ tg\ x^3)^3 \bullet \frac{1}{1+x^6} \bullet 3x^2 = \frac{12x^2(arc\ tg\ x^3)^3}{1+x^6}$$

5.- Sea $y = x\, arc\cos ec\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{1-x^2}$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y' = arc\cos ec\frac{1}{x} + x\left(-\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \bullet (-2x)$$

$$y' = arc\cos ec\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ \cos ec\ \frac{1}{x}$$

6.- Sea $y = x^{\operatorname{arcsen} x}$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$\ln y = arc\ \operatorname{sen} x \bullet \ln x$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln x + arc\operatorname{sen} x \bullet \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y' = x^{arc\ \operatorname{sen} x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{arc\ \operatorname{sen} x}{x}\right)$$

7.- Sea $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}arc\ \operatorname{tg} x$, calcular $y'$.

**Solución:**

$$y = \frac{1}{4}\left[\ \ln(1+x) - \ln(1-x)\right] - \frac{1}{2}arc\ \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\ (-1)\right] - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right] - \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{1-x^2}\right] - \frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^4}\right]$$

$$y' = \frac{x^2}{1-x^4}$$

8.- Demostrar que $y = \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\, x)$ satisface la ecuación $(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2\,y = 0$.

**Solución:**

$$y' = \cos(m\ arc\ \text{sen}\, x) \bullet \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m\cos(m\ arc\ \text{sen}\ x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{-\sqrt{1-x^2} \bullet m\ \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\, x) \bullet \dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}} - m\cos(m\ arc\ \text{sen}\, x) \bullet \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{-m^2\sqrt{1-x^2}\ \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\, x) + m\,x\ \cos(m\ arc\ \text{sen}\ x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

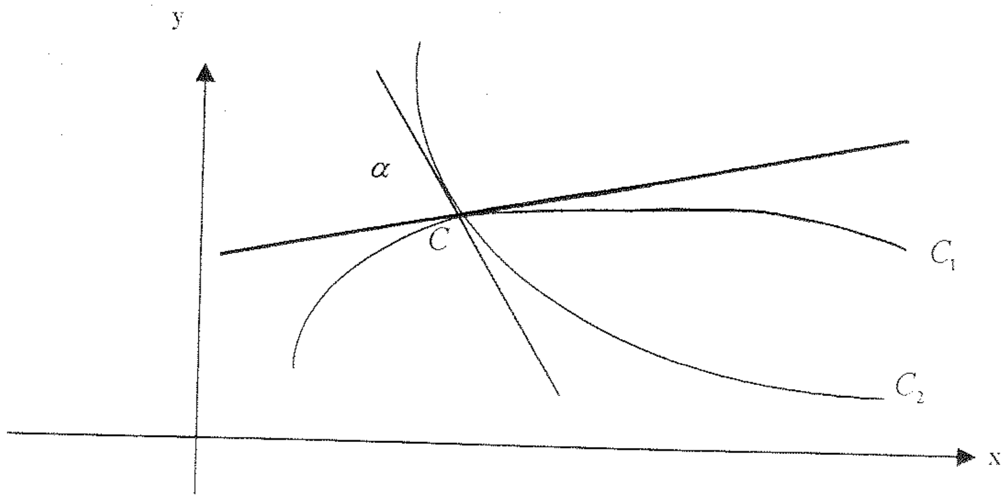
$$\therefore \quad \frac{(1-x^2)\left[mx\cos(m\ arc\ \text{sen}\ x) - m^2\sqrt{1-x^2}\ \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\ x)\right]}{} -$$

$$\frac{x\,m\cos(m\ arc\ \text{sen}\ x)}{\sqrt{1-x^2}} + m^2\ \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\ x) =$$

$$\frac{m\,x\cos(m\ arc\ \text{sen}\, x) - m^2\sqrt{1-x^2}\ \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\ x) - m\ x\ \cos(m\ arc\ \text{sen}\, x)}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$m^2\ \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\ x) = -m^2\,\text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\ x) + m^2\ \text{sen}(m\ arc\ \text{sen}\ x) = 0$$

**DEFINICION:** El ángulo formado por dos curvas que se cortan en un punto C, se define como el ángulo determinado por las rectas tangentes a ellas en dicho punto.




$\alpha$ =ángulo que forman $C_1$ y $C_2$ al cortarse.

**EJEMPLOS:**

1.- Si $f_1(x) = x^2 - \frac{7}{2}$ y $f_2(x) = \frac{1}{x}$, verificar que las curvas se cortan perpendicularmente en el punto $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

**Solución:**

$f_1'(x) = 2x$ ; $f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f_1'(2) = 4$ ; $f_2'(2) = -\frac{1}{4}$

$\therefore 4\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$ , $\therefore$ las curvas se cortan perpendicularmente.

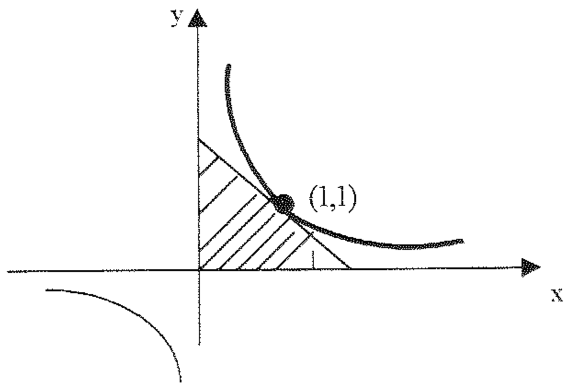
2.- Sea $y = \frac{1}{x}$. Verificar que la recta tangente a esa curva en el punto $P(1,1)$ forma con los ejes coordenados un triángulo de área 2.

**Solución:**

$y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'(1) = -1 = m$

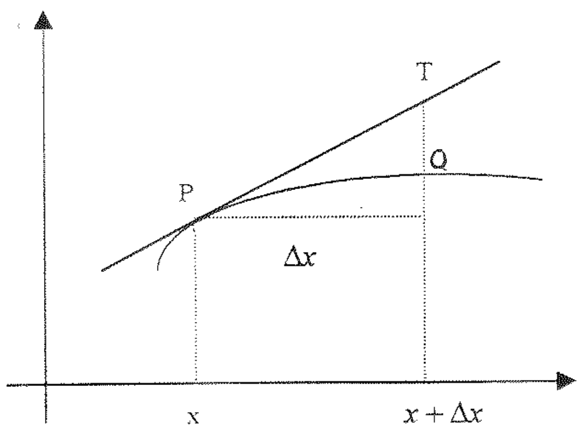
Ecuación tangente en $(1,1)$ es:

$$y-1=-1(x-1)\Rightarrow x+y-2=0\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1\ \therefore A=\frac{b\bullet h}{2}=\frac{2\bullet 2}{2}=2\,.$$




**LA DIFERENCIAL :**

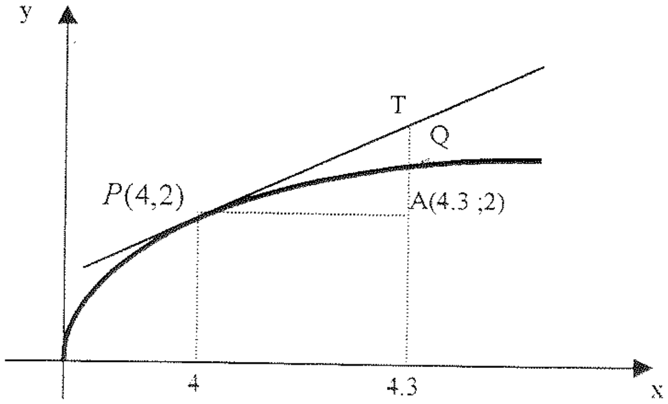
Considerando el siguiente gráfico.




Al hacer que x pase de x hasta $x+\Delta x$, el punto P se mueve sobre la curva de P a Q y el punto P se mueve sobre la tangente de P a T. Cuando $\Delta x$ es muy pequeño T y Q son puntos muy próximos entre si, es decir las ordenadas de Q y T tienen una pequeña diferencia.

Por ejemplo $f(x)=\sqrt{x}$ , $x=4$ , $\Delta x=0{,}3$ . En este caso $P(4{,}2)$. Calcular la diferencia entre las ordenadas de Q y T.

**Solución:**




La ordenada de Q es $f(4.3) = \sqrt{4.3} = 2{,}0736$.

Para la ordenada de T, se tiene que $m_T = \dfrac{\overline{AT}}{\overline{PA}} = f'(4)$.

Pero $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

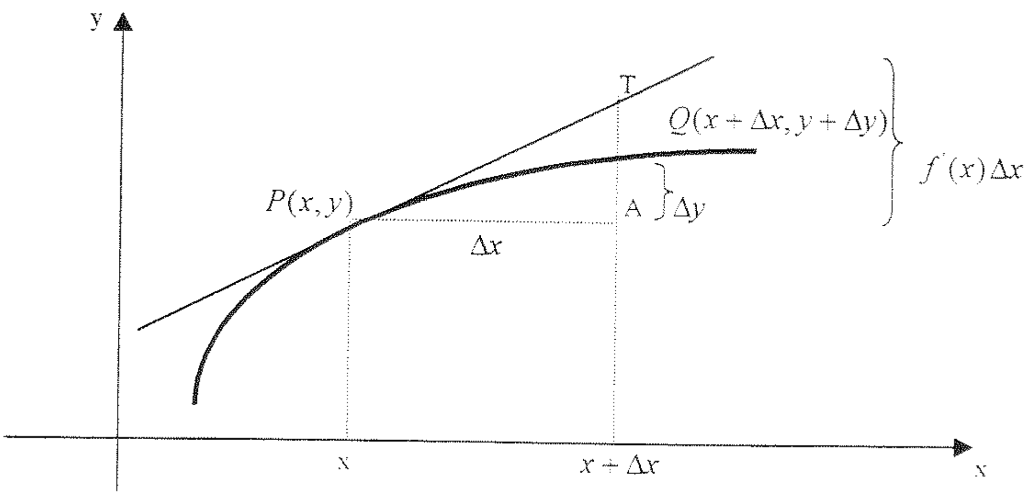
$\therefore \dfrac{\overline{AT}}{\overline{PA}} = 0{,}25 \Rightarrow \overline{AT} = 0{,}3 \bullet 0{,}25 = 0{,}075$

$\therefore$ ordenada de T es= 2+0,075=2,075

$\therefore$ la diferencia es = 2,075-2,0736=0,0014.

Este método es aplicable a toda función derivable.

Luego en general se tiene que la variación a lo largo de la tangente es $\overline{AT}$.



Como $\frac{\overline{AT}}{\Delta x}$ = pendiente de la tangente en $P \Rightarrow \frac{\overline{AT}}{\Delta x} = f'(x)$.

$\therefore \overline{AT} = f'(x) \bullet \Delta x$.

Lo que significa que $f'(x)\Delta x$ es una buena aproximación para $\Delta y$, cuando $\Delta x$ es pequeño.

**DEFINICIÓN**: Al término $f'(x)\Delta x$ se le define como la diferencial de $f$ con respecto a $x$ y se denota por $dy$ ó $df$, es decir:

$$\boxed{dy = d\ f(x) = f'(x) \bullet \Delta x}$$

**EJEMPLO:**

Sea $y = x^3$, $x = 5$, $\Delta x = 0.1$. Comparar $\Delta$ y con $dy$.

**Solución:**

a) $f'(x) = 3x^2 \quad \therefore\ df = 3x^2 \bullet \Delta x$

$\therefore\ dy = 3 \bullet 25 \bullet 0{,}1 = 7{,}5$.

b) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= f(5 + 0{,}1) - f(5)$

$= f(5{,}1) - f(5)$

$= 132{,}651 - 125 = 7{,}651$.

Conocida la derivada de una función, se conoce automáticamente su diferencial, por ejemplo:

$$d(\text{tg } x) = \sec^2 x \bullet \Delta x$$

$$d\ (x^5) = 5x^4 \bullet \Delta x$$

$$d\ (x) = 1 \bullet \Delta x\ .$$

De esta última $dx = \Delta x$, y generalmente la diferencial de $f$ se escribe $d f = f'(x) d\, x$ ó $dy = f'(x)dx$.

De esta forma los símbolos $dy$ y $dx$ adquieren significado separadamente.

$$dy = f'(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \ .$$

**PROPIEDADES:** Si $f$ y $g$ son derivables, entonces:

1.- $d(f+g) = df + dg$ .

**Demostración :** $d(f+g) = (f+g)'dx$

$$= (f' + g')\,dx$$
$$= f'dx + g'\,dx$$
$$= df + dg \ .$$

Análogamente:

2.- $d\,(f-g) = df - dg$ .

3.- $d(f \bullet g) = f \bullet dg + g \bullet df$ .

4.- $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \bullet df \ - f \bullet dg}{g^2}$ , $g \neq 0$ .

5.- $d(c) = 0$ , $c = constante$ .

**EJEMPLOS:**

1.- Hallar el valor aproximado de $\sqrt{67}$ .

