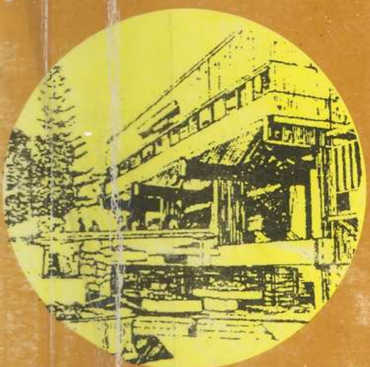
UNIVERSIDAD DE TARAPACA
VICERRECTORIA ACADEMICA
3° CONCURSO DE CREACION INTELECTUAL
AREA DOCENCIA

"TOPICOS DE ALGEBRA SUPERIOR" I PARTE



AUTOR

HUGO BRAVO AZLAM

ARICA - CHILE
2005

UNIVERSIDAD DE TARAPACA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

"TOPICOS DE ALGEBRA SUPERIOR"
I PARTE

PROFESOR: SR. HUGO BRAVO AZLAN

ARICA – CHILE
1999

PREFACIO

Este texto ha sido elaborado pensando en la utilidad que podrá prestarle al alumno que se inicia en el estudio del Algebra Superior.

Por tal motivo, contiene los temas con que típicamente comienzan tales cursos, vale decir, lógica matemática, conjuntos, relaciones, funciones y además, cada tema se ha tratado de presentar de manera tal que el alumno pueda tener fácil acceso a su contenido.

El texto contiene además un total de 111 ejemplos, desarrollados de la manera más didáctica que me ha sido posible y también propone un total de 40 ejercicios abarcando todos los tópicos referidos. Aquí, se ha incluido un capítulo especial de desigualdades e inecuaciones, por cuanto son necesarias para un tratamiento adecuado de las relaciones y las funciones.

Espero que en este texto, los estudiantes encuentren el material que siempre solicitan para complementar sus estudios de álgebra y con ello consigan elevar sus rendimientos en esta primera etapa de vida universitaria.

Con la ayuda de Dios espero poder desarrollar, en un futuro próximo, los tópicos complementarios de un curso de Algebra Superior.

INDICE

CAPITULO I

ELEMENTOS DE LOGICA MATEMATICA

La lógica matemática trata sobre las reglas del razonamiento deductivo y al mismo tiempo nos entrega los elementos básicos para un lenguaje matemático preciso.

En este curso haremos una breve introducción al lenguaje propio de la lógica matemática y sus implicancias en la teoría de inferencia lógica, conocida también como teoría de la demostración o teoría de la deducción.

El objeto básico de estudio de la lógica matemática es la "proposición". Este objeto es considerado primitivo, en el sentido que no admite definición alguna que no sea a través de sinónimos. No obstante, para dejar las ideas claras, entenderemos como "proposición" cualquier afirmación u oración que tiene la cualidad de ser Verdadera o Falsa, pero que no puede ser Verdadera y Falsa a la vez.

En nuestro lenguaje cotidiano tenemos muchos ejemplos de oraciones o frases con esa cualidad, como por ejemplo las siguientes:

"Arica es capital de Chile", es una afirmación FALSA
"Arturo Prat fue presidente de Chile", es una afirmación FALSA
"Una flor es un vegetal", es una afirmación VERDADERA

También hay otras afirmaciones dentro del contexto mismo de la matemática o de otras ciencias, como por ejemplo:

" $2 + 3 = 6$ ", es una afirmación FALSA
"$\pi = 3{,}14$" es una afirmación FALSA
" la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ", es una afirmación VERDADERA
" el sol es el centro de nuestro sistema solar ", es una afirmación VERDADERA

El concepto de VERDADERO (V) o FALSO (F) que lleva asociado una proposición se le llamará Valor de Verdad o Valor Lógico de la proposición.

Así, el Valor de Verdad de la proposición "el año tiene 12 meses" es Verdadero (que se simbolizará simplemente por V) y el valor de verdad de la proposición "$2 + 5 < 0$" es Falsa (o simplemente F).

Cabe destacar que no toda oración es considerada una proposición, como por ejemplo las siguientes:

"¿Qué día es hoy?", no admite el calificativo de Verdadera o Falsa
"Tráeme un café", no admite el calificativo de Verdadera o Falsa
"$x + 1 < 5$", puede ser Verdadera (para $x=2$ por ejemplo)
o puede ser Falsa (para $x=7$ por ejemplo).

Lo importante en toda proposición es que ella admita inequívocamente un sólo valor de verdad (V o F). En ciertos casos, el valor de verdad de una proposición puede sernos desconocido, pero ello no la invalida como proposición. Por ejemplo, la afirmación "En Francia viven más de 5.000 chilenos" no sabemos si es V o F, pero claramente sólo uno de esos calificativos le corresponderá, siendo por lo tanto otro ejemplo de proposición.

EJERCICIO 1 : Se pide al alumno escribir 10 proposiciones con sus respectivos valores de verdad.

Notación: Con el propósito de tratar con diferentes proposiciones y estudiar más tarde las relaciones entre ellas, introduciremos las primeras simbologías. Una proposición será simbolizada por una letra minúscula, generalmente p, q, r, s, etc.

Así, cuando queramos referirnos a 2 proposiciones diferentes, podremos asumir que ellas están representadas por las letras p y q.

EJEMPLO 1: Considere las siguientes 3 proposiciones:

p : "No hay ningún número entero menor que 7"
q : "Los alumnos de Ingeniería Comercial son todos mayores de 100 años"
r : "El número 17 es primo"

Los valores de verdad de p, q y r son respectivamente F,F,V (recuerde que un número natural es primo si es divisible sólo por 1 y por sí mismo, excepto el número 1 que no es primo)

En el ejemplo 1, fueron utilizadas las letras p, q, r para denotar las 3 proposiciones, no obstante las mismas letras podrán representar más tarde a otras proposiciones.

PROPOSICIONES SIMPLES, PROPOSICIONES COMPUESTAS Y CONECTIVOS LÓGICOS.

Nuestro lenguaje cotidiano se compone de frases u oraciones más complejas que una proposición, como por ejemplo, "la matemática es una ciencia básica o es una ciencia aplicada, pero no es ciencia social".

La primera pregunta que nos surge es si la frase anterior es o no una proposición. ¿Tiene acaso un valor de verdad?. En principio no lo sabemos y la dificultad radica en que la oración anterior se compone de otras oraciones más simples, a saber:

p : "la matemática es una ciencia básica", oración Verdadera
q : "la matemática es una ciencia aplicada", oración Verdadera
r : "la matemática no es ciencia social", oración Verdadera

(En las oraciones q y r se agregó el sujeto "la matemática" para darle sentido a cada una por separado).

La fundamentación de porqué las 3 oraciones anteriores son verdaderas, radica en que la matemática es una ciencia que puede desarrollarse independientemente de otras ciencias, se aplica en muchas áreas del saber y no tiene relación con el hombre como ente social.

Nuestra primera conclusión es que las oraciones p, q y r anteriores son proposiciones y que no se componen de otras más sencillas, razón por la cual se pudo determinar directamente el valor de verdad de cada una.

En consecuencia, la que antes se llamó Proposición , puede ser también llamada Proposición Simple o Proposición Atómica, para destacar el hecho que no contiene en sí misma a otras proposiciones. ¿Será que utilizando proposiciones simples podemos construir otras más complejas? La respuesta es afirmativa, pero para ello se requerirá de otros elementos, llamados CONECTIVOS LOGICOS, cuyo propósito es precisamente permitir la conexión entre proposiciones simples para formar proposiciones más complejas.

El hecho de juntar objetos simples para producir otros más complejos lo hemos visto en reiteradas ocasiones. Por ejemplo, tomando como objetos simples a las "letras del abecedario" podemos generar objetos más complejos como las "palabras", que a su vez nos permiten formas "frases". Otro ejemplo lo vimos en la educación media, cuando estudiamos como objetos simples a los "conjuntos" que al combinarlos mediante operaciones como unión o intersección, se producen nuevos conjuntos más complejos. También podrían considerarse como objetos simples a los seres humanos, que de relacionarse entre sí forman "familias" de seres humanos o "sociedad de personas".

Así, nuestra oración "la matemática es una ciencia básica o es una ciencia aplicada, pero no es ciencia social", se compone de las 3 proposiciones p, q y r ya mencionadas y de los conectivos "o" y "pero".

Una oración compuesta por proposiciones simples y conectivos lógicos será una PROPOSICION COMPUESTA . Surgen las siguientes interrogantes: ¿cuáles son los conectivos lógicos que se pueden utilizar?, ¿cómo determinar el valor de verdad de una proposición compuesta si conocemos las proposiciones simples que la componen y los conectivos lógicos que se han utilizado?

"Un maestro carpintero usa objetos básicos como madera y clavos, además de algunos pegamentos, para producir objetos más complejos como muebles ¿cómo determinar el costo de un mueble si se conocen los costos de los materiales básicos y los pegamentos utilizados?"

Antes de presentar los conectivos lógicos que utilizaremos en este texto, vamos a referirnos a una proposición especial generada a partir de una proposición dada. Se trata de la NEGACION de una proposición.

Consideremos la proposición p: "Arica es la capital de Chile", cuyo valor de verdad es F. Al negar la oración anterior resulta "Arica no es la capital de Chile", que por tener valor de verdad (Verdadero en este caso) , resultó ser una nueva proposición. Tenemos varias formas de simbolizar a la negación de p, siendo las más comunes: $\overline{p}$ o bien $\sim p$. Además, no es casualidad que siendo p Falsa, resulte su negación Verdadera. También si p es Verdadera, su negación ha de ser Falsa.

¿Cómo podrían ser Verdaderas las 2 oraciones "Mañana es Lunes" y "Mañana no es Lunes"? ¿Podrán las 2 ser Falsas? Resulta "lógico" que mientras una es verdad, la otra (su negación) deberá ser Falsa.

En consecuencia, cuando p representa una proposición cualquiera, $\overline{p}$ representará otra proposición que es la <u>NEGACION</u> de p. Además, cuando p es Verdadera, $\overline{p}$ será Falsa y también, cuando p es Falsa, $\overline{p}$ será Verdadera. El hecho que p y $\overline{p}$ tengan valores de verdad contrarios, será resumido en la siguiente <u>tabla de verdad</u>:

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

<u>Tabla 1</u>

En la primera columna aparece p y más abajo sus 2 posibles valores de verdad (dependiendo la proposición que representa p, a veces puede ser **V** y otras veces puede ser **F**). En la segunda columna, aparece la negación $\overline{p}$ y debajo los valores de verdad contrarios a los de p.

<u>EJEMPLO 2:</u> Sean p: "En Chile no hay desiertos"
y q: "Chile y Perú son países limítrofes"

Se sabe que el valor de verdad de **p** es F y el de **q** es V. Las negaciones de **p** y de **q** son:

$\overline{p}$: "En Chile hay desiertos"
$\overline{q}$: "Chile y Perú no son países limítrofes",

cuyos valores de verdad son respectivamente, V y F.
¿Qué sucederá ahora si negamos la proposición $\overline{p}$?
La negación de $\overline{p}$ será $\overline{\overline{p}}$: "En Chile no hay desiertos", es decir volvemos a obtener p. Más adelante destacaremos este hecho como una "propiedad" de la negación.

<u>EJERCICIO 2:</u> Escriba las negaciones de las 10 proposiciones del ejercicio 1 y determine el valor de verdad de cada una.

<u>CONECTIVOS LOGICOS</u>

Ahora estamos en condiciones de presentar los **conectivos lógicos** que estudiaremos, recordando que nuestro objetivo es aprender a "conectar" o "enlazar" proposiciones para formar otras más complejas.

Los **conectivos lógicos** (o simplemente **conectivos**) que estudiaremos son 4, a saber, la <u>disyunción</u>, la <u>conjunción</u>, la <u>implicación</u> y la <u>equivalencia</u>.

La definición de cada uno de ellos, se hace sobre la base de tener 2 proposiciones (simples) que denotaremos por **p** y **q**. Como cada una de estas proposiciones puede ser **V** o **F**, dependiendo de la oración que se trate y tendremos 4 posibles maneras de combinar los valores de verdad de estas 2 proposiciones, a saber, **p** y **q** ambas Verdaderas, **p** Verdadera y q Falsa, **p** Falsa y **q** Verdadera, **p** y **q** ambas Falsas. Es común que estas 4 "combinaciones" se presentan en una sola tabla de verdad, la que presentamos a continuación:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Observe bien que la primera fila de la tabla contiene a las proposiciones p y q e inmediatamente después aparecen las filas conteniendo las 4 posibilidades de V o F que pueden asumir estas 2 proposiciones. El **orden** en que se han puesto estas 4 combinaciones (primero V/V, luego V/F, etc.) no es obligatorio, pero es conveniente respetarlo para uniformizar nuestro trabajo y evitar el riesgo que se nos olvide y/o se repita una de las 4 combinaciones.

(I) LA DISYUNCION

La **disyunción** de 2 proposiciones **p** y **q** es otra proposición, que simbolizamos como **p** $\vee$ **q** (leemos **p o q**) y cuyo valor de verdad se define como Falso sólo en el caso en que ambas **p** y **q** sean Falsas, (o sea que es Verdadero en los otros 3 casos). La siguiente tabla de verdad resume los valores de verdad de **p, q** y de la disyunción **p** $\vee$ **q.**

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2

Note Ud. que conociendo el valor de verdad de **p** y el valor de verdad de **q**, la tabla 2 le indica el valor de verdad de la proposición compuesta **p** $\vee$ **q** (la tabla tiene 5 filas, reservándose la primera para las notaciones de las proposiciones básicas y las proposiciones compuestas, como la disyunción en este caso).