**Solución:**

Sea $y = \sqrt{x}$ , si $x = 64 \Rightarrow y = 8$

$\therefore \ \sqrt{67} = \sqrt{64+3}$ $\qquad \therefore \ \Delta x = 3 = dx$

$\sqrt{67} = y + dy = 8 + dy$

$\therefore \ dy = f'(x)dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\therefore \ dy = \dfrac{1}{16} \bullet 3 = 0{,}1875$ $\qquad \therefore \ \sqrt{67} \approx 8{,}1875$ .

2.- Si $\ln 10 = 2{,}303$ obtener un valor aproximado de $\ln 10{,}2$ .

**Solución:**

Sea $y = \ln x$ , $si \ x = 10 \Rightarrow y = 2{,}303$

$\therefore \Delta x = 0{,}2 \qquad dy = \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{10} \bullet 0{,}2 = 0{,}02$

$\therefore \ln 10{,}2 \approx 2{,}323$.

3.- Si $\operatorname{sen} 60° = 0{,}86603$ ; $\cos 60° = 0{,}5$ ; $1° = 0{,}01745\ rad.$, calcular $\cos 61°$.

**Solución:**

Sea $y = \cos x$ , si $x = 60° \Rightarrow y = 0{,}5$

$\therefore \Delta x = 1° = 0{,}01745\ rad.$

$$\begin{aligned}\therefore dy = -\operatorname{sen} x\, dx &= -\operatorname{sen} 60° .\ 0{,}01745 \\ &= -0{,}86603 \bullet 0{,}01745 \\ &= -0{,}015\,1122235\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos 61° &= 0{,}5 - 0{,}015 \leftrightarrow -0{,}0151122235 \\ &= 0.484887765 .\end{aligned}$$

**EJERCICIOS:**

1.- Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Resp.: $\frac{y}{a^2}$

2.- Calcular $\frac{d^4y}{dx^4}$ para $y = \frac{x^3}{1-x}$ . Resp.: $\frac{4!}{(1-x)^5}$

3.- Calcular $y^{(n)}$ para $y = a^x$ . Resp.: $(\ln a^n)\, a^x$

4.- Calcular $y^{(n)}$ para $y = \ln(1+x)$ . Resp.: $(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

5.- Si $y = e^x \operatorname{sen} x$ demostrar que $y'' - y' + 2y = 0$ .

6.- Calcular $\frac{dy}{dx}$ para :

a) $x^2 + y^2 = a^2$. Resp.: $-\frac{x}{y}$

b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ . Resp.: $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

c) $\cos(xy) = x$ . Resp.: $\frac{1 + y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$

7.- Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $e^x + x = e^y + y$. Resp.: $\frac{\left(1-e^{x+y}\right)\left(e^x-e^y\right)}{(e^y+1)^3}$

8.- Si $f$ y $g$ son dos funciones tales que $f''(x)$ y $g''(x)$ existen $\forall x \in \mathrm{IR}$ y

$f(x) \bullet g(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathrm{IR}$, probar que: $\frac{f''(x)}{f'(x)} - 2\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g''(x)}{g'(x)} = 0$.

9.- Aplicando previamente logaritmo, calcular $y'$.

a) $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. Resp.: $\frac{y}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}\right)$

b) $y = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. Resp.: $y\left(\frac{3}{x+1} + \frac{3}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right)$

10.- Calcular $y'$ para:

a) $y = arc\ \mathrm{tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. Resp.: $\frac{1}{2}$

b) $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \bullet arc\ \mathrm{tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Resp.: $\frac{1}{x^3-1}$

c) $y = arc\ \cos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. Resp.: $-\frac{2n\,x^{n-1}}{x^{2n}+1}$

d) $y = x^{arc\ \mathrm{sen}\, x}$. Resp.: $x^{arc\ \mathrm{sen}\, x}\left(\frac{arc\ \mathrm{sen}\, x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

e) $y = arc\ \cos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$. Resp.: $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

11.- Demostrar que $y = \mathrm{sen}(m\,arc\ \mathrm{sen}\, x)$ satisface la ecuación

$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2 y = 0$.

12.- Determinar $dy$ para:

a) $y = \frac{x^3+2x}{x^3-1}$.

b) $x y^2 - e^{x+y} + 2\ln\,(x+y^3) = 3$.

13.- Mediante diferenciales calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{128}$.

Resp.: 5,04

14.- Sea $y = x^3 + 2x$. Determinar $\Delta y$ y $d\,y$ cuando $x = -1$, $\Delta x = 0{,}02$.

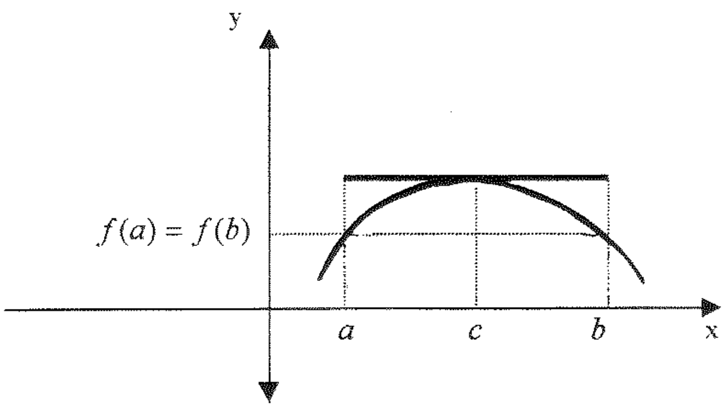
Resp.: $\Delta y = 0{,}098808$
$d\,y = 0{,}1$

## APLICACIONES DE LA DERIVADA

### TEOREMA DE ROLLE:

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$ y $f(a) = f(b)$, entonces, debe existir al menos un punto $c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$.

Gráficamente:




La interpretación geométrica de este teorema indica que si $f$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, es decir tiene una tangente en todos los puntos del intervalo, entonces existe un punto c del intervalo, en el cual la tangente es paralela al eje x. Luego $f'(c) = 0$.

**EJEMPLOS:**

1.- Sea $f(x)=x^2-3x+2$. Comprobar el Teorema de Rolle en $[1,2]$.

**Solución:**

$f$ es continua en $[1,2]$, ya que todo polinomio es una función continua en su dominio, $f$ es derivable en $(1,2)$ ya que $f'(x)=2x-3$. Además $f(1)=f(2)=0$.

$\therefore\ \exists\, c\in(1,2)\ /\ f'(c)=0$

En efecto:

$$f'(c)=2c-3=0 \Rightarrow c=\frac{3}{2}\in(1,2)\ .$$

2.- Sea $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$. Comprobar el Teorema de Rolle en $[0,3]$.

**Solución:**

a) $f$ es continua en $[0,3]$, ya que

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}\right)=\left(x_0^{\frac{4}{3}}-3x_0^{\frac{1}{3}}\right)=f(x_0),\ \forall x_0\in(0,3)$$

Además: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}\right)=0=f(0)$

$$\lim_{x\to 3^-}\left(x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}\right)=\sqrt[3]{3^4}-3\sqrt[3]{3}=0=f(3)\ .$$

b) $f$ es derivable en $(0,3)$, ya que $f'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{4\sqrt[3]{x}}{3}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

c) $f(0)=0$

$f(3)=\sqrt[3]{3^4}-3\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=0$

$\therefore\ f(0)=f(3)=0$

$$\therefore \exists\, c\in(0,3)\ /\ f'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{4\sqrt[3]{c}}{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{c^2}}=0 \Rightarrow \frac{4c-3}{3\sqrt[3]{c^2}}=0$$

$$\Rightarrow c=\frac{3}{4}\in(0,3)\ .$$

3.- Comprobar que entre las raíces de la función $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x-6}$ es aplicable el teorema de Rolle.

**Solución:**

$f(x)=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-5x-6}=0 \Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x-6)(x+1)=0$

$\therefore x=6\ ;\ x=-1$

Se debe comprobar que el Teorema de Rolle se cumple en $[-1,6]$.

En efecto

a) $f$ continua en $[-1,6]$ ya que

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[3]{x^2-5x-6}=\sqrt[3]{x_0^2-5x_0-6}=f(x_0),\ \forall\ x_0\in(-1,6)$$

Además: $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt[3]{x^2-5x-6}=0=f(-1)$

$\lim\limits_{x\to 6^-}\sqrt[3]{x^2-5x-6}=0=f(6)$.

b) $f'(x)=\dfrac{2x-5}{3(x^2-5x-6)^{\frac{2}{3}}}$, luego $f$ derivable en $(-1,6)$.

c) $f(-1)=f(6)=0$

$\therefore \exists\ c\in(-1,6)\ /\ f'(c)=0$

$$f'(c)=\frac{2c-5}{3\sqrt[3]{(c^2-5c-6)^2}}=0 \Rightarrow 2c-5=0 \Rightarrow c=\frac{5}{2}\in(-1,6).$$

4.- La función $f(x)=1-\sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del intervalo $[-1,1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se anula en ningún punto de dicho intervalo. Explique porqué no es aplicable el teorema de Rolle.

**Solución:**

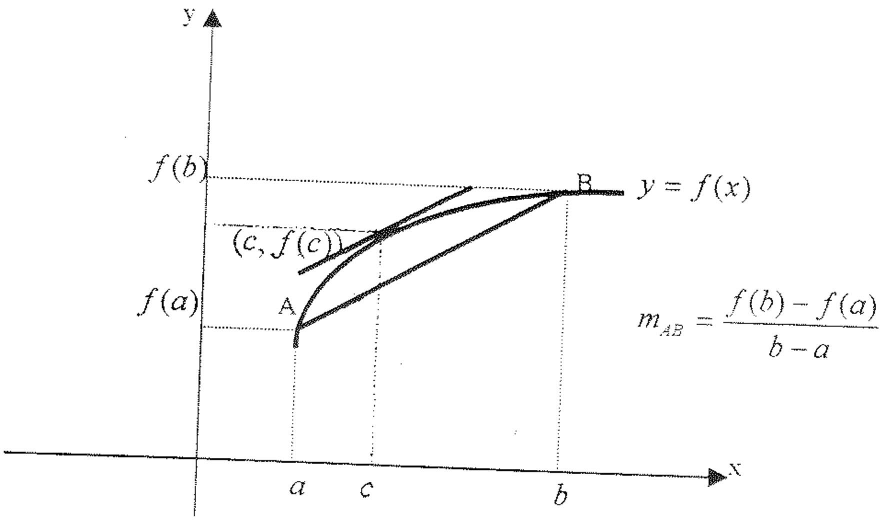
a) $f$ continua en $[-1,1]$.

b) $f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{-4}{5\sqrt[5]{x}} \Rightarrow f'(0)\nexists$. Luego para algún $x$ del intervalo (-1,1), $f$ no es derivable. Como la función no cumple con la hipótesis, no es aplicable el teorema de Rolle.

## TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Gráficamente:




La interpretación de este teorema indica que si A y B son puntos de $y = f(x)$, continua entre ellos y con tangente en cada uno de los puntos del intervalo, luego debe existir un punto $c$ entre $a$ y $b$ en el cual la tangente es paralela a la recta que une A y B. Luego la pendiente de la tangente es igual a la pendiente de la recta AB. Luego: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

**EJEMPLOS:**

1) Comprobar el T.V.M. para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[x_1, x_2]$.

**Solución:**

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua $\forall\, x \in [x_1, x_2]$.

b) $f'(x) = \cos x \Rightarrow f$ es derivable $\forall\, x \in (x_1, x_2)$

$$\therefore \exists\ c \in (x_1 , x_2)\ /\ f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \cos c = \frac{\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1}{x_2 - x_1},\ c \in (x_1 , x_2).$$

2) ¿En qué punto de la curva $f(x) = x^n$, la tangente es paralela a la cuerda que une $M_1$ (0,0) y $M_2$ $(a,a^n)$, $a > 0$?.

**Solución:**

Primero se verá si T.V.M. es aplicable a $f$ en $[0,a]$.

a) $f$ continua en $[0,a]$, por su función polinómica.

b) $f'(x) = n\, x^{n-1}$, $f$ derivable en $(0, a)$

c) $\exists\ c \in (0,a)\ /\ f'(c) = \dfrac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \dfrac{a^n}{a} = a^{n-1}$

$$\Rightarrow nc^{n-1} = a^{n-1} \Rightarrow c^{n-1} = \frac{a^{n-1}}{n}$$

$$\Rightarrow c = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}} \in (0, a).$$

$\therefore$ la tangente es paralela a la cuerda en $c = \dfrac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$.

3.- Estimar el valor de $\sqrt{40}$ utilizando el T.V.M.

**Solución:**

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ , aplicando el T.V.M. en $[36, 40]$ se tiene

a) $f$ continua en $[36, 40]$ , ya que $f = \sqrt{x}$ es continua $\forall\, x \geq 0$.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f$ es derivable $\forall\, x>0 \Rightarrow f$ derivable en $(36,40)$.

c) $\exists\, c \in (36,40)$ / $f'(c)=\dfrac{f(40)-f(36)}{40-36}$.

Ahora $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{40}-\sqrt{36}}{4},\quad c\in(36,\,40)$$

$$\frac{2}{\sqrt{c}}=\sqrt{40}-6,\ \text{si}\quad 36<c<40 \Rightarrow 6<\sqrt{c}<\sqrt{40} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{40}}<\frac{2}{\sqrt{c}}<\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \frac{2}{\sqrt{40}}<\sqrt{40}-6<\frac{1}{3}\ .$$

Tomando la designación de la derecha:

$$\sqrt{40}-6<\frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{40}<\frac{19}{3}\ (i)\ .$$

Tomando la desigualdad de la izquierda:

$$\sqrt{40}-6>\frac{2}{\sqrt{40}}\bullet\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{40}}{20} \Rightarrow 20\sqrt{40}-120>\sqrt{40} \Rightarrow 19\sqrt{40}>120$$

$$\sqrt{40}>\frac{120}{19}\ (ii)\quad \text{De i) y ii)}\qquad \Rightarrow\ \frac{120}{19}<\sqrt{40}<\frac{19}{3}\ .$$

4.- Haciendo uso del T.V.M., demostrar que: $\ln(1+x)<x$, $(x>0)$.

**Demostración:**

Aplicando el T.V.M. a $f(x)=\ln(1+x)$ en $[0,x]$

a) $f$ continua en $[0,x]$ ya que $f$ es continua $\forall\, x>-1$.

b) $f$ derivable $(0,x)$ ya que $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

c) $\exists\, c\in(0,x)$ / $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ y $f'(c)=\dfrac{1}{1+c}$

$$\therefore\ \frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x},\qquad 0<c<x \Rightarrow 1<c+1<x+1 \Rightarrow \frac{1}{1+c}<1$$

$$\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)}{x},\ \therefore\ \frac{\ln(1+x)}{x}<1 \Rightarrow \ln(1+x)<x\ .$$

## TEOREMA DE L'HOPITAL Y SUS APLICACIONES AL CALCULO DE LIMITE DE FUNCIONES

Sea $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ una función de variable real y $a\in\mathrm{IR}$. Se dice que $F(x)$ toma la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ en $x=a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Otras formas indeterminadas son: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\bullet\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$.

**EJEMPLO:**

Sea $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$, está definida $\forall x\in\mathrm{IR}-\{2,-5\}$, ya que en $x=2$ y $x=-5$ el denominador se anula, pero en $x=2$ el numerador también se anula y $f(x)$ toma la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ en $x=2$ ya que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$ y $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-10)=0$.

**TEOREMA:**

Sean a $\in\mathrm{IR}$ y $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, siendo $f$ y $g$ funciones derivables en un intervalo abierto I. Sea $g'(x)\neq 0$, $\forall\, x\in I$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

**OBSERVACIONES:**

1.- Si las primeras derivadas también se anulan en $x=a$, se vuelve a aplicar L'Hopital. El procedimiento puede repetirse las veces que corresponda.

2.- Este teorema también es válido para los casos $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, haciendo los cambios correspondientes en las hipótesis.

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{3x^2-8x-3}$ .

**Solución:**

Como $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-x-15)=0$ y $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-8x-3)=0$ entonces la función toma la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$. Aplicando L'Hopital se tiene: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{3x^2-8x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-1}{6x-8}=\dfrac{11}{10}$ .

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x-x}{x^3}$ .

**Solución:**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$ también toma la forma $\dfrac{0}{0}$

$\therefore$ Aplicando L'Hopital se tiene $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen}x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{6}=-\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$ .

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln\cos x}$ .

**Solución:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x}{\operatorname{sen}x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen}x+cox}{\cos x}=-2\ .$$

4.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+7x}{1-\cos x}$ .

**Solución:**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,e^{2x}+7x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot e^{2x}\cdot 2+e^{2x}+7}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{8}{0}$ $\therefore$ no existe .

Este teorema se puede aplicar a otras formas indeterminadas:

1) Forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, se sigue la misma regla que para la forma $\dfrac{0}{0}$.

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0\,.$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\lim_{x\to 0}=\frac{2\cos 2x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos^2 x}=\frac{1}{1}=1\,.$$

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\operatorname{tg} x-10}{\sec x+4}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\operatorname{tg} x-10}{\sec x+4}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\cos x}\bullet\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\operatorname{sen} x}=2\,.$$

4.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen} x)}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen} x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x}=1\,.$$

5.- Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cot g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cot g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 1 .$$

2) Forma $0 \bullet \infty$. Si $f(x) \bullet g(x)$ toma la forma $0 \bullet \infty$, la función se expresará como :

$$f(x) \bullet g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \quad ;$$

con el fin de hacer, que tome la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, para luego aplicar una de las reglas anteriores.

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \bullet \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \bullet \operatorname{tg}\frac{x}{2} = (0 \bullet \infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{1}{2} .$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{c\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{-\operatorname{cosec}^2 x} = 2 .$$

3) Forma $\infty - \infty$. En general es posible transformar la expresión a $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$.

**Solución:**

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

2.- Calcular $\lim\limits_{y \to 1}\left(\frac{y}{y-1} - \frac{1}{\ln y}\right)$.

**Solución:**

$$\lim_{y \to 1}\left(\frac{y}{y-1} - \frac{1}{\ln y}\right) = \lim_{y \to 1}\frac{y\ln y - y + 1}{(y-1)\ln y} = \lim_{y \to 1}\frac{y\frac{1}{y} + \ln y - 1}{(y-1)\frac{1}{y} + \ln y} = \lim_{y \to 1}\frac{\ln y}{1 - \frac{1}{y} + \ln y} =$$

$$= \lim_{y \to 1}\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{2}$$

3.- Calcular $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$.

**Solución:**

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{1+x-1}{(1+x)\ln(1+x) + x} = \lim_{x \to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{\frac{1+x}{1+x} + \ln(1+x) + 1} = \frac{1}{2}.$$

4) Forma $0^0$ , $1^\infty$, $\infty^0$ .

Sea $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$, que toma la forma $0 \bullet \infty$. Además se tiene que el $\lim\limits_{x\to x_0} \ln y = a \Rightarrow \ln \lim\limits_{x\to x_0} y = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} y = e^a$ .

**EJEMPLOS:**

1.- Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ .

**Solución:** Como es de la forma $1^\infty$, se tiene:

$y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{tg} x \ln(\operatorname{sen} x)$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{c\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \bullet -\operatorname{sen}^2 x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (-\operatorname{sen} x \cos x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1 \qquad \therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = 1 \ .$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ .

**Solución:** es de la forma $1^\infty$.

Sea $y = x^{\frac{1}{1-x}} \Rightarrow \ln y = \dfrac{1}{1-x} \ln x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \ln y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -1$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \ln y = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} y = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad \therefore \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e} \ .$$

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$ .

**Solución:** Como es de la forma $\infty^0$, se tiene:

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{sen} x \ln \frac{1}{x} = \operatorname{sen} x(\ln 1 - \ln x) = -\operatorname{sen} x \ln x$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \ln y = -\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \bullet \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1 \qquad \therefore \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = 1 \ .$$

4.- Calcular $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ .

**Solución:** es de la forma $0^0$.

Sea $y = x^{\frac{3}{4+\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{4+\ln x} \ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \ln x}{4 + \ln x} = 3 \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} y = e^3 \qquad \therefore \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = e^3 \ .$$

5.- Calcular $\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{t^2} = \lim_{t\to\infty} t^{\frac{2}{t}}$ .

**Solución:** es de la forma $\infty^0$.

Sea $y = t^{\frac{2}{t}} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{t} \ln t$

$$\lim_{t\to\infty} \ln y = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{t} \ln t = \lim_{t\to\infty} \frac{2 \ln t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2\frac{1}{t}}{1} = 0$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} y = e^0 = 1. \qquad \therefore \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{t^2} = 1 \ .$$

6.- Calcular $\lim_{x\to\infty}(x^3-2)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

**Solución:** es de la forma $\infty^0$.

Sea $y=\left(x^3-2\right)^{\frac{1}{\ln x}} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{\ln x}\ln(x^3-2)$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\bullet\ln(x^3-2)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3-2)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3-2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3-2}=3$$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\ln y=3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}y=e^3$ $\quad\therefore \lim_{x\to\infty}(x^3-2)^{\frac{1}{\ln x}}=e^3$ .

7.- Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{\sqrt[x]{1-x^2}}$; $a,b\in \mathrm{IR}^+$ .

**Solución:**

Como $\lim_{x\to 0}(a^x-b^x)=0$, se calculará el otro límite.

Sea $y=\sqrt[x]{1-x^2} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}\ln(1-x^2)$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{1}=0$$

$\therefore \lim_{x\to 0}\ln y=0, \Rightarrow \lim_{x\to 0}y=e^0=1$ $\quad\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{\sqrt[x]{1-x^2}}=\frac{0}{1}=0$ .

**EJERCICIOS:**

1.- Verificar la validez del Teorema de Rolle para $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$ en $[1,2]$.

Resp.: $c=\frac{3}{2}$

2.- Determinar el valor de $c$ que satisface el Teorema de Rolle para $f(x)=(x+2)^{2n}(x-2)^n$, $n\in Z^+$, en $[-2,2]$. Resp.: $c=\frac{2}{3}$

3.- Analizar si es aplicable el Teorema de Rolle para $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1,1]$.

Resp.: no es aplicable

4.- Determinar el valor de $c$ que satisface el Teorema del Valor Medio para:

a) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ en $\left[\frac{1}{2},2\right]$. Resp.: 1

b) $f(x)=\sqrt{x-1}$ en $[1,3]$. Resp.: $\frac{3}{2}$

5.- Sea $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+x, & si \ \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{x}{2-x}, & si \ 1<x\le \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Determinar $c\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ del Teorema del Valor Medio. Resp.: 1

6.- Calcular :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^3}$. Resp.: $-\frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{c\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$. Resp.: $\frac{\pi^2}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}$. Resp.: 3

d) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$. Resp.: $\frac{2}{\pi}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot g\, x$. Resp.: 0

f) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$. Resp.: 1

g) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. Resp.: $e^{-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Resp.: 1

# UTILIZACIÓN DE LA DERIVADA EN EL TRAZADO DE CURVAS

Esta sección enseña a utilizar la derivada en el trazado de gráfica de curvas, de modo que la información obtenida a través de ella, permite esbozar un gráfico más exacto.

**1.- Puntos críticos de una función**

Sea $f:[a,b]\to \mathrm{IR}$ una función. Aquellos puntos donde la derivada de $f$ se anula o no existe, se denominan puntos críticos de $f$. Es decir los puntos críticos de $f$ son las raíces de la ecuación $f'(x)=0$ o bien los puntos en donde $f'$ no existe.

**EJEMPLO:**

1.- $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+2x^2-3x-1$ definida sobre I=(0,5)

$f'(x)=-x^2+4x-3=-(x^2-4x+3)=-(x-3)(x-1)$.

De $f'(x)=0$ se obtiene $x=3 \wedge x=1$, son puntos críticos.

2.- $f(x)=(x-3)^{\frac{2}{3}}+2$ ; $x\in$ IR.

$f'(x)=\dfrac{2}{3}(x-3)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3(x-3)^{\frac{1}{3}}}$, $\therefore$ punto crítico $x=3\in\mathrm{IR}$; pues $\nexists\ f'(3)$

Se dice que $\nexists\ f'(3)$ , ya que $f'_+(3)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ ; $f'_-(3)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$ .

3.- $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$ ; $x\in$ IR

$f'(x)=\cos x-\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow \cos x=\operatorname{sen}x \Rightarrow \operatorname{tg}x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ , $k\in Z$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}$, etc. son puntos críticos.

4.- $f(x) = \operatorname{sen}|x| = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x \geq 0 \\ -\operatorname{sen} x, & x < 0 \end{cases}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0 \end{cases}$$

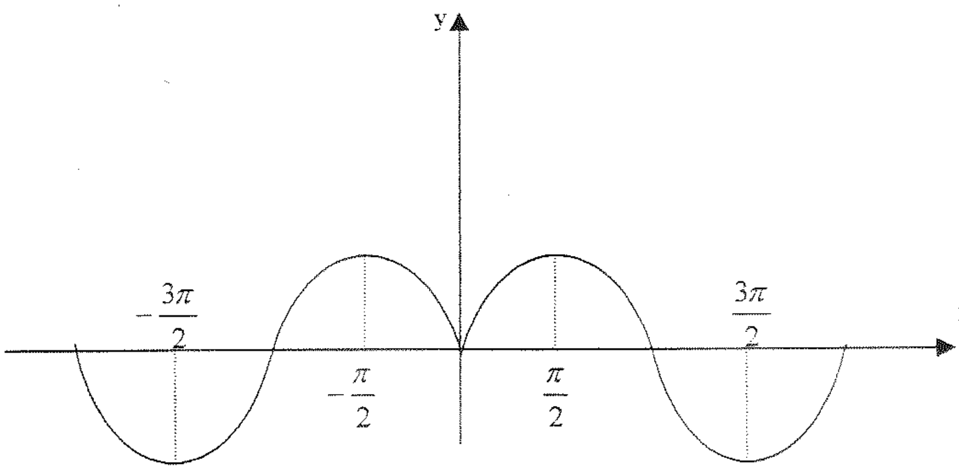
Como es una función por tramo y además continua, se analiza su derivada en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_{-}(0) = \quad \cos 0 = 1 \\ f'_{-}(0) = \; -\cos 0 = -1 \end{array}\right\} \nexists f'(0) \qquad \therefore \; x = 0 \text{ es punto crítico.}$$

Por otro lado $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$, $x > 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\cos x = 0$, $x < 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}^-$

$\therefore$ Puntos críticos $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; $k \in \mathbb{Z}$ y $x = 0$.