Para un manejo correcto de la **disyunción**, es absolutamente necesario que usted comprenda bien la tabla anterior.

Ella se presenta como un "modelo" en que usamos las proposiciones **p** y **q** para conocer el valor de **p** $\vee$ **q**. Nos dice que la disyunción **p** $\vee$ **q** es Falsa sólo en el caso que **p** es Falsa y **q** es Falsa.
¿Qué sucede si las proposiciones básicas son **p** y **s**?

En este caso, la disyunción **p** $\vee$ **s** será Falsa sólo cuando **p** sea Falsa y también **s** sea Falsa.

En consecuencia, no importa cómo se denoten las 2 proposiciones básicas, su disyunción será Falsa sólo cuando ambas son Falsas.

<u>OBSERVACIÓN:</u> En este texto usaremos repetidamente el término "modelo", como una forma de representar alguna situación general que se pueda aplicar en variados casos.
Por ejemplo, un "modelo" de ecuación de segundo grado es $ax^2+bx+c=0$, cuya solución está dada por $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Este modelo se aplica en las ecuaciones $2x^2+3x-4=0$, $-x^2+5x+6=0$ u otras "del mismo tipo", basta con asignar números específicos a los coeficientes **a,b,c** del modelo.

Otro ejemplo de "modelo" es la conocida fórmula $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, que se presenta con letras a y b, pero que admite ser aplicado a una infinidad de casos como $(2x+\sqrt{y})^2=4x^2+4x\sqrt{y}+y$.

<u>EJEMPLO 3</u>: Considere las siguientes 3 proposiciones.

p : "El cuadrado de todo número entero es par"
q : "rectas paralelas no se cruzan"
r : "la economía es un área de conocimiento de un Ingeniero Comercial"

Sus valores de verdad son respectivamente F,V,V. Construyamos ahora algunas disyunciones basadas en **p,q,r.**

- $p \vee q$: "El cuadrado de todo número entero es par o rectas paralelas no se cruzan".
  El valor de verdad se obtiene de la tabla 2, fila 4, es decir **p**:F, **q**:V,
  Resultado $p \vee q$: V

- $q \vee r$: "rectas paralelas no se cruzan o la economía es un área de conocimiento de un Ingeniero Comercial".

  Aquí aplicamos la idea del modelo dado en la tabla 2, puesto que las Proposiciones son ahora **q** y **r**. Como sus valores de verdad son V y V **(no son ambos Falsos) entonces** q $\vee$ r **es también Verdadero.**
- $\bar{q} \vee$ p: "rectas paralelas se cruzan o el cuadrado de todo número entero es par"

  El valor de verdad de $\bar{q}$ es F (ya que el de **q** es V) y el valor de verdad de **p** es F. Como los valores de verdad de $\bar{q}$ y de p son ambos F, se deduce que el valor de verdad de $\bar{q} \vee p$ es F.

- $\overline{p \vee r}$: "No es verdad que el cuadrado de todo número entero es par o la economía es un área de conocimiento de un Ingeniero Comercial".

Primeramente observamos que para negar la proposición compuesta $p \vee r$, se antepuso "no es verdad que", para darle mayor sentido a la oración compuesta. Si hubiésemos antepuesto sólo "no" habría quedado la oración "no el cuadrado de todo...". ¿Le sonaría bien así? Concluímos que la negación de una oración, agrega la palabra "no" u otra expresión equivalente como "no es cierto que" o bien "no es verdad que", etc.

Intentemos ahora obtener el valor de verdad de la proposición compuesta $\overline{p \vee r}$. Primeramente es necesario que veamos cómo se formó tal proposición: comenzamos por las proposiciones básicas **p** y **r** cuyos valores de valores de verdad con F y V respectivamente. Enseguida se formó la disyunción **p** $\vee$ **r** cuyo valor de verdad será V (sería F sólo si ambas p y r fuesen F, pero no es ése el caso). Finalmente, la negación de **p** $\vee$ **r** es lo que se simboliza por $\overline{p \vee r}$ y su valor de verdad será F (contrario al valor de verdad de $p \vee r$).

<u>OBSERVACIÓN:</u> Este último ejemplo nos muestra que al formar proposiciones compuestas, se debe seguir un cierto orden en las conexiones que se realizan. Así por ejemplo, una expresión lógica (o proposición compuesta) de la forma $(\overline{p \vee q}) \vee r$ se ha confeccionado de la siguiente manera: las proposiciones básicas son **p,q,r.** Primeramente se tiene la disyunción entre **p** y **q**, es decir $p \vee q$. Enseguida aparece la negación de ella, o sea, $\overline{p \vee q}$. Finalmente se trata de la disyunción de $\overline{p \vee q}$ con r, es decir, $(\overline{p \vee q}) \vee r$. El uso de <u>paréntesis</u> nos sirve de guía para comprender o determinar el orden como las proposiciones se van conectando hasta formar la expresión lógica final.

Siendo así, no deberíamos confundir la expresión $(\overline{p \vee q}) \vee r$ con la expresión $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r$. En la segunda, se han negado separadamente las proposiciones básicas **p** y **q** , para obtenerse $\bar{p}$ y $\bar{q}$. Luego se hizo una disyunción entre estas negaciones para obtener $\bar{p} \vee \bar{q}$ y finalmente se hizo la disyunción de $\bar{p} \vee \bar{q}$ con r para obtener $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r$.

Aprender a distinguir y respetar el orden de cómo las cosas se forman, es crucial. No es lo mismo decir "el <u>hijo</u> del <u>hermano</u> de mi <u>madre</u>" que decir "el <u>hermano</u> de la <u>madre</u> de mi <u>hijo</u>".

<u>**EJERCICIO 3:**</u> Considere las 3 proposiciones del ejemplo 3. Se pide:

a) Escriba las proposiciones compuestas:

$$\bar{p} \vee \bar{r}; \quad p \vee (\bar{q} \vee r); \quad (\overline{p \vee r}) \vee \bar{q}$$

b) Describa en qué orden éstas se han formado.

c) Determine el valor de verdad de cada una de ellas.

<u>**EJEMPLO 4:**</u> Suponga que se tienen 3 proposiciones **p, q, r** cuyos valores de verdad son V, F, F respectivamente (ahora no nos interesan las oraciones que ellos representan sino sólo sus valores de verdad). Se pide determinar el valor de verdad de la proposición compuesta: $\overline{\bar{p} \vee q \vee \bar{r}}$.

Para resolver este problema, primeramente debemos tener muy claro el orden establecido en la fabricación de esta expresión lógica. Tenemos consecutivamente los siguientes pasos con sus valores de verdad correspondientes, según tablas 1 y 2.

1. $\overline{p} \longrightarrow F$ (negación de p)
2. $\overline{p} \vee q \longrightarrow F$ (disyunción entre F y F)
3. $\overline{r} \longrightarrow V$ (negación de r)
4. $(\overline{p} \vee q) \vee \overline{r} \longrightarrow V$ (disyunción entre F y V)
5. $\overline{\overline{p} \vee q \vee \overline{r}} \longrightarrow$ (negación de paso 4)

Otra forma de presentar este mismo esquema de trabajo es el siguiente:

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{r}$	$(\overline{p} \vee q) \vee \overline{r}$	$\overline{\overline{p} \vee q \vee \overline{r}}$
V	F	F	F	F	V	V	F

donde cada columna indica un paso parcial en la formación de la expresión lógica propuesta.

EJEMPLO 5: Si **p** es una proposición F, q es V y r es F, determinar el valor de verdad de : $(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee \left(\overline{\overline{p} \vee r}\right)$

SOLUCIÓN:

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p} \vee r$	$\overline{\overline{p} \vee r}$	$(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee (\overline{\overline{p} \vee r})$
F	V	F	V	F	V	V	F	V

EJERCICIO 4. Suponga que tiene 3 proposiciones p, q, r cuyos valores de verdad son F,F,V, respectivamente. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $(\overline{p} \vee r) \vee \overline{q}$

b) $(\overline{r} \vee \overline{q}) \vee (r \vee p)$

(II) LA CONJUNCION.

La **conjunción** de 2 proposiciones p, q es otra proposición que simbolizamos como $p \wedge q$ (leemos p y q), cuyo valor de verdad se define como Verdadero sólo en el caso que tanto p como q sean Verdaderas (o sea que es Falsa en los otros 3 casos). La tabla de verdad correspondiente a la conjunción es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3

Entendamos esta tabla como un nuevo "modelo" que nos permite obtener el valor de verdad de la conjunción entre 2 proposiciones.
Es bueno recordar que una conjunción será V sólo en el caso en que las 2 proposiciones que la forman son también V, sin importar cómo se denotan tales proposiciones.

EJEMPLO 6: La conjunción de las proposiciones :

p : "el año tiene 12 meses" (V)
q : "el año tiene 366 días" (F)

es $p \wedge q$: "el año tiene 12 meses y el año tiene 366 días", cuyo valor de verdad es F, puesto que una de las proposiciones (en este caso q) es Falsa.

EJEMPLO7: Suponga que p, q, r son 3 proposiciones con valores de verdad F,V,F respectivamente. Determinar el valor de verdad de la proposición compuesta: $\left(\overline{p} \wedge q\right) \vee \left(\overline{r \wedge p}\right)$.

SOLUCIÓN:

Tal como en el ejemplo 4, construiremos una tabla para indicar los pasos que se siguen hasta conformar la expresión lógica propuesta. Obsérvese también que ahora usaremos las tablas 1,2 y 3, pues la expresión contiene negación, disyunción y conjunción.

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q$	$r \wedge p$	$\overline{r \wedge p}$	$\left(\overline{p} \wedge q\right) \vee \left(\overline{r \wedge p}\right)$
F	V	F	V	V	F	V	V

EJEMPLO 8: Repetir el ejemplo 7, suponiendo ahora que los valores de verdad son V,V,F, respectivamente.

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q$	$r \wedge p$	$\overline{r \wedge p}$	$(\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{r \wedge p})$
V	V	F	F	F	F	V	V

Como podemos ver, la misma expresión lógica $(\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{r \wedge p})$ fue usada en los ejemplos 7 y 8, resultando ser Verdadera para los 2 casos propuestos, vale decir, p Falsa, q Verdadera, r Falsa en el ejemplo 7 y p Verdadera, q Verdadero, r Falsa en el ejemplo 8.

¿Hay otros casos como estos 2? ¿Cuántos son en total?

Ya se estableció que cuando tenemos sólo 2 proposiciones básicas formando una proposición compuesta, hay 4 posibles combinaciones entre sus valores de verdad, a saber, VV,VF,FV y FF.

Ahora imaginemos que son 3 las proposiciones, digamos p,q,r pudiendo ser V o F cada una de ellas, dependiendo las proposiciones que representan.

Ahora tendremos 8 posibles combinaciones de V o F entre las 3 proposiciones, a saber, VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV y FFF. Cuando queremos analizar estas 8 combinaciones al mismo tiempo, se sugiere usar una tabla de valores con la siguiente forma:

p	q	r	expresión lógica
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

En consecuencia, al usar 2 proposiciones tendremos $2^2 = 4$ posibles combinaciones de V o F; al usar 3 proposiciones tendremos $2^3 = 8$ posibles combinaciones de V o F; al usar 4 proposiciones tendremos $2^4 = 16$ posibles combinaciones de V o F y el general, si usamos n proposiciones tendremos 2^n posibles combinaciones de V o F.

Observando la tabla anterior para 3 proposiciones p, q, r podemos darnos cuenta que no es difícil establecer las 8 combinaciones mencionadas: en la primera columna (referida a p) se coloca cuatro V seguidas de cuatro F. En la segunda columna (referida a q) se colocan dos V, luego dos F, luego dos V y finalmente dos F. En la tercera columna (referida a r) se colocan una V, una F, una V, una F, etc.

Siguiendo esta metodología, podemos construir una tabla de las 16 combinaciones V o F para el caso en que tengamos n=4 proposiciones simples.

p	q	r	s	expresión lógica
V	V	V	V	
V	V	V	F	
V	V	F	V	
V	V	F	F	
V	F	V	V	
V	F	V	F	
V	F	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	V	V	F	
F	V	F	V	
F	V	F	F	
F	F	V	V	
F	F	V	F	
F	F	F	V	
F	F	F	F	

<u>EJEMPLO 9:</u> Considere 3 proposiciones p,q,r y la expresión lógica $(\overline{p} \wedge q) \wedge (r \vee \overline{q})$. Analice el valor de verdad de esa proposición compuesta, para <u>cada una</u> de las combinaciones de V y F que se pueden generar.

<u>SOLUCIÓN:</u> Como tenemos 3 proposiciones simples participando en la expresión lógica propuesta, tendremos un total de 8 combinaciones de V y F. Luego, confeccionamos una tabla de verdad con esas 8 combinaciones y agregamos tantas columnas como sea necesario para representar los pasos que se requieren hasta formar la expresión lógica.

La tabla de verdad resultante es la siguiente:

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q$	$\overline{q}$	$r \vee \overline{q}$	$(\overline{p} \wedge q) \vee (r \vee \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V

¿En qué combinación resultó F el valor de verdad de la expresión lógica propuesta? Sólo en una combinación, aquella en que p es V, q es V y r es F (la segunda combinación).

¿Existen expresiones lógicas o proposiciones compuestas que resulten V en todas las combinaciones de V y F?

La respuesta es Si y una tal expresión lógica se le llama **TAUTOLOGIA.**

El ejemplo 9 trata la expresión $(\overline{p} \wedge q) \vee (r \vee \overline{q})$ que no es una Tautología por haber sido F en al menos un caso.

EJEMPLO 10: Verificar que la proposición compuesta $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$ es una Tautología.

SOLUCIÓN: Bastará construir una tabla de verdad con todas las combinaciones (4 en este caso) y observa el valor de verdad de la expresión lógica, en cada una de ellas.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Como efectivamente el valor de verdad de $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$ resultó V en los 4 casos, podemos afirmar que esa expresión lógica es una Tautología.

¿Existen proposiciones compuestas cuyo valor de verdad sea siempre F?

La respuesta es Si, y una tal expresión lógica se llama **CONTRADICCIÓN.**

Observe que en el ejemplo anterior se obtuvo sólo V para la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$, ¿qué pasaría si negamos esa expresión, o sea, qué valores de verdad tendremos para $\overline{(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})}$?. La respuesta es, obviamente, que tendremos sólo F. Luego $\overline{(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})}$ es una contradicción.

EJEMPLO 11: Verificar que la expresión lógica $(\overline{p \vee q}) \wedge (\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}})$ es una contradicción.

SOLUCIÓN:

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$	$(\overline{p \vee q}) \wedge (\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}})$
V	V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F

Como en las 4 combinaciones obtuvimos valor de verdad F para la expresión lógica, ella es una contradicción.

EJEMPLO 12: Determinar si la expresión lógica $\left[p \wedge (\overline{q} \vee r)\right] \vee \overline{p}$ es una Tautología, una contradicción o ninguna de ambas.

SOLUCIÓN:

p	q	r	$\overline{q}$	$\overline{q} \vee r$	$p \wedge (\overline{q} \vee r)$	$\overline{p}$	$\left[p \wedge (\overline{q} \vee r)\right] \vee \overline{p}$
V	V	V	F	V	V	F	V
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Como el valor de verdad obtenido para $\left[p \wedge (\overline{q} \vee r)\right] \vee \overline{p}$ no es sólo V, podemos concluir que no se trata de una Tautología. Tampoco es Contradicción puesto que los valores obtenidos no son sólo F.

Este tipo de expresiones lógicas que no son Tautologías ni tampoco Contradicciones, se les llama CONTINGENCIAS.

EJERCICIO 5.

Si p es una proposición V, q es F y r es F, determine el valor de verdad de:

a) $(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{r}$

b) $(p \vee q) \vee (r \wedge \overline{p})$

c) $\overline{(\overline{p} \vee \overline{q})} \vee \overline{(p \vee q)}$

EJERCICIO 6.

Determine si las siguientes expresiones lógicas son Tautología, Contradicción o Contingencia.

a) $(p \wedge \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q)$

b) $\overline{(\overline{p} \wedge q)} \wedge (p \vee \overline{q})$

c) $\left[p \vee (r \wedge \overline{q})\right] \wedge \overline{(r \vee \overline{p})}$

III.- LA IMPLICACION O CONDICIONAL

Este será nuestro tercer conectivo lógico. Su manejo es más delicado que los dos anteriores por lo que haremos las aclaraciones pertinentes a su definición.

La **implicación** entre dos proposiciones p y q es otra proposición, que simbolizamos como $p \Rightarrow q$ (leemos p implica q) y cuyo valor de verdad es F sólo en el caso que p sea V y q sea F (será V en los otros 3 casos).

La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 4

Aquí observamos una gran diferencia con las tablas 2 y 3 de la disyunción y conjunción respectivamente. Fijémonos en las filas correspondientes a las combinaciones V/F y F/V.

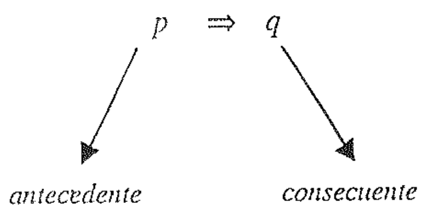
En el caso de la disyunción (tabla 2), ambas filas tienen V como resultados, lo que quiere decir que la disyunción entre una proposición V y otra F, no importa el orden , resulta ser V. Por otra parte, para la conjunción (tabla 3), ambas filas tienen F como resultado, lo que quiere decir que la conjunción entre una proposición V y otra F, no importa el orden , resulta ser F.

Pero ahora, en la tabla 4 de la implicación, la combinación V/F produce resultado F, en tanto que la combinación F/V produce resultado V. Para la implicación, sí importa el orden en que se hace la implicación, por lo tanto se sugiere tener CUIDADO.

Este hecho no es nuevo para nosotros y lo observamos en las operaciones aritméticas básicas: al sumar n con m, no interesa el orden en que se haga la suma, es decir da lo mismo sumar primero n luego m o a la inversa, primero m luego n. Este hecho lo simbolizamos por : $n+m=m+n$ *y a tal propiedad de la adición se le conoce como "conmutatividad de la adición".*

Como no hacemos distinción entre cual de los dos números debe ir primero en una suma, ambos se llaman igual: "sumando". Otra cosa muy distinta sucede con la "diferencia" o "resta" entre n y m. Ya no es lo mismo $n-m$ con $m-n$. La "diferencia" no es una operación "conmutativa". Este hecho nos lleva a denominar de manera distinta a los dos actores en una resta como $n-m$. El primero (o sea n) es llamado "minuendo" y el segundo (o sea m) es llamado "sustraendo".

Volvamos ahora a la implicación. Ya quedó claro que no es lo mismo escribir $p \Rightarrow q$ que $q \Rightarrow p$, puesto que se han cambiado las posiciones de p y q. Siendo así, es conveniente saber diferenciar bien cuál es la proposición que está antes del símbolo $\Rightarrow$, con aquella que está después del símbolo $\Rightarrow$. En una implicación como $p \Rightarrow q$, la proposición p que está antes del símbolo $\Rightarrow$ se llama "antecedente" y la proposición q que está después del símbolo $\Rightarrow$ se llama "consecuente".



Luego, sabemos que una implicación será F sólo cuando el antecedente sea V y el consecuente sea F. Esto nos ayudará a no confundirnos al momento de obtener el valor de verdad de una implicación.

Por ejemplo, si q es V y r es F entonces $q \Rightarrow r$ es F, pues el antecedente q es V y el consecuente r es F. No obstante, la implicación $r \Rightarrow q$ es V, puesto que ahora el antecedente r es F y el consecuente q es V.

El hecho que la implicación $p \Rightarrow q$ sea FALSA, nos dice que es falso que una proposición Verdadera implique una proposición Falsa, o dicho de otro modo, una proposición Verdadera no puede implicar una proposición Falsa.

EJEMPLO 13: Sean p,q,r tres proposiciones con valores de verdad V,F,V, respectivamente. Determinar el valor de verdad de :

a) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

b) $\overline{r} \Rightarrow [p \wedge (\overline{q} \vee r)]$

SOLUCIÓN: Observando con cuidado cuál es el antecedente y cuál es el consecuente en cada implicación, tendremos:

a)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$
V	F	V	F	V	F

b)

p	q	r	$\bar{r}$	$\bar{q}$	$\bar{q} \vee r$	$p \wedge (\bar{q} \vee r)$	$\bar{r} \Rightarrow [p \wedge (\bar{q} \vee r)]$
V	F	V	F	V	V	V	V

EJERCICIO 7 :

1. Repita el ejemplo 13 suponiendo ahora que las 3 proposiciones p, q, r tienen valores de verdad F,V,F, respectivamente.
2. Determine si son Tautologías, Contingencias o Contradicciones:

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge r] \Rightarrow (\bar{r} \vee p)$
b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Hasta aquí hemos dado énfasis al manejo adecuado de la tabla 4, que nos enseña a obtener el valor de verdad de una proposición compuesta mediante el conectivo "implicación". Sin embargo, hay otros aspectos muy importantes que destacar y aprender.

Ya se mencionó que en la implicación $p \Rightarrow q$, p es llamado "antecedente" y q es llamado "consecuente". Estos dos nombres tienen su razón de ser. Un antecedente se refiere a un dato o una información conocida, como por ejemplo "antecedentes comerciales de una persona" o "antecedentes de un proceso judicial". Es en base a los antecedentes que algo se decide, se realiza o se concluye (un préstamo bancario o una sanción penal son ejemplos de conclusiones).

Aquello que se concluye de los antecedentes es una consecuencia de los mismos y por tal razón tiene sentido usar el término "consecuente" para referirnos a la proposición q en la implicación $p \Rightarrow q$. Este es un hecho fundamental en la disciplina matemática: **aprender a obtener consecuencias "válidas" o verdaderas a partir de antecedentes dados.**

En matemática, usamos los términos "hipótesis" o "premisas", como sinónimos de antecedentes; son hechos o afirmaciones que asumimos como verdaderas y a partir de las cuales queremos obtener una "conclusión" o "tesis" también verdadera. La manera como manipulamos nuestras premisas, hipótesis o antecedentes es crucial para obtener conclusiones válidas.

Por ejemplo, para un abogado las premisas o antecedentes que puede utilizar son las leyes. Usando apropiadamente esas leyes puede obtener algunas conclusiones válidas, digamos veredictos a su favor. Estos veredictos pasan a ser nuevos antecedentes utilizables con posterioridad (jurisprudencias). Mejores resultados tendrá aquel abogado que mejor conozca las leyes, las jurisprudencias y las manipule con inteligencia y creatividad.

INTERPRETACIÓN CONDICIONAL.

La implicación (o condicional) $p \Rightarrow q$ es muy común leerla como:

si p entonces q

y que ella sea VERDADERA significa que si asumimos o condicionamos que p sea una proposición Verdadera entonces (o sea concluimos que) q es también Verdadera.

EJEMPLO 14:

Sea p : "el año tiene 12 meses" (V)
q : "Arica se encuentra en la 1ra. Región" (V)
r : "Arica es capital de Chile" (F)

Tenemos:

a) $p \Rightarrow q$: "el año tiene 12 meses **implica** Arica se encuentra en la 1ra. Región" , o bien, "si el año tiene 12 meses **entonces** Arica se encuentra en la 1ra. Región".
Como p es V y q es V concluimos que la implicación o la condicional $p \Rightarrow q$ es Verdadera.

b) $q \Rightarrow r$: "Si Arica se encuentra en la primera región **entonces** Arica es capital de Chile". Como q es V y r es F concluimos que $q \Rightarrow r$ es Falsa, o sea que r no es consecuencia lógica de q.

c) $p \wedge q \Rightarrow r$: "Si el año tiene 12 meses **y** Arica se encuentra en la primera región entonces Arica es capital de Chile". Como p es V, q es V, tenemos $p \wedge q$ Verdadera. Como el antecedente $p \wedge q$ es V y el consecuente r es F, tenemos que $p \wedge q \Rightarrow r$ es Falso. En este caso, entendemos que con las 2 premisas p y q, no podemos obtener r como conclusión.

d) $p \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{r}$: "Si el año tiene 12 meses y Arica no se encuentra en la primera región entonces Arica no es capital de Chile". Ahora p es V, $\overline{q}$ es F, por lo tanto $p \wedge \overline{q}$ es F. Como $p \wedge \overline{q}$ es F y $\overline{r}$ es V, tendremos que $p \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{r}$ es V. En este caso, con las dos premisas p y $\overline{q}$, la conclusión $\overline{r}$ es correcta.

EJEMPLO 15:

Determinar si la siguiente proposición (compuesta) es Tautología, Contradicción o Contingencia:

$$\left[\overline{p} \wedge (q \Rightarrow p)\right] \Rightarrow \overline{p}$$

SOLUCIÓN:

p	q	$\overline{p}$	$q \Rightarrow p$	$\overline{p} \wedge (q \Rightarrow p)$	$[\overline{p} \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow p$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

Recuerde que debe mirar bien cuál es el antecedente y cuál es el consecuente en las implicaciones de las columnas 4, 5 y 6 de la tabla. La expresión lógica es una contingencia. Sólo para la última combinación (p Falsa, q Falsa) la implicación resultó Falsa, lo que quiere decir que sólo en ese caso, p no es consecuencia lógica de $[\overline{p} \wedge (q \Rightarrow p)]$

UNA APLICACIÓN A PROGRAMACIÓN:

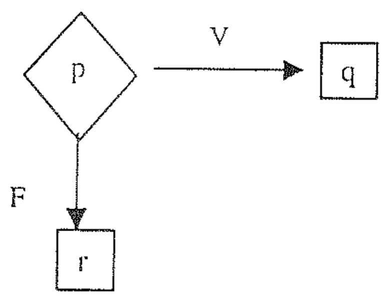
La implicación o condicional es una de las tantas "instrucciones" que un computador puede procesar. En esta aplicación, se traduce "si" como "if" y "entonces" como "then", quedando "si p entonces q" traducido como "if p then q". La interpretación es exactamente la misma que hicimos para la implicación. El computador comprueba si la condición p es Verdadera y en caso de serlo, pasa a ejecutar la sentencia q. En caso que p no sea verdadera quedan dos opciones: una es que termine con esta instrucción y pase a ejecutar la siguiente; la otra opción es que se le indique expresamente lo que hacer si p es Falsa.

De este modo, resulta una instrucción aún más completa y que lleva la forma siguiente:

If p then q	si p entonces q
else r	sino r

que debe entenderse así: El computador analiza la veracidad de p.
Si p resulta Verdadera, se pasa a ejecutar q.
Si p resulta Falsa, se pasa a ejecutar r.

Otra forma de representar lo mismo es mediante un "diagrama de flujo" como el siguiente:



EJEMPLO 16: Considere la siguiente instrucción:

If 3>2 then A = 4
Else A = 7

¿Qué valor de A se entrega como resultado?

SOLUCIÓN:

El computador analiza si 3>2 es V o F. La respuesta será V. En ese caso ejecuta la orden que sigue a "then", o sea hace A = 4. Así, el valor de A que se entrega es A = 4.