5.- $f(x) = |x^3 - 4x| = \begin{cases} x^3 - 4x, \; si \; x^3 - 4x \geq 0 & \Rightarrow x \in [-2,0] \cup [2 + \infty) \\ -x^3 + 4x, \; si \; x^3 - 4x < 0 & \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0,2) \end{cases}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x \in (-2,0) \cup (2, +\infty) \\ -3x^2 + 4, & x \in (-\infty, -2) \cup (0,2) \end{cases}$$

a) Como $f$ es continua en todo su dominio y derivable en cada tramo abierto, se analizará su derivabilidad en $x=-2$, $x=0$ y $x=2$.

i) En $x=-2$

$f'_-(-2)=-3(-2)^2+4=-8 \quad \wedge \quad f'_+(-2)=3(-2)^2-4=8$

$\therefore\ f'(-2)\nexists$, $f$ no es derivable en $x=-2$.

ii) En $x=0$

$f'_-(0)=3(0)^2-4=-4 \quad \wedge \quad f'_+(0)=-3(0)^2+4=4$

$\therefore\ f'(0)\nexists$, $f$ no es derivable en $x=0$.

iii) En $x=2$

$f'_-(2)=-3(2)^2+4=-8 \quad \wedge \quad f'_+(2)=3(2)^2-4=8$

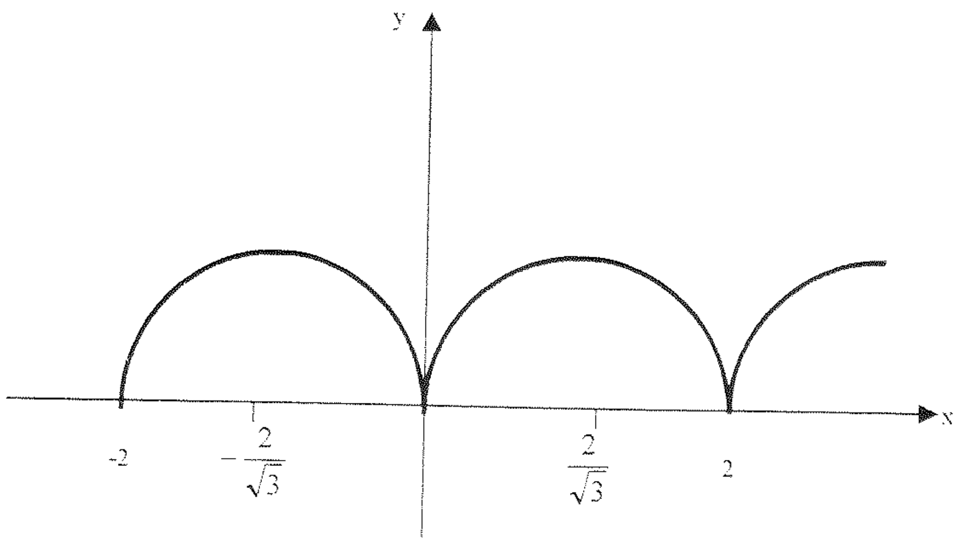
$\therefore\ f'(2)\nexists$, $f$ no es derivable en $x=2$.

b) $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$

$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$

$\therefore$ Puntos críticos $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ; $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ; $x=-2$ ; $x=0$ ; $x=2$ .

Gráficamente:



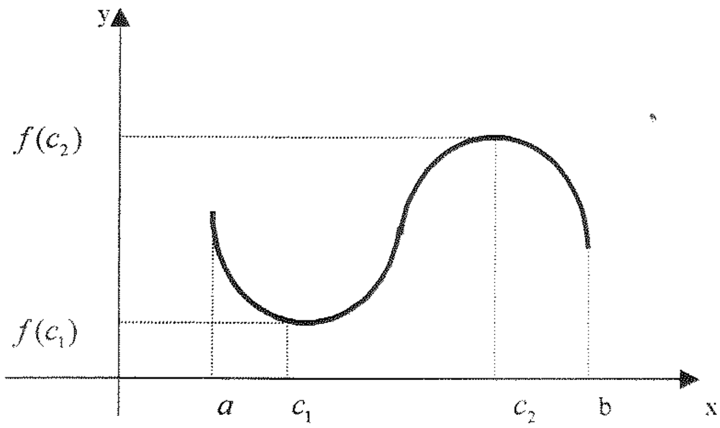
## 2.- Valores Extremos de una Función

**DEFINICIÓN**: Sea $f : A \subseteq \text{IR} \longrightarrow \text{IR}$

a) Se dice que $f$ tiene un máximo absoluto en $x_0$, si $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall\, x \in dom\ f$ ; $f(x_0)$ se denomina valor máximo absoluto.

b) Se dice que $f$ tiene un mínimo absoluto en $x_0$, si $f(x) \geq f(x_0)$ , $\forall\, x \in dom\ f$; $f(x_0)$ se denomina valor mínimo absoluto.

Gráficamente:



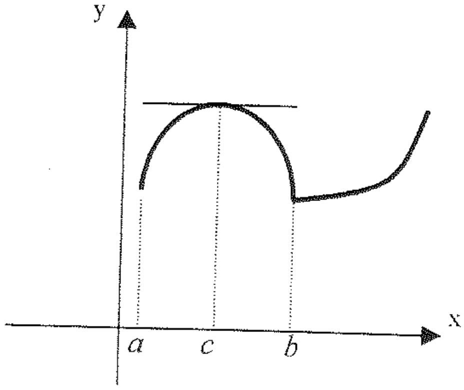

En $c_2$ hay un máximo absoluto cuyo valor es $f(c_2)$

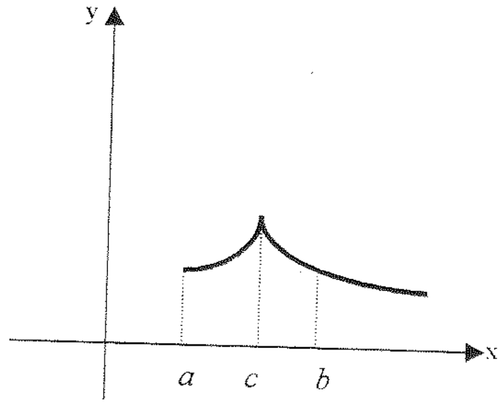
En $c_1$ hay un mínimo absoluto cuyo valor es $f(c_1)$

**DEFINICION:**

a) Se dice que la función $f$ tiene un valor máximo relativo o local en $x = c \in (a,b)$ , si $f(c) \geq f(x)$ , $\forall\, x \in (a,b)$ , donde $(a,b) \subset A = dom\, f$ .

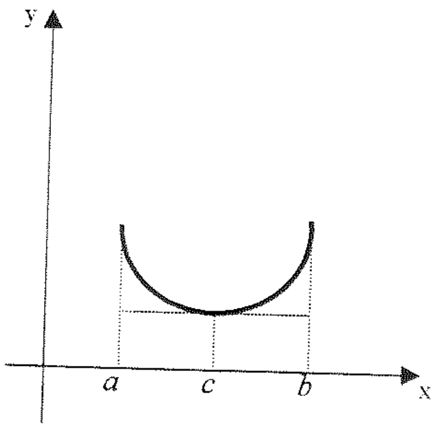
Cuando ello ocurre se dice que $f(c)$ es un máximo relativo de $f$ .

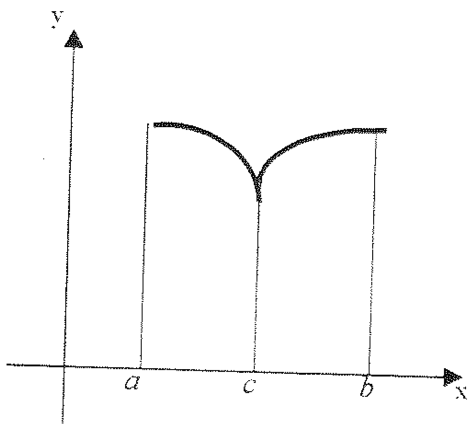



b) Se dice que la función $f$ tiene un valor mínimo relativo o local en $x = c \in (a,b)$, si $f(c) \leq f(x)$, $\forall\, x \in (a,b)$ , donde $(a,b) \subset A = dom\, f$ .

Cuando ello ocurre se dice que $f(c)$ es un mínimo relativo de $f$ .




**TEOREMA:** (Condición necesaria para la existencia de un valor extremo local ).

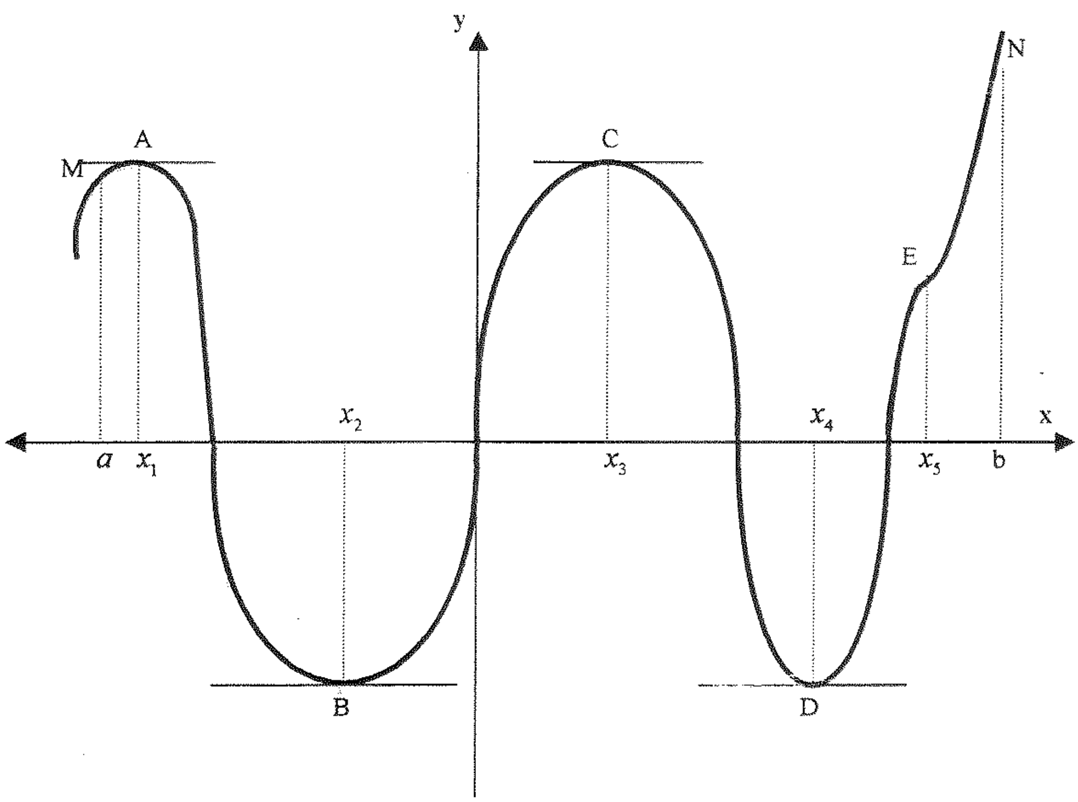
Sea $f$ una función derivable y $x = c \in dom\, f$. Si en $x = c$ $f$ posee un valor extremo local, entonces $f'(c) = 0$ ó $f'(c) \nexists$.

**OBSERVACIONES:**

1) El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, que $f'(c)=0$ ó $f'(c)\nexists$ no necesariamente en $x=c$ hay un extremo.

2) Sólo puede haber valores extremos locales de $f$, si es que existen, en los puntos críticos definidos.

Sea $y=f(x)$ una función continua en $[a,b]$ cuyo gráfico es:




Si un punto $P$, se mueve a lo largo de la curva desde $M$ hasta $N$, se observa que en el tramo $MA$ los valores de la función crecen cuando la abscisa crece y en el tramo $AB$ los valores decrecen, cuando la abscisa crece. Luego $f$ es creciente en $[a\ x_1]$, $[x_2\ ,x_3]\ y\ [x_4\ ,b]$ y decreciente en $[x_1\ ,x_2]\ y\ [x_3\ ,x_4]$.

**OBSERVACIÓN:** Geométricamente, se observa que cuando la pendiente de la tangente es positiva, la función es creciente y cuando la pendiente de la tangente es negativa, la función es decreciente.

**TEOREMA:** Sea $f$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)\ y\ (x_1\ ,x_2)\subseteq(a,b)$. Entonces:

a) Si $f'(x)>0\ \forall\ x\in(x_1\ ,x_2)$, entonces $f$ es creciente en $[x_1\ ,x_2]$.

b) Si $f'(x)<0\ \forall\ x\in(x_1\ ,x_2)$, entonces $f$ es decreciente en $[x_1\ ,x_2]$.

**Demostración a):**

Sean $x_1,x_2\in[a,b],\ x_1<x_2\ \ y\ \ c\in(x_1\ ,x_2)$. Del T.V.M. se tiene $f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, como $x_1<x_2\Rightarrow x_2-x_1>0$

Por hipótesis $f'(x)>0$, $\therefore f(x_2)-f(x_1)>0\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$, $\therefore f$ es creciente en $[a,b]$; en forma análoga se demuestra la parte b).