En el contexto de la programación computacional, el conectivo disyunción ($\vee$) se traduce como "OR", el conectivo conjunción ($\wedge$) se traduce como AND y la negación como (NOT).

Así por ejemplo, $(p \wedge \overline{q}) \vee r$ se escribe (p AND (NOT q)) OR r

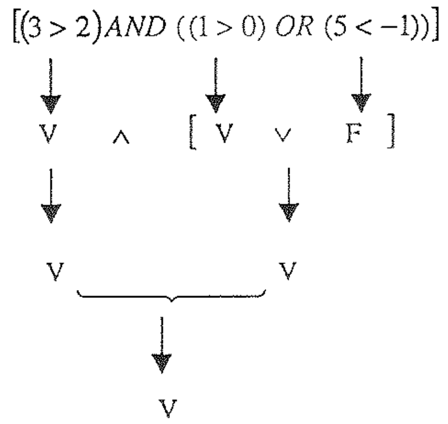
EJEMPLO 17 : Considere la siguiente instrucción:

$$\text{If } [(3>2)\,AND\ \ ((1>0)\ OR\ (5<-1))]\quad then \quad A=-2$$
$$else \quad A=1$$

¿Qué valor de A resulta?

SOLUCIÓN :

Analicemos primero el valor de verdad del antecedente.



Como el antecedente es V, leemos la instrucción que sigue a "then", o sea A = -2.

EJEMPLO 18: Dado los valores $x = 5$; $y = -1$; $z = -3$, encuentre el valor de A en:

$$\text{if}\left[(x > y-1)\ OR\ \left(x^2 > 1-z\right)\right]\ AND\ \left(x - y \leq z - 1\right)\ \ then\ \ A = (x-y+z)^2$$
$$else\ \ A = (x-y)^2 + z$$

SOLUCIÓN: Analicemos cada proposición que compone el antecedente:

$x > y - 1$ *significa* $5 > (-1) - 1$, *o sea,* $5 > -2$ *Verdadera*
$x^2 > 1 - z$ *significa* $25 > 1 - (-3)$, *o sea,* $25 > 4$ *Verdadera*
$x - y \leq z - 1$ *significa* $5 - (-1) \leq -3 - 1$, *o sea,* $6 \leq -4$ *Falsa*

Luego el antecedente tiene valor de verdad $(V \vee V) \wedge F$, o sea, F.

De modo que pensamos a ejecutar "else" y la respuesta será :
$A = (x-y)^2 + z = (5-(-1))^2 - 3 = 36 - 3 = 33$

EJERCICIO 8 :

Determine el valor de A, en cada caso:

1) $\text{If}\left[(1 > 9) OR\ (9 > 1)\right]\ \ then\ \ A = -7$
$\qquad else\ \ A = 4$

2) $\text{If}\left[(Arica\ es\ \ capital\ de\ Chile) AND\ (-3\ es\ número\ impar)\right]$
$$then\ \ A = \left(-\frac{1}{3} + 2\right)^2$$
$$else\ \ A = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 50$$

IV.- LA EQUIVALENCIA O DOBLE IMPLICACION O BICONDICIONAL

La equivalencia entre dos proposiciones p y q es otra proposición, que simbolizamos como $p \Leftrightarrow q$ (leemos " p equivalente con q ", o bien " p si y sólo si q ") y cuyo valor de verdad es V sólo en el caso que p y q tengan el mismo valor de verdad (ambos V o ambos F).

La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 5

EJEMPLO 19 : Si p, q, r son 3 proposiciones cuyos valores de verdad son, respectivamente V,F,V, determinar el valor de verdad de:

$$\left[\left(p \Rightarrow \bar{q}\right) \vee r\right] \Leftrightarrow \left(\bar{p} \vee q\right)$$

SOLUCIÓN: Siendo p verdadera, tenemos $\bar{p}$ Falsa y siendo q Falsa tenemos $\bar{q}$ verdadera. Luego $p \Rightarrow \bar{q}$ es verdadera y entonces $(p \Rightarrow \bar{q}) \vee r$ es también verdadera. Así, el lado izquierdo de la expresión propuesta es verdadero. El lado derecho $\bar{p} \vee q$ resulta Falso.

Se concluye que $\left[\left(p \Rightarrow \bar{q}\right) \vee r\right] \Leftrightarrow \left(\bar{p} \vee q\right)$ es Falso, lo que quiere decir que los miembros izquierdo y derecho de esa expresión no son equivalentes (uno es V y el otro es F).

Resumimos así:

$$\underbrace{\underbrace{\left[\underbrace{\left(\underbrace{p}_{V} \Rightarrow \underbrace{\bar{q}}_{V}\right)}_{V} \vee \underbrace{r}_{V}\right]}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\underbrace{\bar{p}}_{F} \vee \underbrace{q}_{F}\right)}_{F}}_{F}$$

EJEMPLO 20: Construya una tabla de verdad para $\left[\left(p \Rightarrow \bar{q}\right) \wedge \bar{r}\right] \Leftrightarrow \left[\left(p \vee q\right) \wedge r\right]$

SOLUCIÓN:

p	q	r	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$p \Rightarrow \bar{q}$	(1) $(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge \bar{r}$	$p \vee q$	(2) $(p \vee q) \wedge r$	(1) $\Leftrightarrow$ (2)
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F
V	V	F	F	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F

La expresión lógica resultó Verdadera sólo en 2 casos (V/V/F y F/F/V) y Falsa en los demás, por lo tanto se trata de una **contingencia.**

<u>EJERCICIO 9</u>: Determine si las siguientes expresiones lógicas son Tautologías, Contingencias o Contradicciones:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

b) $\left[p \wedge \left(\overline{q} \vee r\right)\right] \Leftrightarrow \left[\overline{p} \vee (q \wedge r)\right]$

c) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \left(\overline{p} \vee q\right)$

A esta altura de nuestro desarrollo, suponemos que el alumno conoce y maneja bien los 4 conectivos lógicos presentados. En lo que sigue, trataremos de dar énfasis al manejo de las **"propiedades"** que ellos poseen y las consecuencias de las mismas. En este contexto cuando nos referimos a **"propiedades"**, nos referimos a expresiones lógicas **"siempre verdaderas"**, vale decir, <u>Tautologías o Teoremas Lógicos</u>. Serán presentados como **"MODELOS"** generales, porque su aplicación se extiende a cualquier otra expresión similar en su forma o estructura.

Por ejemplo, el alumno puede verificar que $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ es una Tautología. Ello nos indica que una implicación del tipo $(p \Rightarrow q)$ es <u>equivalente</u> con $(\overline{p} \vee q)$, o sea con la <u>disyunción</u> entre la negación del antecedente con el consecuente. Este hecho se puede aplicar ahora a cualquier otra implicación. Por ejemplo $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$ será equivalente con la <u>disyunción</u> entre la negación de $(p \wedge \overline{q})$ con $\overline{p}$, vale decir, $[\ (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow p\ ] \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}\ \vee \overline{p}$

Una <u>consecuencia</u> importante de una equivalencia $p \Leftrightarrow q$, es que como p y q tienen el mismo valor de verdad, es perfectamente lícito poder reemplazar o sustituir p por q cada vez que lo deseemos.

Así por ejemplo, podremos reemplazar $p \Rightarrow q$ por otra expresión equivalente a ella como es el caso de $\overline{p} \vee q$.

Lo anterior nos lleva a presentar un conjunto de propiedades, Tautologías o Teoremas Lógicos que utilizan negaciones, disyunciones, conjunciones, implicaciones y equivalencias.

El listado no pretende incluirlas todas, sino sólo las que consideremos más fundamentales y que usaremos en lo que sigue del texto. Allí se han agrupado de acuerdo a su similitud y se ha colocado el nombre con que se las puede identificar. Además se ha simbolizado por T una Tautología y por C una contradicción.

TAUTOLOGIAS BASICAS O TEOREMAS LOGICOS

IDENTIDAD :

1.- $p \wedge T \Leftrightarrow p$

2.- $p \wedge C \Leftrightarrow C$

3.- $p \vee C \Leftrightarrow p$

4.- $p \vee T \Leftrightarrow T$

IDEMPOTENCIA :

5.- $p \wedge p \Leftrightarrow p$

6.- $p \vee p \Leftrightarrow p$

INVOLUCION O DOBLE NEGACION :

7.- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$

CONMUTATIVIDAD :

8.- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

9.- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

ASOCIATIVIDAD :

10.- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

11.- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

DISTRIBUTIVIDAD :

12.- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

13.- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

DE MORGAN:

14.- $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

15.- $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

ABSORCIÓN:

16.- $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

17.- $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

CONTRARECÍPROCA:

18.- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

TRANSITIVIDAD:

19.- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

20.- $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

OTRAS IMPORTANTES:

21.- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

22.- $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$

23.- $p \Rightarrow p$

24.- $p \Rightarrow (p \vee q)$

25.- $(p \wedge q) \Rightarrow p$

26.- $(p \wedge q) \Rightarrow q$

27.- $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

28.- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

29.- $\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p})]$

30.- $\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow q)$

31.- $\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \overline{q})$

32.- $(p \vee \overline{p}) \Leftrightarrow T$

33.- $(p \wedge \overline{p}) \Leftrightarrow C$

34.- $\overline{T} \Leftrightarrow C$

35.- $\overline{C} \Leftrightarrow T$

36.- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

37.- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow C]$

38.- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q})$

39.- $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r]$

EJERCICIO 10: Verificar, usando tablas de verdad que cada una de las expresiones lógicas del listado anterior, es efectivamente una Tautología.

EJERCICIO 11: Analice detenidamente cada una de las Tautologías del listado anterior y trate de memorizarlas.
Este ejercicio, le traerá al alumno grandes beneficios al momento de "aplicar" propiedades en ejercicios más complejos, como se muestra a continuación.

EJEMPLO 21: (simplificación de expresiones lógicas)

Simplificar la expresión $\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)$

SOLUCIÓN: Simplificar una expresión, consiste en transformarla en otra equivalente , usando las tautologías básicas. Cada paso o transformación que se haga, irá indicando el número de la tautología básica usada.

$$\begin{aligned} \overline{q} \wedge (p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \overline{q} \wedge (\overline{p} \vee q) && \text{(Taut. N° 21)} \\ &\Leftrightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge q) && \text{(Taut. N° 12)} \\ &\Leftrightarrow (\overline{q} \wedge p) \vee C && \text{(Taut. N° 33)} \\ &\Leftrightarrow (\overline{q} \wedge p) && \text{(Taut. N° 3)} \\ &\Leftrightarrow (q \Rightarrow p) && \text{(Taut. N° 21)} \end{aligned}$$

Según la Tautología N° 20, se concluye que la expresión original es equivalente con la última obtenida, vale decir, $\left[\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)\right] \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ es una tautología.

EJERCICIO 12: Simplifique las siguientes expresiones:

a) $(\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$ Respuesta: $\overline{p}$

b) $\overline{p \wedge (\overline{q} \vee p)}$ Respuesta: $\overline{p}$

c) $\overline{p \Rightarrow (p \wedge q)}$ Respuesta: $p \wedge \overline{q}$

EJEMPLO 22:
Transforme la expresión $\overline{p} \Rightarrow (p \Leftrightarrow \overline{q})$ en otra equivalente que sólo use negaciones, disyunciones y conjunciones.

SOLUCIÓN: Aquí se usan las Tautologías básicas N° 21 y 28.

$$\begin{aligned} \left[\overline{p} \Rightarrow (p \Leftrightarrow \overline{q})\right] &\Leftrightarrow \left[\overline{p} \Rightarrow ((p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \Rightarrow p))\right] && \text{(Taut. 28)} \\ &\Leftrightarrow \left[\overline{p} \Rightarrow ((\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (\overline{\overline{q}} \vee p))\right] && \text{(Taut. 21)} \\ &\Leftrightarrow \left[\overline{\overline{p}} \vee ((\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (\overline{\overline{q}} \vee p))\right] && \text{(Taut. 21)} \end{aligned}$$

hasta aquí se ha cumplido el objetivo; simplificando contínua:

$$
\begin{array}{ll}
\Leftrightarrow \left[p \vee ((\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (q \vee p))\right] & \text{(Taut. 7)} \\
\Leftrightarrow \left[p \vee (\overline{p} \vee \overline{q})\ \right] \wedge \left[p \vee (q \vee p)\right] & \text{(Taut. 13)} \\
\Leftrightarrow \left[(p \vee \overline{p}) \vee \overline{q})\ \right] \wedge \left[p \vee (q \vee p)\right] & \text{(Taut. 11)} \\
\Leftrightarrow \left[T \vee \overline{q})\ \right] \wedge \left[p \vee (q \vee p)\right] & \text{(Taut. 32)} \\
\Leftrightarrow \left[T\ \right] \wedge \left[p \vee (q \vee p)\right] & \text{(Taut. 4)} \\
\Leftrightarrow \left[p \vee (q \vee p)\right] \wedge T & \text{(Taut. 9)} \\
\Leftrightarrow\ p \vee (q \vee p) & \text{(Taut. 1)} \\
\Leftrightarrow\ p \vee (p \vee q) & \text{(Taut. 8)} \\
\Leftrightarrow\ (p \vee p) \vee q & \text{(Taut. 11)} \\
\Leftrightarrow\ p \vee q & \text{(Taut. 6)}
\end{array}
$$

EJERCICIO 12: Transforme las siguientes expresiones en otras equivalentes que sólo usen negaciones, disyunciones y conjunciones.

a) $p \Leftrightarrow p \vee q$

b) $\overline{p \Rightarrow q} \vee (\overline{q} \Rightarrow p)$

c) $\overline{p \Rightarrow (q \Rightarrow r)}$

EJEMPLO 23: Usando las Tautologías básicas, demuestre :

$$\overline{(p \Rightarrow q) \wedge r} \Leftrightarrow \left[(r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow \overline{q})\right]$$

SOLUCIÓN: El ejemplo consiste en demostrar que la expresión lógica $\overline{(p \Rightarrow q) \wedge r}$ es equivalente con $\left[(r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow \overline{q})\right]$. Esto es exactamente lo mismo que demostrar que la expresión $\overline{(p \Rightarrow q) \wedge r} \Leftrightarrow \left[(r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow \overline{q})\right]$ es una Tautología.
Una manera de resolver el problema consiste en comenzar por uno de los dos miembros de la equivalencia propuesta y transformarlo en el otro miembro, usando exclusivamente tautologías básicas del tipo equivalencias, como aquellas del listado con números 1, 2, 3, 4,..., 18, 21, 22, 28, 29, 30,..., 39. (Observe que las restantes, con números 19, 20, 23, 24, 25, 26 y 27 son sólo implicaciones).

Si comenzamos con el miembro izquierdo tenemos:

$$
\begin{array}{lll}
\overline{(p \Rightarrow q) \wedge r} & \Leftrightarrow (\overline{p \Rightarrow q} \vee \overline{r})\ , & \text{(Tautología N° 14)} \\
 & \Leftrightarrow (\overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{r})\ , & \text{(Tautología N° 21)} \\
 & \Leftrightarrow (\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}) \vee \overline{r}\ , & \text{(Tautología N° 15)} \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee \overline{r}\ , & \text{(Tautología N° 7)} \\
 & \Leftrightarrow (\overline{r} \vee (p \wedge \overline{q}))\ , & \text{(Tautología N° 8)}
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow (\overline{r} \vee p) \wedge (\overline{r} \vee \overline{q})$, (Tautología Nº 13)

$\Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow \overline{q})$, (Tautología Nº 21)

<u>EJEMPLO 24:</u> Usando las Tautologías básicas, demuestre $\overline{p \Rightarrow \overline{q}} \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

<u>SOLUCIÓN</u>: Procedamos como en el ejemplo anterior:

$\overline{p \Rightarrow \overline{q}} \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$ (Tautología Nº 21)

$\Leftrightarrow \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}}$ (Tautología Nº 15)

$\Leftrightarrow p \wedge q$ (Tautología Nº 7)

Aprovechemos este mismo ejemplo para mostrar otra forma de demostrar $\overline{p \Rightarrow \overline{q}} \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

Se trata de demostrar que la expresión anterior es una Tautología, esto es, podemos demostrar que la expresión se puede simplificar (usando sólo propiedades del tipo equivalencia) hasta convertirla en T. Veamos cómo se hace.

$\left[\overline{p \Rightarrow \overline{q}} \Leftrightarrow (p \wedge q)\right] \Leftrightarrow \left[\overline{p \Rightarrow \overline{q}} \Rightarrow (p \wedge q)\right] \wedge \left[(p \wedge q) \Rightarrow \overline{p \Rightarrow \overline{q}}\right]$ (Taut. Nº 28)

$\Leftrightarrow \left[\overline{\overline{p \Rightarrow \overline{q}}} \vee (p \wedge q)\right] \wedge \left[\overline{(p \wedge q)} \vee \overline{p \Rightarrow \overline{q}}\right]$ (Taut. Nº 21)

$\Leftrightarrow \left[(p \Rightarrow \overline{q}) \vee (p \wedge q)\right] \wedge \left[\overline{(p \wedge q)} \vee \overline{p \Rightarrow \overline{q}}\right]$ (Taut. Nº 7)

$\Leftrightarrow \left[(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee (p \wedge q)\right] \wedge \left[\overline{p \wedge q} \vee \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}\right]$ (Taut. Nº 21)

$\Leftrightarrow \left[\overline{p \wedge q} \vee (p \wedge q)\right] \wedge \left[\overline{p \wedge q} \vee \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}\right]$ (Taut. Nº 14)

$\Leftrightarrow \left[\overline{p \wedge q} \vee (p \wedge q)\right] \wedge \left[\overline{p \wedge q} \vee (\overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}})\right]$ (Taut. Nº 15)

$\Leftrightarrow \left[\overline{p \wedge q} \vee (p \wedge q)\right] \wedge \left[\overline{p \wedge q} \vee (p \wedge q)\right]$ (Taut. Nº 7)

$\Leftrightarrow \left[\overline{p \wedge q} \vee (p \wedge q)\right]$ (Taut. Nº 5)

$\Leftrightarrow \left[(p \wedge q)\right] \vee \overline{(p \wedge q)}$ (Taut. Nº 8)

$\Leftrightarrow T$ (Taut. Nº 32)

Este método resultó bastante más complicado o tedioso que el anterior, pero es conveniente que se conozca su funcionamiento.

EJEMPLO 25: Demostrar $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

SOLUCIÓN: Esta expresión lógica es la Tautología básica N° 17 y aunque es muy simple demostrar que es Tautología usando tablas de verdad, lo haremos mediante las propiedades básicas.

$$
\begin{aligned}
p \vee (p \wedge q) &\Leftrightarrow (p \wedge T) \vee (p \wedge q) && \text{(Tautología N° 1)}\\
&\Leftrightarrow p \wedge (T \vee q) && \text{(Tautología N° 12)}\\
&\Leftrightarrow p \wedge (q \vee T) && \text{(Tautología N° 8)}\\
&\Leftrightarrow p \wedge T && \text{(Tautología N° 4)}\\
&\Leftrightarrow p && \text{(Tautología N° 1)}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 26: Demostrar $\left[\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)\right] \Rightarrow \overline{p}$

SOLUCIÓN: Se pide demostrar que $\left[\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)\right] \Rightarrow \overline{p}$ es Tautología.

Observemos que esta expresión lógica es una implicación, cuyo antecedente es $\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)$ y cuyo consecuente es $\overline{p}$. Se trata entonces de probar que $\overline{p}$ es consecuencia lógica de $\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)$. Nuevamente lo haremos mediante 2 métodos:

(a) Comenzando por el antecedente y usando propiedades de equivalencias e implicaciones, llegar a obtener el consecuente.

$$
\begin{aligned}
\text{Así, } \left[\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)\right] &\Leftrightarrow \left[\overline{q} \wedge (\overline{p} \vee q)\right] && \text{(Tautología N° 21)}\\
&\Leftrightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge q) && \text{(Tautología N° 12)}\\
&\Leftrightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee C && \text{(Tautología N° 33)}\\
&\Leftrightarrow \overline{q} \wedge \overline{p} && \text{(Tautología N° 3)}\\
&\Rightarrow \overline{p} && \text{(Tautología N° 26)}
\end{aligned}
$$

Observe que se usaron 4 equivalencias y sólo una implicación en el desarrollo anterior, pero ello hace que prevalezca sólo la implicación de $\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)$ hacia $\overline{p}$.

Imagine las $\Leftrightarrow$ como calles de doble tránsito automotriz y las $\Rightarrow$ como calles con tránsito en un solo sentido. Si Ud. sigue el camino $A \Leftrightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow D$, claramente Ud. puede llegar desde A hasta D, pero no al revés (no puede pasar de C a B. Luego se tiene $A \Rightarrow D$ pero no se tiene $D \Rightarrow A$, es decir no puede escribirse $A \Leftrightarrow D$.

(b) El otro método consiste en probar que toda la expresión lógica $\left[\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)\right] \Rightarrow \overline{p}$ es equivalente a una Tautología.

Veamos: $\left(\left[\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)\right] \Rightarrow \overline{p}\right) \Leftrightarrow \left(\left[\overline{q} \wedge (\overline{p} \vee q)\right] \Rightarrow \overline{p}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\overline{\overline{q} \wedge (\overline{p} \vee q)}\right] \vee \overline{p}$$

$$\Leftrightarrow \left[q \vee \left(p \wedge \overline{q}\right)\right] \vee \overline{p}$$

$$\Leftrightarrow \left[(q \vee p) \wedge (q \vee \overline{q})\right] \vee \overline{p}$$

$$\Leftrightarrow \left[(q \vee p) \wedge T\right] \vee \overline{p}$$

$$\Leftrightarrow (q \vee p) \vee \overline{p}$$

$$\Leftrightarrow q \vee (p \vee \overline{p})$$

$$\Leftrightarrow q \vee T$$

$$\Leftrightarrow T$$

Se deja al alumno la tarea de justificar cada paso en el desarrollo anterior.

<u>EJEMPLO 27</u>: Demostrar $\overline{p} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

<u>SOLUCIÓN</u>: Probaremos que la expresión lógica es una tautología, usando 3 métodos:

(a) <u>Método Directo:</u> consiste en comenzar con el antecedente $\overline{p}$ y usando equivalencias e implicaciones, obtener el consecuente $p \Rightarrow q$.

En efecto, $\overline{p} \Rightarrow \overline{p} \vee q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

(b) Ahora transformaremos la expresión completa en una tautología:

$$\left[\overline{p} \Rightarrow (p \Rightarrow q)\right] \Leftrightarrow \overline{\overline{p}} \vee (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \vee (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \vee \left(\overline{p} \vee q\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(p \vee \overline{p}\right) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow q \vee T \Leftrightarrow T$$

(c) Usaremos la propiedad contrarecíproca (Tautología N° 18).

$$\left[\overline{p} \Rightarrow (p \Rightarrow q)\right] \Leftrightarrow \left[\overline{p \Rightarrow q} \Rightarrow \overline{\overline{p}}\right] \qquad \text{(Tautología N° 18)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\overline{p \Rightarrow q} \Rightarrow p\right] \qquad \text{(Tautología N° 7)}$$

Como las 3 expresiones son equivalentes, bastará con comprobar que la última es una Tautología, vale decir, con el antecedente $\overline{p \Rightarrow q}$ concluir p.

En efecto: $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$ (Tautología N° 22)

$\Rightarrow p$ (Tautología N° 25)

EJERCICIO 13: Demuestre usando propiedades, que las siguientes expresiones lógicas son Tautologías.

a) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$

b) $\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \overline{q})$

c) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$

e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q} \Rightarrow C)$

El ejercicio (e) anterior entrega una expresión equivalente con la implicación $p \Rightarrow q$. Se trata de $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow C$ conocida como "**reducción al absurdo**", aunque podríamos llamarlo "**reducción a una Contradicción**", pues se trata de obtener una contradicción (C) a partir del antecedente $p \wedge \overline{q}$.

Veamos un ejemplo práctico donde apliquemos la expresión (e) del ejercicio anterior:
Demostrar que: "si n^2 es un número par entonces n es un número par"

Solución: Aquí $p : n^2$ es un número par.
$q : n$ es un número par.

Luego la implicación $p \Rightarrow q$ se puede transformar en $p \wedge \overline{q} \Rightarrow C$, o sea, si n^2 es un número par $\wedge$ n es un número impar **entonces** se tiene una contradicción.

En efecto, n^2 par $\wedge\, n$ $impar \Rightarrow n^2 = 2K \ (K\, entero) \ \wedge \ n = 2L+1 \ (L\, entero)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow n^2 = 2K \ \wedge \ n^2 = (2L+1)^2 \\
&\Rightarrow n^2 = 2K \ \wedge \ n^2 = 4L^2 + 4L + 1 \\
&\Rightarrow n^2 = 2K \ \wedge \ n^2 = 2(2L^2 + 2L) + 1 \qquad (2L^2 + 2L \ entero) \\
&\Rightarrow n^2 \ es\ par \wedge n^2 \ es\ impar \\
&\Leftrightarrow C
\end{aligned}$$

CONJUNTOS NUMERICOS:

Para continuar con el tratamiento de la lógica matemática, concretamente con el estudio de los "cuantificadores", resulta oportuno hacer un breve repaso de los conjuntos numéricos que se estudian en la Educación Media.

Se define el CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES como el conjunto $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$. Se trata de un conjunto infinito que tiene dos propiedades operatorias básicas:

(i) si $n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}$ *entonces* $(n+m) \in \mathbb{N}$
la suma de dos números naturales es otro número natural,
(propiedad de CLAUSURA DE LA ADICIÓN EN $\mathbb{N}$).

(ii) si $n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}$ *entonces* $(n \cdot m) \in \mathbb{N}$
la multiplicación de dos números naturales es otro número natural
(propiedad de CLAUSURA DE LA MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{N}$).

Notemos que:

- si restamos dos números naturales, no siempre se obtiene otro número natural (no se verifica clausura de la diferencia en $\mathbb{N}$ por ejemplo, $2-4=-2 \notin \mathbb{N}$).
- si dividimos dos números naturales, no siempre se obtiene otro número natural (no se verifica clausura de la división en $\mathbb{N}$ por ejemplo, $3:6=0.5 \notin \mathbb{N}$)

Por otro lado, el conjunto $\mathbb{N}$ no contiene un número muy importante como es el cero. Así, para tratar de completar estas deficiencias del conjunto $\mathbb{N}$, se le extiende a otro conjunto con más elementos, el CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS, que se define como:

$$\mathbf{Z} = \{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$$

En este conjunto se satisfacen las propiedades de CLAUSURA DE LA SUMA y CLAUSURA DE LA MULTIPLICACIÓN, vale decir, la suma y la multiplicación de números enteros es otro número entero.