**OBSERVACION:** El o los valores donde $f$ es monótona creciente, corresponden al conjunto solución de la inecuación $f'(x)>0$ y $f$ monótona decreciente donde $f'(x)<0$ .

**EJEMPLOS:**

1) Sea $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

**Solución:**

$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$ , puntos críticos $x=0$ ; $x=-1$, $x=1$ .

$(-\infty, -1)$; $(-1,0)$; $(0,1)$; $(1, +\infty)$.

a) Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

b) Si $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-1,0)$

c) Si $0 < x < 1 => f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(0,1)$

d) Si $x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(1, +\infty)$

$\therefore f$ es creciente en $(-\infty, 0)$, $x \neq -1$ y decreciente en $(0, +\infty)$, $x \neq 1$.

2) Sea $f(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & si \quad x > 0 \end{cases}$ .Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

**Solución:**

$f'(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, & si \quad x > 0 \end{cases}$ ya que como $f$ es continua en IR, se tiene que:

$f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = 1$, y por lo tanto es derivable en $x = 0$.

$f'(x) = 0$ en $x = \pm 1$, puntos críticos. Como $f$ está definida por tramos se analizan los intervalos $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0,1)$; $(1, +\infty)$.

a) Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-\infty, -1)$.

b) Si $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-1,0)$.

c) Si $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow -1 < -x^2 < 0 \Rightarrow 0 < 1 - x^2 < 1 \Rightarrow f'(x) > 0$, $f$ es creciente $(0,1)$.

d) Si $x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$, $f$ es decreciente en $(1, +\infty)$

$\therefore f$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

## 3.- Determinación de Valores Extremos.

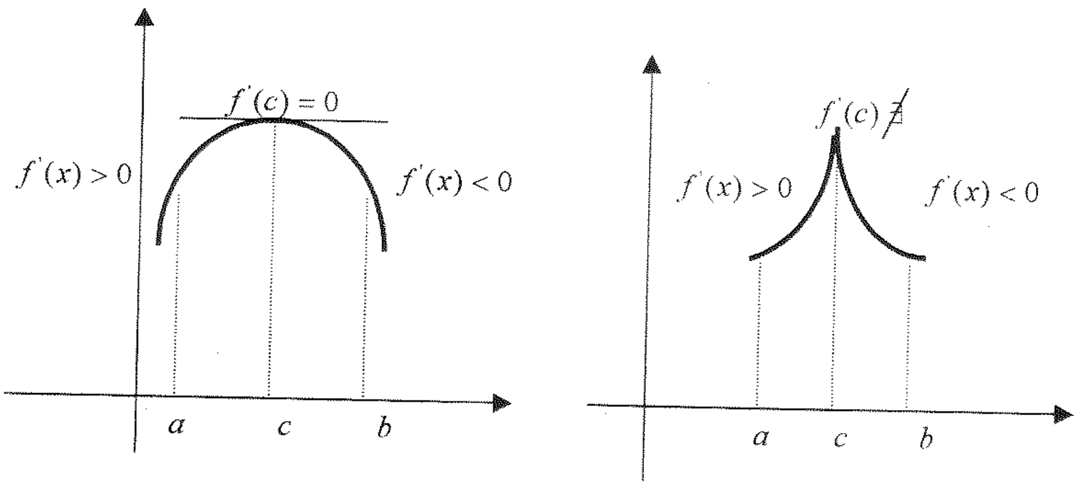
Ya se sabe determinar los puntos críticos de una función $f$, es decir posiblemente donde existen valores extremos.

A continuación se presentarán criterios que van a permitir decidir si en tales puntos críticos existen máximo y/o mínimo.

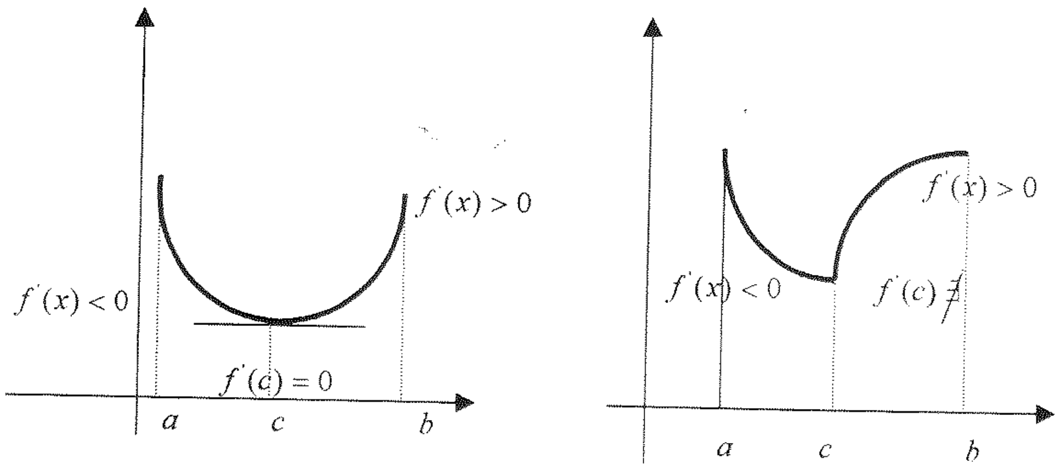
**CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS.**

**TEOREMA:** Sea $f$ una función continua en $[a,b]$; $a < c < b$ tal que $f'$ existe en $(a,b)$ excepto posiblemente en $c$.

1) Si $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (a,c)$ y si $f'(x) < 0,\ \forall x \in (c,b)$, entonces se tiene en $x = c$ un máximo.




2) Si $f'(x) < 0,\ \forall\, x \in (a,c)$ y si $f'(x) > 0,\ \forall x \in (c,b)$, entonces se tiene en $x = c$ un mínimo.



**RESUMEN:** Para determinar extremos con este criterio se debe:

1) Hallar $f'$
2) Determinar puntos críticos
3) Aplicar criterio de la primera derivada

**EJEMPLOS:**

1.- Encontrar los extremos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento para $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$.

**Solución:**

$f$ es continua $\forall x \in \mathrm{IR}$

a) $f'(x) = x^2 - 2x$

b) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$, puntos críticos $x = 0$ ; $x = 2$

c) $(-\infty, 0);(0,2);(2, +\infty)$

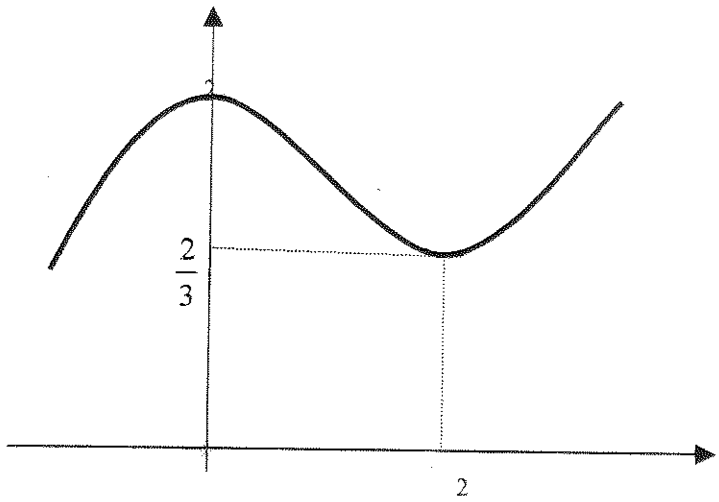
Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ , $\therefore f$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0$ , $\therefore f$ es decreciente en $(0,2)$

Si $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ , $\therefore f$ es creciente en $(2,+\infty)$

$\therefore$ en $x=0$ hay un máximo y es $f(0) = 2$

en $x = 2$ hay un mínimo y es $f(2) = \frac{2}{3}$.



2.- Sea $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$. Determinar extremos e intervalos de monotonía.

**Solución:**

a) $f'(x)=3x^2-12x+9$

b) $3\,(x^2-4x+3)=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0$, puntos críticos $x=3$ ; $x=1$

c) Intervalos de Monotonía:

$(-\infty\,,1);\,(1{,}3)\,;\,(3\,,+\infty)$

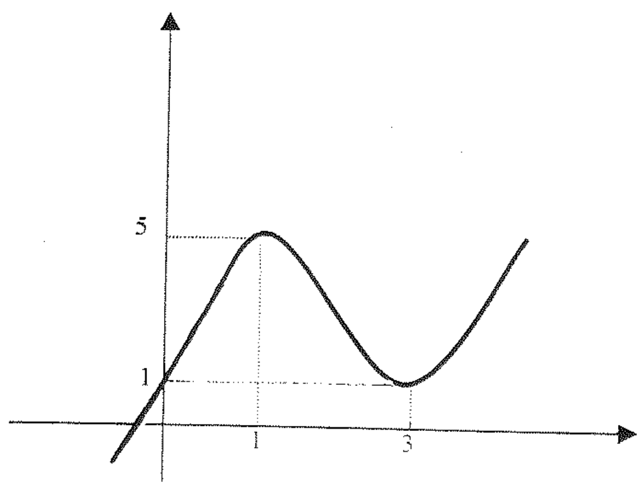
Si $x<1 \Rightarrow f'(x)>0$, $\therefore$ $f$ es creciente en $(-\infty,\,1)$

Si $1<x<3 \Rightarrow f'(x)<0$, $\therefore$ $f$ es decreciente en $(1{,}3)$

$\therefore$ en $x=1$ hay un máximo y es $f(1)=5$

Si $x>3 \Rightarrow f'(x)>0$, $\therefore$ $f$ es creciente en $(3\,,+\infty)$

$\therefore$ en $x=3$ hay un mínimo y es $f(3)=1$.




3.- Sea $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & si\ x<3 \\ 8-x, & si\ x\geq 3 \end{cases}$. Determinar extremos e intervalos de monotonía.

**Solución:**

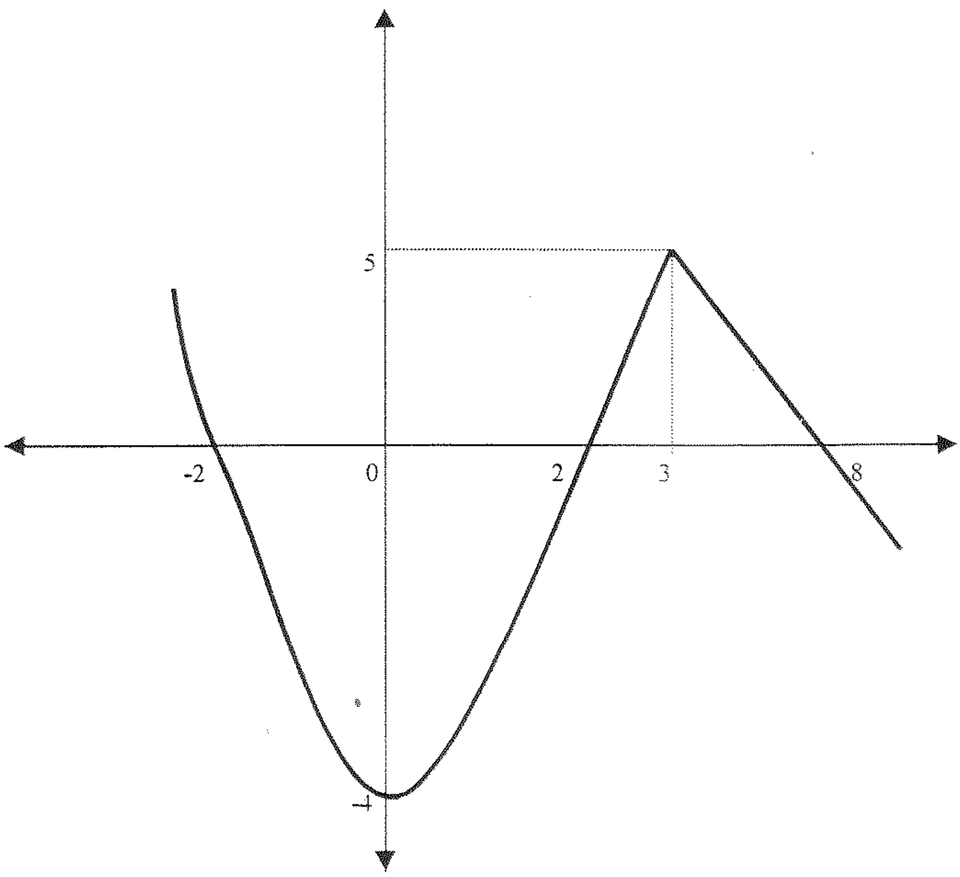
a) $f$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x\,, & si \quad x < 3 \\ -1\,, & si \quad x > 3 \end{cases}$, ya que $f'_+(3) = -1\,; f'_-(3) = 6\,, \therefore\ f'(3) \nexists$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0\,; x = 0$ Puntos críticos : $x = 0\ ;\ x = 3$.

c) Intervalos de monotonía : $(-\infty\,, 0)\,; (0{,}3)\,; (3\,, +\infty)$.

Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $(-\infty{,}0)$.
Si $0 < x < 3 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(0{,}3)$
$\therefore$ en $x = 0$ hay un mínimo que es $f(0) = -4$ .
Si $x > 3 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $(3\,, +\infty)$
$\therefore$ en $x = 3$ hay un máximo que es $f(3) = 5$ .