(i) si $n \in \mathbf{Z} \wedge m \in \mathbf{Z}$ *entonces* $(n+m) \in \mathbf{Z}$

(ii) si $n \in \mathbf{Z} \wedge m \in \mathbf{Z}$ *entonces* $(n \cdot m) \in \mathbf{Z}$

Este conjunto contiene al cero y los negativos de todos los números naturales. Lo interesante es que ahora se satisface la CLAUSURA DE LA DIFERENCIA, es decir,

(iii) si $n \in \mathbf{Z} \wedge m \in \mathbf{Z}$ *entonces* $(n-m) \in \mathbf{Z}$

Además, el número 0 tiene la propiedad: $n+0=n$, cualquiera sea $n \in \mathbf{Z}$ (se dice que 0 es neutro para la adición en $\mathbf{Z}$).

El número 1 tiene la propiedad: $n \cdot 1 = n$, cualquiera sea $n \in \mathbf{Z}$ (se dice que 1 es neutro para la multiplicación en $\mathbf{Z}$).

Además se satisfacen las siguientes propiedades:

CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN EN Z : $n+m=m+n$
CONMUTATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN EN Z : $n\cdot m=m\cdot n$
ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN EN Z : $n+(m+p)=(n+m)+p$
ASOCIATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN EN Z : $n\cdot(m\cdot p)=(n\cdot m)\cdot p$
DISTRIBUTIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA SUMA EN Z:
$n\cdot(m+p)=n\cdot m+n\cdot p$

Además de lo anterior, **Z** tiene la particularidad que cualquiera sea el número entero m que se considere, siempre habrá otro número entero (su INVERSO ADITIVO) denotado por $(-m)$ de modo que la suma de ambos es 0, vale decir $m+(-m)=0$.

A pesar de todas estas buenas propiedades de **Z** , este conjunto mantiene una deficiencia importante: no satisface la propiedad de CLAUSURA DE LA DIVISIÓN, vale decir,

si $n\in \mathbf{Z} \quad \wedge \quad m\in \mathbf{Z}$, entonces no podemos garantizar que $(n:m)\in$ Z, lo que quiere decir que en algunos casos, la división de enteros será otro entero (por ejemplo, $6:3=2$), pero hay otros casos en que tal división no es entero (por ejemplo, $3:6=0{,}5$).

Esto nos lleva a extender el conjunto **Z** para formar el CONJUNTO DE LOS NUMEROS **RACIONALES**, simbolizado por **Q** y definido como: $\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b} \ / \ a\in Z \wedge b\in Z \wedge b\neq 0\right\}$

$=\{\textit{fracciones o cuocientes de números enteros con denominador distino de cero}\}$

Luego, entendemos por número racional cualquier fracción que sea del tipo $\frac{a}{b}$, cuyo numerador y denominador son enteros, siendo $b\neq 0$.

Así por ejemplo, son racionales los números $\frac{2}{3}, \frac{-4}{5}, \frac{3}{-6}, \frac{0}{15}, \ldots$

Veamos a continuación algunas propiedades que se tienen del conjunto Q.

1. Todo número entero es también un número racional. En efecto, el entero n puede expresarse como la fracción $\frac{n}{1}$.
2. Todo número racional o fracción, puede expresarse como número decimal finito o decimal infinito periódico. Para ello bastará efectuar la división entre el numerador y el denominador.

   Por ejemplo: $\frac{8}{5}=1{,}6$ es un número decimal finito y

   $\frac{-17}{15}=-1{,}1333\ldots$ es un número decimal infinito periódico, con período 3.

3. Los números racionales pueden agruparse en "clases" de todos aquellos que representan el mismo número decimal. Así por ejemplo, en una misma clase se encuentran $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ pues todos ellos representan el mismo número decimal 0,5.

En tal caso se dice que los racionales $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$, etc. son iguales entre si. ¿Cómo saber si 2 números racionales son "iguales" o que representan el mismo número decimal? Una respuesta se obtiene al llevarlos a su forma decimal y comparar resultados.

Por ejemplo: $\frac{17}{15} = \frac{136}{120}$ pues ambas divisiones producen 1,1333... Otra forma de verificar la igualdad entre dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Así por ejemplo, $\frac{17}{15} = \frac{136}{120}$ pues $17 \cdot 120 = 15 \cdot 136 = 2040$

Todos los números racionales iguales que $\frac{a}{b}$ son amplificaciones o simplificaciones de $\frac{a}{b}$.

Así por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales iguales que $\frac{1}{2}$ es: $\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{-2}, \frac{2}{4}, \frac{-2}{-4}, \frac{3}{6}, \frac{-3}{-6}, \ldots\right\}$. Este conjunto llamado "la clase de $\frac{1}{2}$" es también infinito.

4.- ¿Cómo convertir un decimal finito o infinito periódico en un número racional?

En el caso de un decimal finito, sólo dependerá de la cantidad de cifras decimales que se tengan. Por ejemplo: $4{,}26 = \frac{426}{100} = \frac{213}{50} = \ldots$

En el caso de un decimal infinito periódico, el proceso es un poco más laborioso, pero igualmente simple. Por ejemplo, para convertir en fracción el decimal 2,454545...(que se escribe a veces $2{,}\overline{45}$) hacemos lo siguiente:

$$X = 2{,}454545\ldots \quad \textit{amplificamos por } 100$$
$$100X = 245{,}454545\ldots\ldots$$

$$99x = 243.0000\ldots \quad (\textit{restando la primera de la segunda ecuación})$$
$$\Rightarrow 99x = 243$$
$$\Rightarrow x = \frac{243}{99} = 2{,}454545\ldots$$

Veamos otro ejemplo: convertir $3{,}1425425425\ldots = 3{,}1\overline{425}$ en su forma racional.

Ahora hacemos : $X = 3{,}1425425\ldots$ amplificamos por 10 para alcanzar el período 425

$10X = 31{,}425425\ldots$ amplificamos por 1000

$10000X = 31425{,}425425\ldots$

$$9990X = 31394{,}0000\ldots \quad \Rightarrow \quad X = \frac{31394}{9990}$$

Convierta Ud. los siguientes números decimales en racionales:

(a) 5,1 (b) 61,142142... (c) 13,42171717...

5.- Las operaciones de adición, diferencia o sustracción, multiplicación y división entre números racionales se definen como:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}; \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

6.- Las propiedades fundamentales de estas 4 operaciones en Q son las siguientes:

- **CLAUSURA DE LA ADICIÓN:**

  Si $\frac{a}{b} \in Q \wedge \frac{c}{d} \in Q$ entonces $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \in Q$

- **CLAUSURA DE LA MULTIPLICACIÓN:**

  Si $\frac{a}{b} \in Q \wedge \frac{c}{d} \in Q$ entonces $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \in Q$

- **CLAUSURA DE LA DIFERENCIA:**

  Si $\frac{a}{b} \in Q \wedge \frac{c}{d} \in Q$ entonces $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} \in Q$

- **CLAUSURA DE LA DIVISIÓN:**

  Si $\frac{a}{b} \in Q \wedge \frac{c}{d} \in Q$ entonces $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} \in Q$ $\left(\frac{c}{d} \neq 0,\ o\ sea\ ,\ c \neq 0\right)$

- **CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN:**

  $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

- **CONMUTATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN:**

  $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

- **ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN:**

  $$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{e}{f}\right)$$

- **ASOCIATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN:**

  $$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\left(\frac{e}{f}\right)$$

- **NEUTRO DE LA ADICIÓN:** el número racional 0 (o bien $\frac{0}{1},\frac{0}{2},...$) satisface la propiedad : $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ (0 es <u>neutro aditivo</u> en Q)

- **NEUTRO DE LA MULTIPLICACIÓN:** el número racional 1 (o bien $\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3},...$) satisface la propiedad: $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ (1 es <u>neutro multiplicativo</u> en **Q**)

- **INVERSO CON RESPECTO A LA ADICIÓN:** cada número racional $\frac{a}{b}$ tiene un <u>único inverso aditivo</u> que es el racional $-\frac{a}{b}$ y tal que se verifica $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right)=0$
  El inverso aditivo $-\frac{a}{b}$ es lo mismo que $\frac{a}{-b}$ o bien $\frac{-a}{b}$

- **INVERSO CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN:** cada número racional $\frac{a}{b}$ <u>que no sea 0</u>, tiene un único <u>inverso multiplicativo</u> que es otro racional $\frac{b}{a}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

- **DISTRIBUTIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA ADICIÓN Y A LA DIFERENCIA:** $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \pm \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \pm \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

Una consecuencia importante de estas propiedades es que la diferencia y la división pueden ser vistas como operaciones basadas en la suma y la multiplicación.

En efecto, se puede comprobar que:

- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$, es decir, la diferencia entre 2 racionales, es lo mismo que la suma entre el minuendo y el inverso aditivo del sustraendo.
- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c}\right)$, es decir, la división entre 2 racionales, es lo mismo que la multiplicación entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor.

Por tal razón, bastará con reconocer como fundamentales a las operaciones de adición y multiplicación de números racionales. El conjunto **Q** con las operaciones de adición y multiplicación, por cumplir todas las propiedades antes mencionadas, adquiere una especial estructura, llamada <u>**CUERPO**</u>.

A pesar de lo bueno que puede parecernos este conjunto Q, todavía tiene una deficiencia algebraica importante. Cuando queremos resolver una simple ecuación de segundo grado, como por ejemplo, $x^2 = 2$ que tiene sus coeficientes enteros (y por lo tanto racionales), las soluciones son $x = \sqrt{2} \wedge x = -\sqrt{2}$, que no son números racionales.

¿Cómo sabemos que $\sqrt{2}$ no es racional? Esto se demuestra usando el siguiente principio lógico: una proposición p es Verdadera ssi $\overline{p}$ es Falsa.
En este caso p: "$\sqrt{2}$ no es racional" y $\overline{p}$: "$\sqrt{2}$ es racional".
Luego, bastará con demostrar que $\overline{p}$ es Falsa, o sea, una contradicción.
En efecto, $\sqrt{2}$ *racional* $\Leftrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ $(m \in Z,\ n \in Z,\ n \neq 0)$, *siendo* $\dfrac{m}{n}$ una fracción simplificada al máximo, es decir, m y n no tienen factores comunes.

$$\text{Luego, } 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow m^2 \ par \quad \Rightarrow \quad m \ par \quad \Rightarrow m = 2k \quad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow m^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \quad (pues\ m^2 = 2n^2) \quad \Rightarrow n^2 = 2k^2$$

$$\Rightarrow n^2 \ par \quad \Rightarrow n \ par$$

Se obtiene: $m\ par \wedge n\ par$, lo que contradice el hecho que $\dfrac{m}{n}$ sea una fracción simplificada al máximo. Entonces $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Luego, la ecuación $x^2 = 2$, cuyos coeficientes son racionales, no tiene solución en el conjunto Q.

Ello nos sugiere, extender ahora el conjunto de los números racionales a otro conjunto que contenga todos los racionales, además de otros números no racionales o irracionales. Se define el CONJUNTO DE LOS NUMEROS IRRACIONALES, denotado por I, como $\mathrm{I} = \{números\ decimales\ \inf initos\ no-periódi\cos\}$.
A este conjunto pertenecen números como:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$; $\sqrt{3} = 1{,}732050809...$; $\pi = 3{,}141592654.....$

$\sqrt[4]{\dfrac{5}{6}} = 0{,}955442792...$ $e = 2{,}718281829...$; etc.

Obsérvese que $x \notin \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in Q$, puesto que los números decimales pueden ser finitos o infinitos periódicos (racionales) o bien infinitos no-periódicos (irracionales), pero no ambos.

Otro aspecto a destacar es que I es un conjunto infinito , lo que resulta como consecuencia del siguiente hecho:

- Si $x \in Q \wedge y \in I$ entonces $(x+y) \in I$ (la suma de un número racional con uno irracional es un número irracional).

En efecto, consideremos $p: x \in Q$, $q: y \in I$, $r:(x+y) \in I$

El enunciado anterior es del tipo $p \wedge q \Rightarrow r$, lo que equivale a $p \wedge q \wedge \bar{r} \Rightarrow C$, es decir, probaremos por Reducción al Absurdo.

Supongamos entonces que: $x \in Q \wedge y \in I \wedge x+y \notin I$, es decir

$$
\begin{aligned}
& x \in Q \wedge y \in I \wedge x+y \in Q \\
& \Rightarrow x=\frac{m}{n} \wedge y \in I \wedge x+y=\frac{s}{t} \\
& \Rightarrow y \in I \wedge \frac{m}{n}+y=\frac{s}{t} \\
& \Rightarrow y \in I \wedge y=\frac{s}{t}-\frac{m}{n}=\frac{sn-tm}{tn} \\
& \Rightarrow y \in I \wedge y \in Q, \text{ una contradicción.}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, si la suma de un irracional (por ejc., $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$) con un racional produce otro número irracional, entonces habrá muchos más números irracionales que racionales.

Otras observaciones respecto del conjunto I son:

- Si $x \in Q \wedge y \in I$ entonces $(x \cdot y) \in I$ (excepto si $x=0$)
  (la multiplicación entre un racional no nulo y un irracional es un número irracional)
  En efecto, supongamos que $x \in Q$ $(x \neq 0) \wedge y \in I \wedge x \cdot y \in Q$, entonces

$$
\begin{aligned}
& x=\frac{m}{n} \wedge y \in I \wedge x \cdot y=\frac{s}{t} \quad (m \neq 0,\ n \neq 0,\ t \neq 0) \\
& \Rightarrow y \in I \wedge \frac{m}{n} \cdot y=\frac{s}{t} \quad (m \neq 0,\ n \neq 0,\ t \neq 0) \\
& \Rightarrow y \in I \wedge y=\frac{s}{t} \cdot \frac{n}{m} \quad (m \neq 0,\ n \neq 0,\ t \neq 0) \\
& \Rightarrow y \in I \wedge y \in Q, \text{ una contradicción.}
\end{aligned}
$$

  Con esto se tiene que $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $\frac{3}{5}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \ldots$ son todos irracionales.

- La suma de dos números irracionales, <u>no</u> necesariamente es irracional. Por ejemplo al sumar $\sqrt{2}$ *con* $-\sqrt{2}$ se obtiene el número racional 0. En tanto que la suma de $\sqrt{2}$ *con* $2\sqrt{2}$ será $3\sqrt{2}$ que es también irracional. (No existe clausura de la adición en I)

- La multiplicación de dos números irracionales puede ser racional o irracional, como por ejemplo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in$ Q y $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in$ I (No existe clausura de la multiplicación en I).

Dado que las operaciones de adición y multiplicación de números irracionales producen números racionales o irracionales, es conveniente incluir todos estos números en un solo conjunto denominado "CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES", que se denotará por R.

Usando la notación de <u>unión</u> entre conjuntos, la que será formalizada más adelante, tenemos :

$$R=Q \cup I$$

Lo anterior nos dice que cualquier <u>número real</u> es un número racional (decimal finito o infinito periódico) o bien un número irracional (decimal infinito no-periódico).

Resumimos a continuación las propiedades fundamentales que tiene R en relación a las operaciones de adición y multiplicación:

- CLAUSURA DE LA ADICIÓN: $x \in R \quad \wedge \quad y \in R \quad \Rightarrow \quad x + y \in R$
- CLAUSURA DE LA MULTIPLICACIÓN: $x \in R \quad \wedge \quad y \in R \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \in R$
- ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN: $x + (y + z) = (x + y) + z$
- ASOCIATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN: $x + y = y + x$
- CONMUTATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN: $x \cdot y = y \cdot x$
- 0 ES NEUTRO ADITIVO: $x + 0 = 0 + x = x$
- 1 ES NEUTRO MULTIPLICATIVO: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- INVERSO ADITIVO: $x + (-x) = 0 \quad [-x \text{ es inverso aditivo de } x]$
- INVERSO MULTIPLICATIVO:

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \left[\text{para } x \neq 0, \text{ el inverso multiplicativo de } x \text{ es } \frac{1}{x} \right]$$

- DISTRIBUTIVIDAD DE MULTIPLICACION CON RESPECTO A LA ADICION:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

FUNCIONES PROPORCIONALES Y CUANTIFICADORES

Consideremos ahora la expresión lógica: "*x es un número par*".
Nos preguntamos si es o no una proposición. ¿Tiene valor de verdad Verdadero? No podemos responder sin conocer el valor de x. ¿Tiene valor de verdad Falso? Tampoco podemos responder. El hecho es que será Verdadera o Falsa, dependiendo del valor de x, por ejemplo, para $x = 5$ la expresión lógica anterior es FALSA, mientras que para $x = 6$ la expresión es Verdadera.

En esa expresión lógica, x actúa como variable. Aún más, aunque no fue expresamente indicado, no había duda que x representaba un número. ¿Qué tipo de número : natural, entero, real? Al parecer será necesario indicar el conjunto al cual x debe pertenecer, salvo que el contexto de la oración lo aclare.

Enseguida formalizaremos estas ideas.

Una FUNCION PROPOSICIONAL es una expresión lógica que contiene una o más variables y que se transforma en proposición cada vez que se asigna un valor específico a cada una de las variables.

Así, la expresión "**x es un número entero**", es una función proposicional que contiene una única variable **x** y que se convierte en proposición (o sea será Verdadera o Falsa) cuando se reemplaza **x** por un número determinado. En el ejemplo, si $x = 5$ la proposición resultante es "5 es un número entero" cuyo valor de verdad es Verdadero y si $x = \frac{1}{2}$ resulta "$\frac{1}{2}$ *es un número entero*", que es una proposición Falsa.

Llamaremos CONJUNTO UNIVERSO (o simplemente UNIVERSO) al conjunto que contiene los valores que puede asumir la variable x. En el ejemplo anterior, el universo U podría ser el conjunto de los números racionales (o sea $U = \mathbf{Q}$) o podría ser el conjunto de los números reales ($U = \mathbf{R}$). Entendamos que el Universo lo especificamos en cada ejemplo o situación, dependiendo de lo que queramos aceptar como posibles valores de x.

EJEMPLO 28: Consideremos $U = \mathrm{R}$ y la expresión lógica "x es mayor que 2". Cada vez que se reemplace x por un número real (no por otro tipo de objeto), tendremos una proposición Verdadera o Falsa, dependiendo del valor de x. Así, si x=0.73 la proposición es F y para $x = \sqrt{2}$, la proposición es V.

EJEMPLO 29: Consideremos $U = \mathbf{Z}$ y la función proposicional "x es divisible por y". Ahora si x se reemplaza por un número entero, por ejemplo $x = 5$ resulta la expresión "5 es divisible por y", que obviamente no alcanza a ser proposición puesto que aún contiene una variable sin valor asignado. Si además hacemos $y = 3$, la expresión queda "5 es divisible por 3" que es una proposición Falsa. Usando la misma función proposicional y tomando los valores x=6 e y=5 resulta la proposición "6 es divisible por 2", que es Verdadera. ¿Qué resulta cuando $x = 7$ *e* $y = \sqrt{2}$? La pregunta carece de sentido puesto que $y = \sqrt{2} \notin U$.

NOTACION PARA FUNCIONES PROPOSICIONALES.

A diferencia de las proposiciones que denotábamos por letras minúsculas $p,q,r,...$, una función proposicional se denotará por letras mayúsculas $P,Q,R,...$ y agregaremos entre paréntesis la o las variables que contenga.

Así por ejemplo, la función proposicional "x es un número entero" puede representarse por $P(x)$, o sea escribimos: $P(x)$: "*x es un número entero*"; cuando queremos reemplazar $x = 2$ escribimos: $P(2)$: "2 *es un número entero*" (proposición Verdadera)

Análogamente si $Q(z): z > 2$ *entonces* $Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 2$ es una proposición F.

Sea $R(x,y)$: "*x es divisible por y*" una función proporcional con $U = \mathbf{Z}$. Entonces, $R(4,y)$: "4 *es divisible por y*" es otra función proposicional con una sola variable y. Además $R(4,3)$: "4 *es divisible por* 3" es una proposición Falsa.

EJEMPLO 30: Considere las siguientes funciones proposicionales con $U = \mathbf{Z}$:
$P(x)$: " *x es un número primo*" $\quad$ $Q(y,z)$: " $y-1$ *es múltiplo de* $z+2$"

Recuerde que los múltiplos de un número a son $\ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a\ldots$

Luego se tiene: $P(2)$:"2 *es un número primo*" (proposición V)
$P(9)$:"9 *es un número primo*" (proposición F)
$P(\sqrt{2})$: *no tiene sentido puesto que* $\sqrt{2} \notin U$
$Q(7,1)$: "$7-1$ *es multiplo de* $1+2$" , o sea
$Q(7,1)$: "6 *es multiplo de* 3" (proposición V)
$Q(1,4)$: "$1-1$ *es multiplo de* $4+2$" , o sea
$Q(1,4)$: "0 *es multiplo de* 6" (proposición V)

Usando los conectivos proposicionales, podemos escribir:

- $P(x) \wedge Q(y,z)$:"*x es un número primo y* $y-1$ *es múltiplo de* $z+2$" que es otra función proposicional compuesta.
- $P(4) \wedge Q(2,3)$:"4 *es un número primo y* 1 *es múltiplo de* 5", es una proposición F
- $P(6) \Rightarrow Q(3,2)$: "*Si* 6 *es un número primo entonces* 2 *es múltiplo de* 4", proposición V.

OBSERVACION:

En este ejemplo, las funciones proposicionales $P(x)$ *y* $Q(y,z)$ se pueden tomar como "modelos" proposicionales, puesto que aún cuando ellas sean descritas en las variables x, y *o* z, también podemos interpretarlas usando otras variables o valores específicos dentro del universo respectivo.

Así, conocido P(x): " x es un número primo" debiéramos entender P(t) como "t es un número primo" o bien P(a+2) como "a+2 es un número primo".
Similarmente, $Q(t,v)$; " t-1 es un múltiplo de v+2" como también $Q(t^2, a-1)$: "t^2-1 es múltiplo de $a+1$".
¿A qué corresponden las siguientes funciones proposicionales?
$P(1-t)$; $Q(t^2+1,\ a+1)$; $Q(s-t,\ t+s) \Rightarrow P(s^2+t^2)$

<u>EJERCICIO 14:</u> Considere $U = \{capitales\ y\ países\ del\ mundo\}$ y las funciones proposicionales:

$$P(x,y): "x\ es\ capital\ de\ y"$$
$$Q(z): "z\ está\ en\ América"$$
$$R(u,v): "u\ y\ v\ son\ ciudades\ de\ un\ mismo\ país".$$

Determine el valor de verdad o explique porqué no lo tiene, para las siguientes expresiones lógicas:

a) $P\ (Chile,\ Santiago)$
b) $Q\ (Japón)$
c) $R\,(Valencia,\ Toledo)$
d) $Q\,(Osorno) \vee P(Lima,\ Perú)$
e) $[R\ (Río\ de\ Janeiro,\ Brasilia) \vee Q(Jamaica)] \Rightarrow P(Asunción,\ Bolivia)$

<u>EJERCICIO 15:</u> Considere $U = \mathbb{Q}$ y las funciones proposicionales

$$P(x,y): "\frac{x}{y}\ es\ un\ número\ entero"$$
$$Q(u,v): "u+1 < v-2"$$
$$R(s,t): "s\ pertenece\ a\ [t]" \quad ([t]=clase\ de\ t)$$

Determine el valor de verdad de:

a) Si $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ *entonces* $\left[Q\left(1, \frac{1}{2}\right) \wedge R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right]$

b) $\left[R\left(0, \frac{1}{3}\right) \vee Q\,(1,2)\right] \Leftrightarrow \left[P\left(2, \frac{1}{2}\right) \wedge Q\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right]$

c) $R\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \wedge \left[P(3,1) \Rightarrow \left(P(1,3) \vee Q\left(1, \frac{11}{3}\right)\right)\right]$

Como hemos visto, toda función proposicional se transforma en proposición cuando asignamos a cada variable un valor específico del Universo. Sin embargo, tenemos otra forma de convertir funciones proposicionales en proposición, ahora será mediante el uso de los llamados <u>CUANTIFICADORES.</u>

Un CUANTIFICADOR, es el instrumento que usaremos para cuantificar, es decir , para indicar cierta cantidad de valores de una variable en una función proposicional. Indicadores de cantidad usados en nuestro lenguaje son: todos, muchos, algún, pocos, ninguno, etc. Aquí nos interesará destacar el uso de los cuántificadores TODOS y ALGÚN.

CUANTIFICADOR UNIVERSAL:

Se refiere al uso del cuantificador TODOS, esto es, anteponer a una función proposicional $P(x)$ la expresión "todo x del universo" o "cada x del universo". De este modo, oraciones como "todo x del universo hace que $P(x)$ sea Verdadera" o "para todo $x \in U$, $P(x)$ es verdadera" o "para cada $x \in U$, $P(x)$ es verdadera", se simbolizan por $(\forall x \in U)(P(x))$.

Esta expresión lógica es una proposición Verdadera si efectivamente la función proposicional $P(x)$ se torna verdadera al sustituirle cualquier x del universo y será Falsa cuando $P(x)$ sea falsa para a lo menos un valor x del universo.

EJEMPLO 31:

Consideremos la función proposicional $P(x)$:"x^2 *es positivo*" y el universo $U = \mathbb{N}$
Como se sabe, si $x \in \mathbb{N}$ entonces x es positivo, y el producto entre 2 números positivos $x \cdot x = x^2$ es también positivo.
Es decir, para cada $x \in \mathbb{N}$, la oración "x^2 *es positivo*" es Verdadera
$\therefore (\forall x \in \mathbb{N})$ (x^2 *es positivo*) es una proposición Verdadera.

Ahora tomemos la misma función proposicional, pero con $U = \mathbb{Z}$. Tenemos que $0 \in \mathbb{Z}$ pero $0^2 = 0$ no es positivo, vale decir que la oración "x^2 *es positivo*" no es Verdadera para todos los números enteros; es falsa para $x = 0$.
$\therefore (\forall x \in \mathbb{Z})$ (x^2 *es positivo*) es una proposición Falsa.

EJEMPLO 32:

Consideremos $U = \{2,3,4,5,6\}$ y la función proposicional $Q(x)$: "x *es primo* $\wedge\ x^2 \leq 10$"
Analicemos el valor de verdad de : $(\forall x \in U)\ (Q(x))$

La proposición será Verdadera si cada uno de los elementos del universo hacen que $Q(x)$ sea verdadera.
$Q(2)$: "2 *es primo* $\wedge\ 2^2 \leq 10$" es una proposición verdadera
$Q(3)$: "3 *es primo* $\wedge\ 3^2 \leq 10$" es una proposición verdadera
$Q(4)$: "4 *es primo* $\wedge\ 4^2 \leq 10$" es una proposición falsa. Con esto nos basta para concluir que:
$(\forall x \in U)\ (Q(x))$ es una proposición Falsa.

CUANTIFICADOR EXISTENCIAL:

Se refiere al uso del cuantificador algún o bien existe al menos un, esto es, anteponer a una función proposicional $P(x)$, la expresión "algún x del universo" o "existe al menos un x del universo" o más simplemente "existe un x del universo". De este modo, oraciones como: "algún $x \in U$ hace $P(x)$ Verdadera " o " existe al menos un $x \in U$ tal que $P(x)$ es Verdadera" o bien " existe $x \in U$ tal que $P(x)$ es Verdadera", se simbolizarán por $(\exists x \in U)\ (P(x))$.