4) Sea $f(x)=\begin{cases} 4-|x+3|\ , & si\ \ -8\le x<0 \\ \dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\ , & si\ \ 0\le x\le 5 \\ \dfrac{23}{3}\ , & si\ \ 5<x<7 \end{cases}$

Determinar extremos e intervalos de monotonía.

**Solución:**

$$f(x)=\begin{cases} x+7\ , & si\ \ -8\le x<-3 \\ 1-x\ , & si\ \ -3\le x<0 \\ \dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\ , & si\ \ 0\le x\le 5 \\ \dfrac{23}{3} & si\ \ 5<x<7 \end{cases}$$

a) $f'(x)=\begin{cases} 1\ , & si\ \ -8<x<-3 \\ -1\ , & si\ \ -3<x<0 \\ x^2-4x+3\ , & si\ \ 0<x<5 \\ 0\ , & si\ \ 5<x<7 \end{cases}$

ya que : $f'_-(-3)=1\ ;\ f'_+(-3)=-1\ ,\ \therefore\ f'(-3)\nexists$

$f'_-(0)=-1\ ;\ f'_+(0)=3\ ,\ \therefore f'(0)\nexists$

$f'_-(5)=8\ ;\ f'_+(5)=0\ ,\ \therefore\ f'(5)\nexists$ .

b) $f'(x)=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow(x-3)(x-1)=0\Rightarrow x=3,\ x=1$

$f'(x)=0,\ \forall\ x\in(5,7)$

$f'(x)\nexists$ en $x=-3,\ x=0,\ x=5$

$\therefore$ puntos críticos:

$x=-3,\ \ x=0,\ \ x=1,\ \ x=3,\ \ x\in[5,7)$ .

c) Intervalos de monotonía.

$(-8,-3)\ ;(-3,0);\ (0,1);\ (1,3)\ ;\ (3,5);(5,7)$ .

Si $-8 < x < -3 \Rightarrow f'(x) > 0, \therefore f$ es creciente en $(-8,-3)$.

Si $-3 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \therefore f$ es decreciente en $(-3,0)$

$\therefore$ en $x = -3$ hay un máximo y es $f(-3) = 4$.

Si $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \therefore f$ es creciente en $(0,1)$

$\therefore$ en $x = 0$ hay un mínimo y es $f(0) = 1$.

Si $1 < x < 3 \Rightarrow f'(x) < 0, \therefore f$ es decreciente en $(1,3)$

$\therefore$ en $x = 1$ hay un máximo y es $f(1) = \frac{7}{3}$.

Si $3 < x < 5 \Rightarrow f'(x) > 0, \therefore f$ es creciente en $(3,5)$

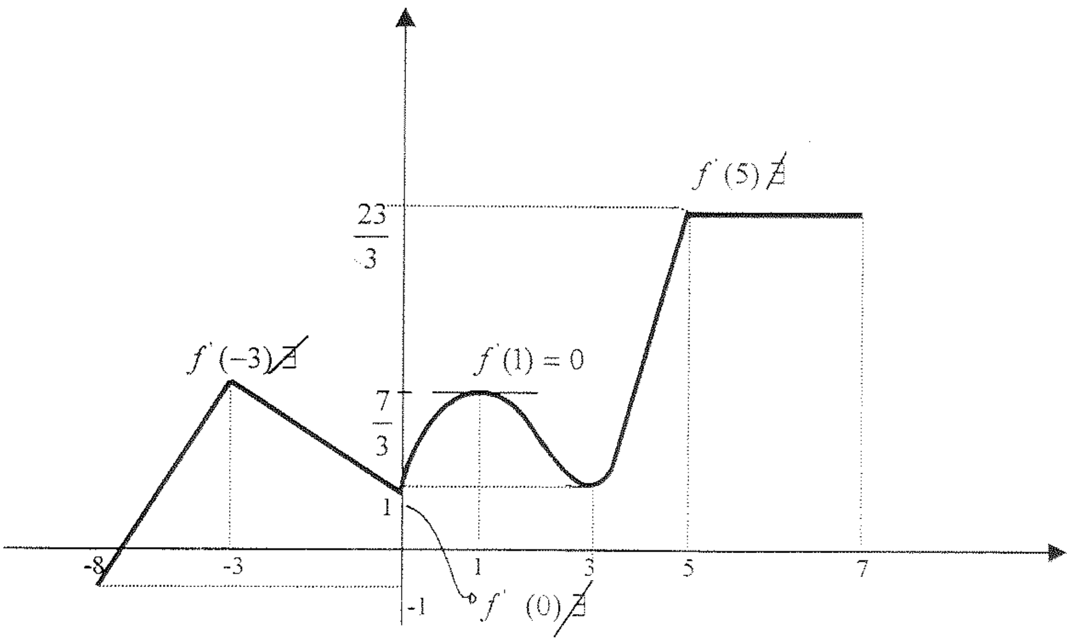
$\therefore$ en $x = 3$ hay un mínimo y es $f(3) = 1$.

Si $5 < x < 7 \Rightarrow f'(x) = 0, \Rightarrow f(x) = \frac{23}{3}, \ \forall\, x \in (5,7)$.

d) Además $f(-8) = -1, \ f(5) = \frac{23}{3}$.

e) El máximo absoluto es $f(x) = \frac{23}{3}, \forall x \in [5,7)$ y el mínimo absoluto es $f(-8) = -1$.

Los otros máximos y/o mínimos son relativos.



## CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS

**TEOREMA:** Sea "c" un punto crítico de $f$ en el cual $f'(c)=0$ y $f'$ existe $\forall x \in$ intervalo que contenga a "c". Si $f''(c)$ existe y:

a) $f''(c)<0$, $f$ tiene un máximo en "c" (relativo).

b) $f''(c)>0$, $f$ tiene un mínimo en "c" (relativo).

**OBSERVACION:** Si $f''(c)=0$, así como $f'(c)=0$, nada puede decirse de extremos en c.

**EJEMPLOS:**

1) Sea $f(x)=x^4$. Determinar valores extremos, si es que existen.

**Solución:**

$\left.\begin{array}{ll} f'(x)=4x^3 \Rightarrow & f'(0)=0 \\ f''(x)=12x^2 \Rightarrow & f''(0)=0 \end{array}\right\} \therefore$ nada puede decirse, utilizando el criterio de la segunda derivada.

En cambio, aplicando el criterio de la primera derivada se tiene:

$\left.\begin{array}{ll} Si\ x\in(-\infty,0) \Rightarrow & f'(x)<0 \\ Si\ x\in(0,+\infty) \Rightarrow & f'(x)>0 \end{array}\right\}, \therefore$ en $x=0$ hay un mínimo que es $f(0)=0$.

2) Sea $h(x)=x^3$. Determinar valores extremos, si es que existen.

**Solución:**

$\left.\begin{array}{ll} h'(x)=3x^2 \Rightarrow & h'(0)=0 \\ h''(x)=6x \Rightarrow & h''(0)=0 \end{array}\right\}$ nada puede decirse, utilizando el criterio de la segunda derivada.

En cambio, aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene:

$\left.\begin{array}{ll} Si\ x\in(-\infty,0) \Rightarrow & h'(x)>0 \\ Si\ x\in(0,+\infty) \Rightarrow & h'(x)>0 \end{array}\right\} \therefore$ no hay valores extremos.

3) Sea $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$. Hallar máximos y/o mínimos absolutos y relativos en $[-2,2]$.

**Solución:**

$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + x - 2) = 0$

$\Rightarrow 4x(x+2)(x-1) = 0$, puntos críticos $x = 0$ ; $x = -2$ ; $x = 1$.

Aplicando el criterio de la segunda derivada, se tiene:

$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$

$f''(-2) = 24 > 0, \therefore$ en $x = -2$ hay un mínimo que vale $f(-2) = -\frac{32}{3}$

$f''(0) = -8 < 0, \therefore$ en $x = 0$ hay un máximo que vale $f(0) = 0$

$f''(1) = 12 > 0, \therefore$ en $x = 1$ hay un mínimo que vale $f(1) = -\frac{5}{3}$

Además $f(2) = \frac{32}{3}$.

$\therefore$ valor máximo absoluto $= f(2) = \frac{32}{3}$

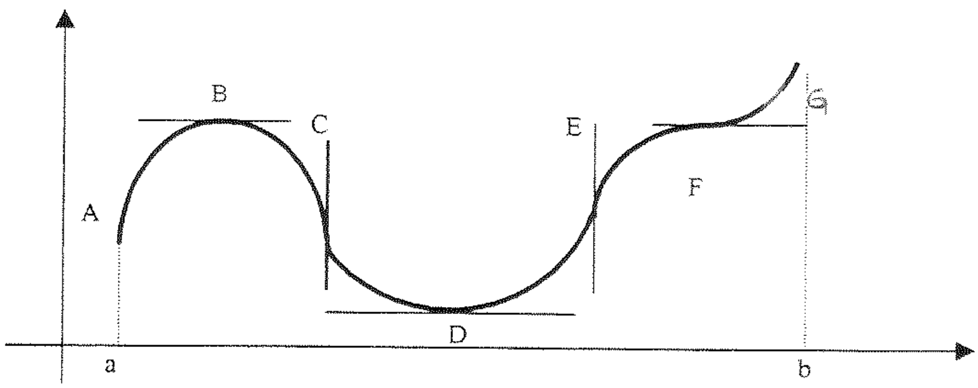
valor mínimo absoluto $= f(-2) = -\frac{32}{3}$

valor máximo relativo $= f(0) = 0$

valor mínimo relativo $= f(1) = -\frac{5}{3}$.

## CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

Sea $f : [a,b] \to IR$ continua, tal que $f'$ y $f''$ existen en $(a,b)$.



Si un punto se mueve sobre la curva desde A hasta G, entonces:

a) Desde A hasta B, la pendiente de la tangente es positiva, luego $f$ es creciente, la gráfica permanece bajo la tangente.

b) En B, la pendiente de la tangente es cero.

c) Desde B hasta C, la pendiente de la tangente es negativa, luego $f$ es decreciente, la gráfica permanece bajo la tangente.

d) Desde A hasta C, se dice que la gráfica es cóncava hacia abajo.

e) Desde C hasta D, la pendiente de la tangente es negativa, luego $f$ es decreciente, la gráfica permanente sobre la tangente.

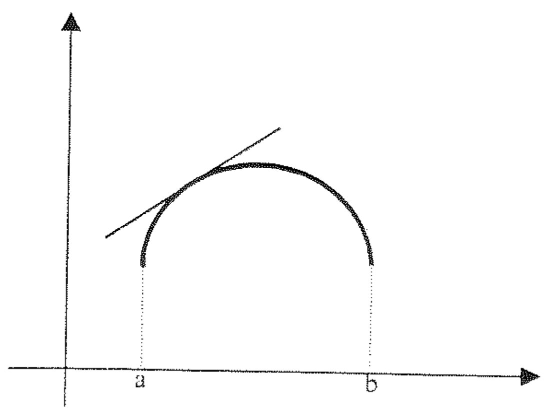
f) En D, la pendiente es cero.

g) Desde D hasta E, la pendiente de la tangente es positiva, luego $f$ es creciente, la gráfica permanece sobre la tangente.

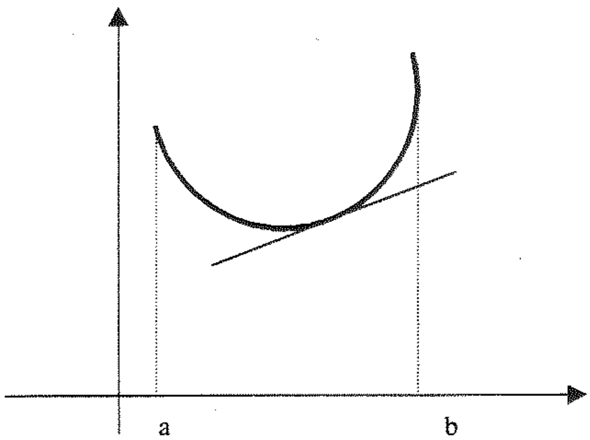
h) Desde C hasta E, se dice que la gráfica es cóncava hacia arriba.

i) En el punto C la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Luego C se llama Punto de inflexión.

**DEFINICION:** Se dice que la curva es cóncava hacia abajo en $(a,b)$, si todos los puntos de la curva están debajo de cualquier tangente a la curva en el intervalo.



**DEFINICIÓN:** Se dice que la curva es cóncava hacia arriba en $(a,b)$, si todos los puntos de la curva están arriba de cualquier tangente a la curva en el intervalo.




**DEFINICIÓN:** Los puntos en los cuales la curva cambia su concavidad, se llaman puntos de inflexión.

**TEOREMA:** Sea $f:[a,b]\rightarrow IR$ continua, tal que $f'$ y $f''$ existen en $(a,b)$ que contiene a "c" entonces:

1) Si $f''(c) > 0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba.
2) Si $f''(c) < 0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo.

**DEFINICIÓN:** Se dice que la función derivable $f$ tiene un punto de inflexión en c , si y sólo si existen dos intervalos $[a, c]$ y $[c ,b]$ tales que $f$ sea cóncava hacia abajo en uno de ellos y cóncava hacia arriba en el otro.

**TEOREMA:** Si $(c, f(c))$ es punto de inflexión $\Rightarrow f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe.

Por lo tanto, en todos aquellos puntos donde $f''$ se anula o no existe, pueden existir puntos de inflexión.

**OBSERVACIÓN:** El recíproco de este teorema no es cierto, es decir $f''(c)=0$ o $f''(c)$ $\nexists$ no implica necesariamente que en $(c, f(c))$ haya un punto de inflexión.

**EJEMPLOS:**

1.- Sea $f(x)=x^4$. Determinar, si existen, puntos de inflexión.

**Solución:**

$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2=0$ ; $x=0$ posible punto de inflexión, pero $x<0 \Rightarrow f''(x)>0$ y $x>0 \Rightarrow f''(x)>0$ $\therefore$ en $x=0$ no hay punto de inflexión.

2.- Analizar y graficar determinando intersecciones con los ejes, máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

A) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-9}}$, $dom\, f=(9,+\infty)$.

**Solución:**

a) Intersecciones con los ejes:

Si $x=0 \Rightarrow$ y $\notin IR$

Si $y=0 \Rightarrow x=0 \notin (9,+\infty)$

$\therefore$ no hay intersecciones

b) $$y'=\frac{\sqrt{x-9}-\dfrac{x}{2\sqrt{x-9}}}{x-9}=\frac{2(x-9)-x}{2(x-9)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-18}{2\sqrt{(x-9)^3}}$$

$y'=0 \Rightarrow x=18$, $y' \nexists \Rightarrow x=9 \notin (9,+\infty)$

$\therefore$ punto crítico : $x=18$

$$y''=\frac{2(x-9)^{\frac{3}{2}}-(x-18)\bullet 3(x-9)^{\frac{1}{2}}}{4(x-9)^3}=\frac{(x-9)^{\frac{1}{2}}\left(2(x-9)-3(x-18)\right)}{4(x-9)^3}=$$

$$= \frac{-x+36}{4(x-9)^{\frac{5}{2}}}$$

Posible punto de inflexión $x = 36$.

c) Intervalos de monotonía y concavidad: $(9{,}18)$; $(18{,}36)$; $(36, +\infty)$

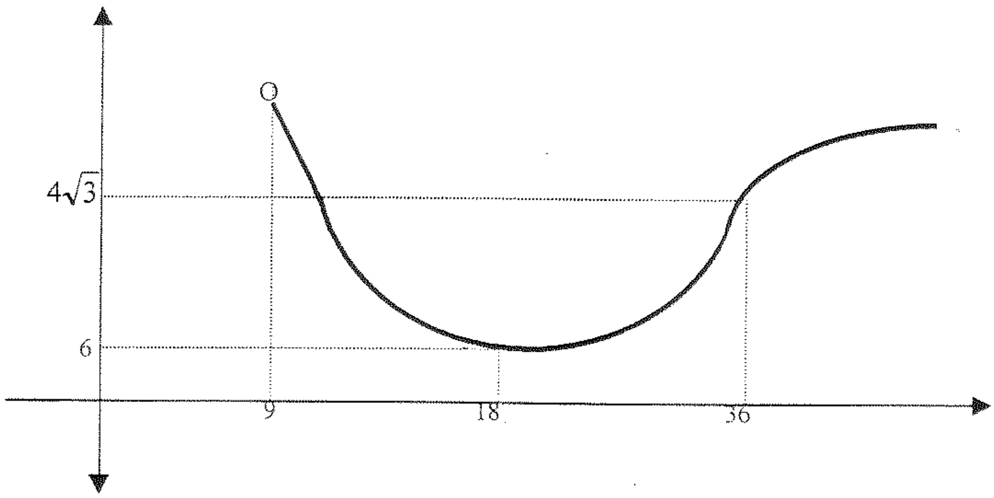
Si $9 < x < 18 \Rightarrow f'(x) < 0$ ; $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba en $(9{,}18)$.

Si $18 < x < 36 \Rightarrow f'(x) > 0$ ; $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente y cóncava hacia arriba en $(18{,}36)$.

$\therefore$ en $x = 18$ hay un mínimo y es $f(18) = 6$

Si $x > 36 \Rightarrow f'(x) > 0$ ; $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es creciente y cóncava hacia abajo en $(36{,}+\infty)$

$\therefore$ en $x = 36$ hay un punto de inflexión que es $(36, 4\sqrt{3})$.




B) $y = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$.

**Solución:**

a) Intersecciones con los ejes:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Si $y = 0 \Rightarrow 5x^{2/3} - x^{5/3} = 0 \Rightarrow x^{2/3}(5 - x) = 0 \Rightarrow x = 0\,, x = 5$

Intersecciones: $(0,0)$ y $(5,0)$.

b) $$y' = \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\left(\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{2-x}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$y' = 0$ en $x = 2$, $y' \nexists$ en $x = 0$

$$y'' = -\frac{10}{9}x^{-4/3} - \frac{10}{9}x^{-1/3} = -\frac{10}{9}\left(\frac{1}{x^{4/3}} + \frac{1}{x^{1/3}}\right) = -\frac{10}{9}\quad\frac{1+x}{x^{4/3}}$$

Posibles puntos de inflexión $x = -1$ y $x = 0$.

c) Intervalos de monotonía y concavidad:

$(-\infty,-1)$; $(-1\,,0)$; $(0,2)$; $(2,+\infty)$.

Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0\,;\, f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)$.

Si $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0\,;\, f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $(-1\,,0)$.

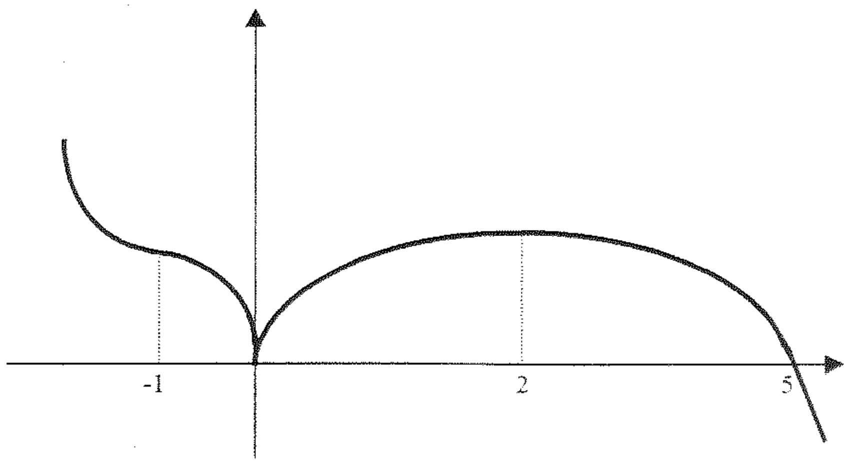
$\therefore\ x = -1$ hay un punto de inflexión que es $(-1,6)$.

Si $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) > 0\,;\, f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es creciente y cóncava hacia abajo en $(0,2)$.

$\therefore\ x = 0$ hay un mínimo y el valor mínimo es $f(0) = 0$.

Si $x > 2 \Rightarrow f'(x) < 0\,;\, f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $(2,+\infty)$.

$\therefore\ x = 2$ hay un máximo y el valor máximo es $f(2) = 3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}8$.




3.- Analizar y graficar determinando intersecciones con los ejes, simetría, asíntotas, valores extremos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad.

A) $y = x^4 - 8x^2$.

**Solución:**

a) Intersecciones

Si $x = 0$, $y = 0$.

Si $y = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ intersecciones con los ejes son $(0,0)$, $(2\sqrt{2}\ ,0)$ y $(-2\sqrt{2}\ ,0)$.

b) La curva es simétrica con respecto al eje y, ya que ella es par.

c) Asíntotas no hay, por ser función polinómica.

d) $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$.

Posible máximos y mínimos $x = 0$, $x = \pm 2$.

$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4)$

Posibles puntos de inflexión $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1{,}2$.

e) Intervalos de monotonía y concavidad:

$$(-\infty,-2);\left(-2,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},0\right),\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{3}},2\right),(2,+\infty).$$

Como es una función par, sólo se analizarán los intervalos a la derecha del eje y.

Si $0<x<\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow f'(x)<0\,;\, f''(x)<0 \Rightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

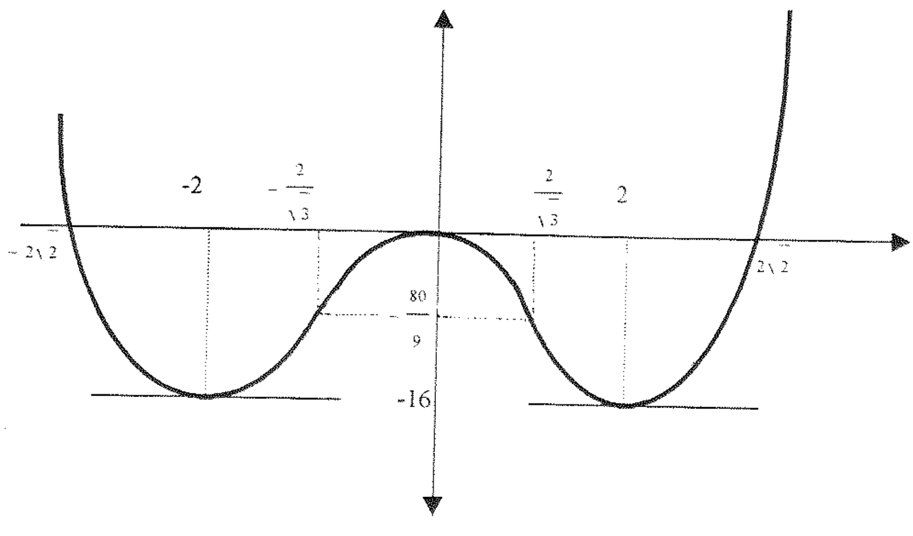
Si $\frac{2}{\sqrt{3}}<x<2 \Rightarrow f'(x)<0\,;\, f''(x)>0 \Rightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},2\right)$.

$\therefore$ hay un punto de inflexión que es $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{80}{9}\right)$.

Si $x>2 \Rightarrow f'(x)>0\,;\, f''(x)>0 \Rightarrow f$ es creciente y cóncava hacia arriba en $(2,+\infty)$.

$\therefore$ en $x=2$ hay un mínimo y es $f(2)=-16$

Considerando que es una función par, el gráfico es:



de donde se concluye que en $x = 0$ hay un máximo que es $f(0) = 0$.

B) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x+1+\dfrac{1}{x+1}, & si\ x < -1 \\ f_2(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & si\ x > -1 \end{cases}$

**Solución:**

a) Intersecciones:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Si $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = 0 \Rightarrow x \notin \mathrm{IR}$

$\therefore$ $(0,0)$ única intersección.

b) Simetría:

i) Sea $f_1(x) = x+1+\dfrac{1}{x+1}$, pero $f_1(-x) \neq f_1(x) \Rightarrow f_1$ no es par.

Sea $f_2(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$, siendo $f_2(-x) = f_2(x)\ \forall\ x \in \mathrm{IR}$ ,

pero $f_2(-x) \neq f_2(x)$ ,$\forall\ x > 1 \Rightarrow f_2$ no es par $\forall x > -1$

$\therefore f$ no es simétrica con respecto al eje y .

ii) Sea $f_1(x) = x+1+\dfrac{1}{x+1}$, pero $f_1(-x) \neq -f_1(x) \Rightarrow f_1$ no es impar.

Sea $f_2(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ , pero $f_2(-x) \neq f_2(x) \Rightarrow f_2$ no es impar.

c) Asíntotas:

i) $$\lim_{x\to -1^-}\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x+2}{x+1} = -\infty$$

$\therefore x = -1$ es asíntota vertical.

ii) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1+\frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2x+2}{x^2+x} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x+1+\frac{1}{x+1}-x\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x+2}{x+1} = 1 = b$$

$\therefore$ $y = x+1$ es asíntota oblicua.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x(x^2+1)} = 0 = m$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2+1} - 0\right) = 2 = b$$

$\therefore\ y = 2$ es la asíntota horizontal.

d) $f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}, & si\ x < -1 \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & si\ x > -1 \end{cases}$

$f_1'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 0$. Pero $x = 0 \notin (-\infty,-1)$

$f_2'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-1,+\infty)$

Puntos críticos : $x = 0$ , $x = -2$ .

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3}, & si\ x < -1 \\ \dfrac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}, & si\ x > -1 \end{cases}$$

$f_1''(x) = 0 \Rightarrow x \nexists$

$f_2''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in (-1\ ,+\infty)$

$\therefore$ posibles puntos de inflexión en $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ .

e) Intervalos de monotonía y concavidad:

$$(-\infty,-2),\ (-2,-1),\ \left(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,0\right),\ \left(0\ ,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right).$$

| | $-\infty$ | -2 | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | - | - | - | + | + | |
| $f''(x)$ | - | - | - | + | + | - | |

Luego:

1. En $(-\infty,-2)$ $f$ es creciente y cóncava hacia abajo.
2. En $(-2,-1)$ $f$ es decreciente y cóncava hacia abajo.

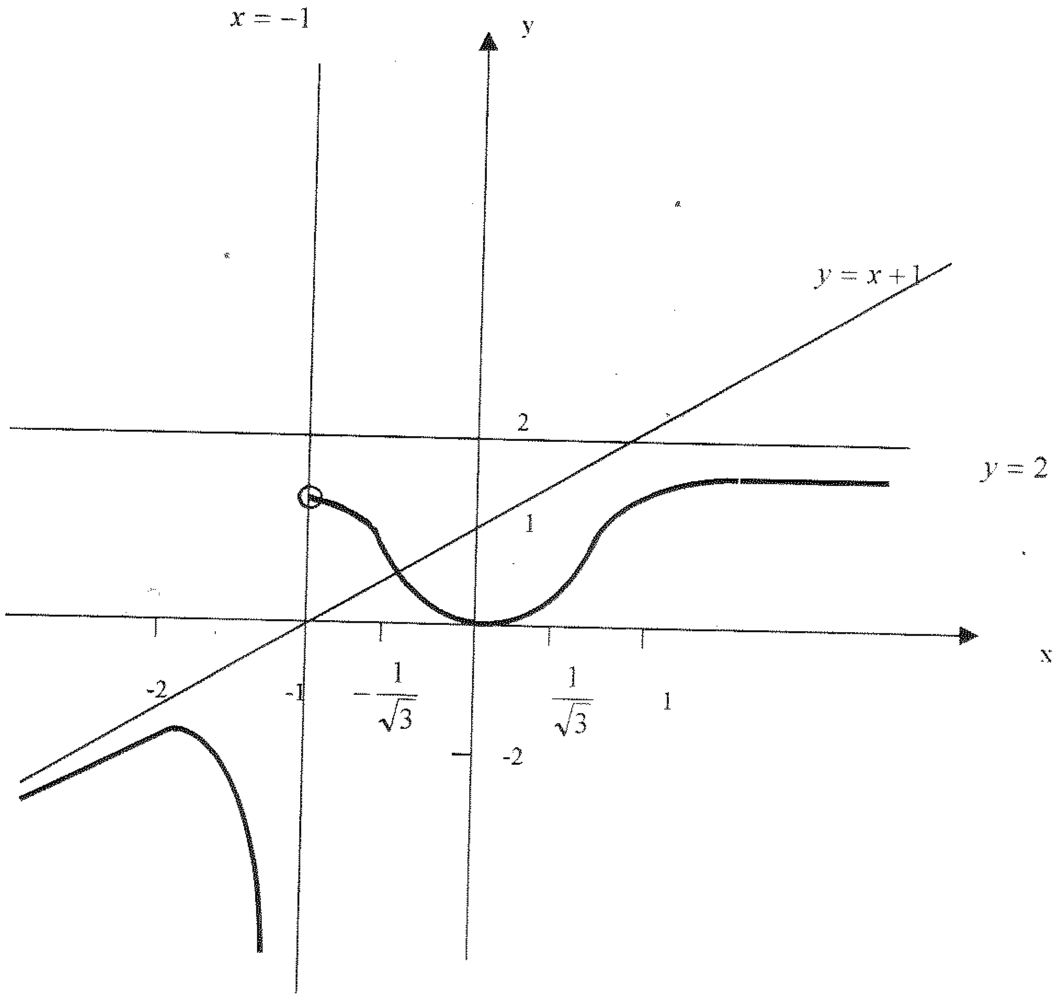
   $\therefore$ en $x=-2$ hay un máximo que vale $f(-2)=-2$.
3. En $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $f$ es decreciente y cóncava hacia abajo.
4. En $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ $f$ es decreciente y cóncava hacia arriba.

   $\therefore$ en $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay un punto de inflexión que es $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)$.
5. En $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $f$ es creciente y cóncava hacia arriba.

   $\therefore$ en $x=0$ hay un mínimo que vale $f(0)=0$.
6. En $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ $f$ es creciente y cóncava hacia abajo.

   $\therefore$ en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay un punto de inflexión que es $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)$.

f) gráfico.




**EJERCICIOS:**

Analizar y graficar, determinando intersecciones con los ejes, simetría, asíntotas, valores extremos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad.

1. $f(x) = x\ \sqrt[3]{x-4}$

2. $f(x) = \dfrac{x(x-5)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{4}}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

5. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

6. $f(x) = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

7. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

8. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determinar $a, b, c$ y $d$ para que $f$ tenga un extremo relativo en $(0,3)$ y un punto de inflexión en $(1,-1)$.

Resp.: $a = 2$ , $b = -6$, $c = 0$, $d = 3$.

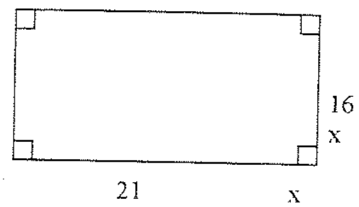
**Problemas de aplicación de máximos y mínimos.**

Una de las aplicaciones importantes del Cálculo es obtener el diseño óptimo de un producto. Por ejemplo, el problema de minimizar costos o maximizar el volumen de un objeto, se reduce a determinar mínimos o máximos de funciones, en cuyo caso se utilizan los criterios de la primera o segunda derivada. La única diferencia con lo tratado anteriormente es cómo traducir un problema al lenguaje de funciones.

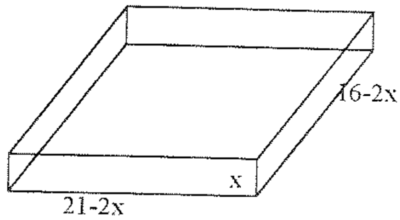
**EJEMPLOS:**

1. Una lámina de 16 cm. de ancho por 21 cm. de largo va a utilizarse para hacer una caja rectangular abierta, cortando un cuadrado de cada esquina de la lámina y doblando los lados hacia arriba. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados para producir una caja de volumen máximo?

**Solución:**




para obtener




Se sabe que $V_{caja} = (21-2x)(16-2x)x = 336x - 74x^2 + 4x^3$.

Luego la función a maximizar es $V$, es decir, $V = V(x)$

$\therefore\ V'(x) = 336 - 148x + 12x^2$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 37x + 84 = 0 \Rightarrow (3x-28)(x-3) = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{28}{3}$, $x = 3$ (puntos críticos)

$V''(x) = -148 + 24x$

según criterio segunda derivada se tiene:

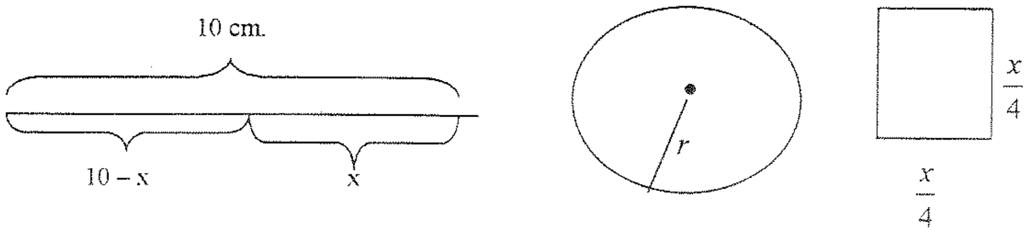
$V''\left(\dfrac{28}{3}\right) > 0 \Rightarrow$ que en $x = \dfrac{28}{3}$ hay un mínimo.

$V''(3) < 0 \Rightarrow$ que en $x = 3$ hay un máximo.

$\therefore$ el cuadrado cortado debe medir 3 cm. por lado.

2. Un trozo de alambre de 10 cm. de largo se corta en dos partes. Con una parte se forma una circunferencia y con la otra un cuadrado. Determinar el radio de la circunferencia y el lado del cuadrado, de tal manera que la suma de sus áreas sea mínima.

**Solución:**




$$\text{Perímetro}_{\odot} = 2\pi r = 10 - x \Rightarrow r = \frac{10-x}{2\pi}$$

$$A = A_1 + A_2 = \pi r^2 + \frac{x^2}{16} = \pi\frac{(10-x)^2}{4\pi^2} + \frac{x^2}{16} = \frac{(10-x)^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16}$$

$\therefore$ la función a minimizar es $A = A(x)$

$$A'(x) = \frac{-2}{4\pi}(10-x) + \frac{x}{8} = \frac{-40+4x+\pi x}{8\pi} = 0$$

$$\Rightarrow x\,(4+\pi) = 40 \Rightarrow \quad x = \frac{40}{4+\pi}\,.$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada, se tiene:

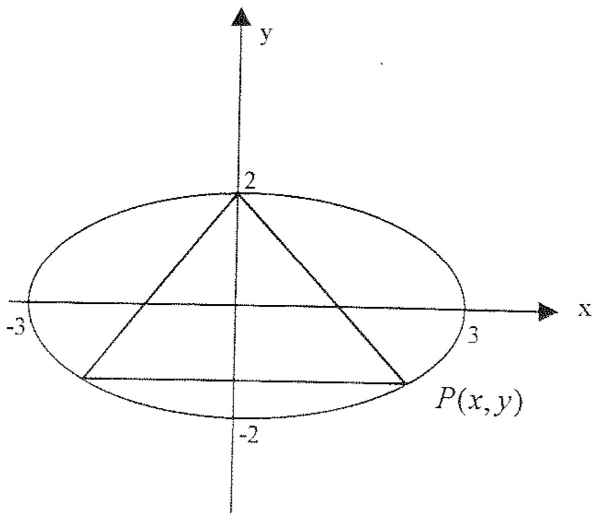
$A''(x) = \dfrac{4+\pi}{8\pi} > 0 \qquad \therefore$ en $x = \dfrac{40}{4+\pi}$ hay un mínimo

$\therefore \quad r = \dfrac{10 - \dfrac{40}{4+\pi}}{2\pi} = \dfrac{40 + 10\pi - 40}{2\pi(4+\pi)} = \dfrac{5}{4+\pi}$ (radio de la circunferencia)

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{\dfrac{40}{4+\pi}}{4} = \dfrac{10}{4+\pi}$ (lado del cuadrado).

3. En la curva $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$ se inscribe un triángulo isósceles cuyo vértice es $(0,2)$. Hallar la ecuación de la base correspondiente al triángulo de área máxima.

**Solución:**




$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow 4x^2+9y^2=36 \Rightarrow$$

$$x=\pm\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$$

$$A_{\Delta}=\frac{2x\bullet(2-y)}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\,(2-y)$$

$\therefore$ la función a maximizar es $A=A(y)$

$$A'(y)=\frac{3}{2}\left[-\sqrt{4-y^2}+(2-y)\frac{-2y}{2\sqrt{4-y^2}}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{-4+y^2-2y+y^2}{\sqrt{4-y^2}}\right]=\frac{3}{2}\quad\frac{2y^2-2y-4}{\sqrt{4-y^2}}=\frac{3(y^2-y-2)}{\sqrt{4-y^2}}.$$

$A'(y)=0 \Rightarrow y^2-y-2=(y-2)(y+1)=0 \Rightarrow y=2$, $y=-1$ (puntos críticos).

En este problema se analiza sólo $y=-1$ ya que para $y=\pm 2$, $A=0$.

Aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene: $A'(-1{,}5)>0$ y $A'(0)<0$

$\therefore$ para $y=-1$ hay máximo.

$\therefore$ la ecuación de la base del triángulo de área máxima es $y=-1$.

**EJERCICIOS:**

1) Determinar dos números positivos tales que su suma sea igual a 60 y su producto sea el mayor posible. Resp.: 30 y 30

2) Un trapecio isósceles tiene los lados igual a la base menor que mide 10. ¿Cuánto debe medir la base mayor para que su área sea máxima?.

Resp.: 20

3) Se dispone de 100m. de alambre para cerrar tres lados de un terreno rectangular, cuyo cuarto lado está cubierto por un edificio. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno para que el área encerrada sea máxima?

Resp.: 25, 50 y 25

4) Un granjero quiere construir un corral rectangular y dividirlo por una valla paralela a uno de sus lados. Dispone de 240m. de valla. Determinar las dimensiones del corral de área máxima que puede construir. Resp.: 40 y 60

5) Una recta pasa por $M(a,b)$ perteneciente al primer cuadrante y forma con los ejes coordenados un triángulo rectángulo. ¿Cuánto deben medir los catetos para que el área del triángulo sea mínima? Resp.: $2a$ y $2b$.

6) Hallar la mínima distancia del punto (4,2) a la parábola $y^2 = 8x$.

Resp.: $2\sqrt{2}$.

# BIBLIOGRAFIA

1. J. Armando Venero
   Análisis Matemático I
   Ediciones Gemar 1992. Lima Perú

2. N. Piskunov
   Cálculo Diferencial e Integral
   Montaner y Simon, S.A. 1997
   Barcelona

3. Moisés Lazaro Carrión
   Cálculo Diferencial y sus Aplicaciones
   Editorial Moshera 1987
   Lima Perú

4. Sherman K. Syein
   Cálculo y Geometría Analítica
   Editorial Mc Graw Hill 1995
   México

5. Jack R. Britton, R. Ben Kriegh, León W. Rutland
   Matemáticas Universitarias. Tomo I
   Compañía Editorial Continental S.A. 1970
   México – España – Argentina – Chile

6. Material docente de los académicos.