Esta expresión lógica es una proposición Verdadera si se puede constatar o mostrar que efectivamente hay un valor x del universo (pudiendo haber más de uno) que al sustituirlo en la función proposicional $P(x)$, ésta resulte una proposición verdadera.

EJEMPLO 33:

Consideremos la proposición $P(x)$: "x *es racional*" y $U = \mathbf{R}$.

La proposición $(\exists x \in U)(P(x))$ es equivalente con $(\exists x \in \mathbf{R})$ $(x\ es\ racional)$ cuyo valor de verdad es V, puesto que $x = \frac{1}{2}$ *es un número real* $\wedge$ $x = \frac{1}{2}$ *es racional.*

No obstante, la proposición $(\forall x \in \mathbf{R})$ $(x\ es\ racional)$ es F, puesto que $x = \sqrt{2} \in \mathbf{R}$, pero $x = \sqrt{2}$ *no es racional*.

EJEMPLO 34:

Consideremos ahora $U = \{2,3,4,5,6\}$ y la función proposicional $Q(x)$: "x *es primo* $x^2 > 30$".

Para determinar el valor de verdad de $(\exists x \in U)(Q(x))$ debemos mostrar por lo menos un elemento del universo que satisfaga $Q(x)$, o sea que haga $Q(x)$ Verdadera.

Si $x = 2$ *entonces* "2 *es primo* $\wedge$ $2^2 > 30$" *es Falso.*
Si $x = 3$ *entonces* "3 *es primo* $\wedge$ $3^2 > 30$" *es Falso.*
Si $x = 4$ *entonces* "4 *es primo* $\wedge$ $4^2 > 30$" *es Falso.*
Si $x = 5$ *entonces* "5 *es primo* $\wedge$ $5^2 > 30$" *es Falso.* y
Si $x = 6$ *entonces* "6 *es primo* $\wedge$ $6^2 > 30$" *es Falso.*

$\therefore$ $(\exists\, x \in U)\ (Q(x)$ *es Falso*

EJERCICIO 16:

a) Considere $U = \{2,3,4,5,6\}$ y $P(x)$:"x *es primo* $\vee$ $x^2 > 30$"
Encuentre el valor de verdad de: a) $(\forall x \in U)\ (P(x))$
b) $(\exists x \in U)\ (P(x))$

b) Considere $U = \mathbf{R}$ y $Q(x): "x+3 > \frac{1}{2}"$

Encuentre el valor de verdad de : a) $(\forall x \in U)\ (Q(x))$

b) $(\exists x \in U)\ (Q(x))$

c) Considere $U = \mathbf{Z}$ y $R(x): "(x \text{ es par} \wedge x > 3) \Rightarrow x \text{ es múltiplo de } 4"$

Encuentre el valor de verdad de: (a) $(\forall x \in U)\ (R(x))$

(b) $(\exists x \in U)\ (R(x))$

Ahora utilizaremos los 2 cuantificadores en funciones proposicionales con más de una variable.

<u>EJEMPLO 35:</u> Si $U = \mathbf{Z}$ y $P(x,y): "x \geq y"$, analizar el valor de verdad de:

a) $(\forall x \in U)(\forall y \in U)(P(x,y))$
b) $(\forall x \in U)(\exists y \in U)(P(x,y))$
c) $(\exists x \in U)(\exists y \in U)(P(x,y))$
d) $(\exists x \in U)(\forall y \in U)(P(x,y))$

<u>SOLUCION:</u>

a) Nos dice que "cualquiera sea x entero y cualquiera sea y entero, se debe cumplir $x \geq y$". Evidentemente esta proposición es Falsa, pues no se cumple para $x = 3$ e $y = 4$

b) "cualquiera sea x entero, existirá un entero y tal que $x \geq y$"
Esta proposición es Verdadera pues para cualquier entero x, bastará con elegir como y al entero $x-1$ y se tendrá $x \geq y$".

c) "existe un entero x y existe un entero y tal que $x \geq y$"
Esta proposición es Verdadera pues efectivamente existen x e y cumpliendo la condición $x \geq y$. Basta elegir $x = 7$ e $y = 3$ para que se cumpla la condición $x \geq y$.

d) "existe un entero x tal que cualquiera sea el entero y se verifica $x \geq y$.
Esta afirmación es Falsa, pues si existiese tal entero x, bastaría con elegir el entero $y = x+1$ y no se verifica $x \geq y$.

<u>OBSERVACIONES:</u>

1) Los ejemplos b) y d) anteriores muestran que no son equivalentes las proposiciones: $(\forall x)(\exists y)\ (P(x,y))$ con $(\exists x)\ (\forall y)(P(x,y))$, pues la primera resultó Verdadera y la segunda Falsa. (En general, no se pueden conmutar los cuantificadores universal y existencial).

2) En el ejemplo 35, podríamos haber omitido la información del universo $U = Z$ si se coloca esta información dentro de cada cuantificador.

Así, podríamos escribir $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{N})\ (x + y = 1)$, destacando un universo $\mathbb{Z}$ para la variable x y un universo $\mathbb{N}$ para la variable y.
¿Qué valor de verdad tiene esta proposición?

3) En el ejemplo a) anterior, en vez de usar un cuantificador universal para cada variable x e y, se suele escribir más suscintamente:

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ (P(x, y))$$

Lo mismo en el ejemplo c) podríamos escribir $(\exists x, y \in \mathbb{Z})\ (P(x, y))$

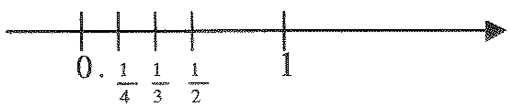
<u>**EJEMPLO 36:**</u> Encontrar el valor de verdad de:

a) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\exists n \in \mathbb{N}) \left(\frac{1}{n} < x\right)$

b) $(\forall x, y \in \mathbb{Q})(\exists z \in \mathbb{Z})\ (x < z \wedge z < y)$

<u>SOLUCION:</u>

a) Este ejemplo muestra una importante propiedad de los números racionales de la forma $\frac{1}{n}$, vale decir, del conjunto $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$



Aquí se establece que "cualquiera sea el número real <u>positivo</u> x, deberá existir un número natural n tal que su recíproco (o inverso multiplicativo) $\frac{1}{n}$ sea menor que x.
Vale decir, si x es un número real positivo, por muy pequeño que sea (o tan cercano a 0 como se quiera), habrá un número $\frac{1}{n}$ más pequeño aún (o más cercano a 0 que x).

Por ejemplo, si $x = \frac{\sqrt{2}}{1000} = 0{,}00141421356\ldots$, debiéramos ser capaces de encontrar n tal que $\frac{1}{n} < \frac{\sqrt{2}}{1000}$. Podemos ver que si $n = 50$ entonces $\frac{1}{n} = 0.02$ que no es menor que $\frac{\sqrt{2}}{1000}$. En cambio si $n = 1000$ entonces $\frac{1}{n} = 0.001$ que es menor que $\frac{\sqrt{2}}{1000} = 0.00141421356\ldots$

El asunto es que para que la proposición propuesta sea Verdadera, lo anterior debería poder hacerse con <u>todo</u> número real positivo x.

Nada sacaríamos con seguir tomando números reales positivos bien particulares (como lo fue

$\frac{\sqrt{2}}{1000}$) para encontrar el número n (en este caso $n = 1000$) tal que $\frac{1}{n} < x$.

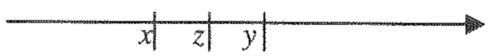
Aún cuando no tenemos desarrollados todos los elementos que requiere esta demostración, podemos intuitivamente proceder como sigue:

- Si x es un número racional, tendremos $x = \frac{p}{q}$, siendo p y q enteros positivos. En ese caso, bastará con elegir $n = q$ por cuanto $\frac{1}{n} = \frac{1}{q} < \frac{p}{q} = x$, *o sea* $\frac{1}{n} < x$.

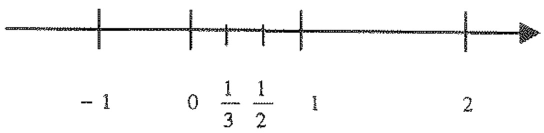
- Si x es un número irracional positivo, podemos imaginar x como un número decimal infinito no-periódico, $x = \alpha, \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ldots$ donde α es la parte entera de x y $\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ldots$ es su parte decimal. En tal caso, el número decimal finito $x' = \alpha, \beta_1$ será un racional menor que x, es decir $x' = \frac{p}{q} < x$ y entonces $\frac{1}{q} < x' < x$ de modo que $n = q$ satisface la condición $\frac{1}{n} < x$.

En consecuencia, la proposición $(\forall x \in R^+)\ (\exists n \in N)\left(\frac{1}{n} < x\right)$ es Verdadera.

b) Consideremos ahora x *e* y dos números racionales cualesquiera, queremos encontrar un número entero z tal que $x < z \ \wedge \ z < y$, vale decir z debe encontrarse entre x *e* y.



Esta afirmación es Falsa y para probarla bastará mostrar dos números x *e* y para los cuales <u>no exista</u> un entero z cumpliendo la condición $x < z \ \wedge \ z < y$. Si elegimos $x = \frac{1}{2}$ *e* $y = \frac{1}{3}$, claramente no hay entero ubicado entre ambos.



<u>EJERCICIO 17:</u> Determine el valor de verdad de:

a) $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ (x + \frac{1}{y} > 1)$

b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{Z})\ (n + m = 1)$

c) $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})\ (n + m = 2)$

d) $(\exists x, y \in \mathbb{Q})\ (x = \frac{1}{y})$

e) $(\exists x\in \mathbf{R})(\exists y\in \mathbf{R})\ (x< y-1 \wedge\ y>2)$

f) $(\forall x\in \mathbb{Z})(\forall n\in \mathbb{N})\ (x+y<0 \Rightarrow x-y<0)$

g) $(\exists x\in \mathbb{Z})(\exists n\in \mathbb{N})\ (x+y<0 \Rightarrow x-y<0)$

h) $(\forall x\in \mathbb{N})(\forall y\in \mathbb{N})(\exists n\in \mathbb{N})\ (x<n\ \wedge\ y<n \Rightarrow x+y>n)$

NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES:

Hemos dejado establecido que al cuantificar las variables en una función proposicional, ésta se transforma en proposición. Luego tiene pleno sentido negar esa proposición y la forma de cómo hacerlo se explica a continuación.

La negación de la proposición $(\forall x\in U)(P(x))$ es equivalente a la proposición $(\exists x\in U)(\overline{P(x)})$, es decir:

$$\overline{(\forall x\in U)(P(x))} \Leftrightarrow (\exists x\in U)(\overline{P(x)})$$

(el cuantificador cambia de universal a existencial y se niega la función proposicional).

Del mismo modo $\overline{(\exists x\in U)(P(x))} \Leftrightarrow (\forall x\in U)(\overline{P(x)})$.

EJEMPLO 37: Negar las siguientes proposiciones:

a) $(\forall x\in \mathbb{Z})\,(x^2>x)$

b) $(\forall x\in \mathbf{R})\,(x\leq \frac{1}{3}\ \vee\ x\geq \frac{1}{2})$

c) $(\forall x\in \mathbb{Z})(\exists n\in \mathbb{N})(x+n=0\ \vee\ x+n>0)$

SOLUCION:

a) Se pide $\overline{(\forall x\in \mathbb{Z})(x^2>x)} \Leftrightarrow (\exists x\in \mathbb{Z})\,(\overline{x^2>x})$

$\Leftrightarrow (\exists x\in \mathbb{Z})\,(x^2\leq x)$

Como se sabe, los valores de verdad de $(\forall x\in \mathbb{Z})(x^2>x)$ y $(\exists x\in \mathbb{Z})(x^2\leq x)$ deben ser opuestos, uno V y el otro F. Vemos que $(\exists x\in \mathbb{Z})(x^2\leq x)$ es V puesto que el número entero 0 satisface la condición $x^2\leq x$, o sea, convierte la función proposicional $x^2\leq x$ en una proposición Verdadera.

Como $(\exists x\in \mathbf{Z})(x^2 \leq x)$ es V, tenemos que su negación $(\forall x\in \mathbf{Z})(x^2 > x)$ es F. Aquí empleamos el hecho que si la negación de p es equivalente con q entonces la negación de q es equivalente con p, y viceversa, es decir $(\overline{p} \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \overline{q})$.

b) $$\overline{(\forall x\in \mathbf{R})(x\leq \frac{1}{3} \vee x \geq \frac{1}{2})} \Leftrightarrow (\exists x\in \mathbf{R})(\overline{x\leq \frac{1}{3}} \wedge \overline{x\geq \frac{1}{2}})$$
$$\Leftrightarrow (\exists x\in \mathbf{R})\left(x>\frac{1}{3} \wedge x<\frac{1}{2}\right)$$

Para determinar el valor de verdad de $(\forall x\in \mathbf{R})(x\leq \frac{1}{3} \vee x \geq \frac{1}{2})$, podemos obtener con mayor facilidad el valor de verdad de su negación $(\exists x\in \mathbf{R})\left(x>\frac{1}{3} \wedge x<\frac{1}{2}\right)$ que resulta V, pues $x=\frac{5}{12}$ satisface las condiciones $x>\frac{1}{3}$ y $x<\frac{1}{2}$.

Luego el valor de verdad de $(\forall x\in \mathbf{R})(x\leq \frac{1}{3} \vee x \geq \frac{1}{2})$ es Falso.

c) $$\overline{(\forall x\in \mathbf{Z})(\exists n\in \mathbb{N})(x+n=0 \vee x+n>0)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists x\in \mathbf{Z})(\forall n\in \mathbb{N})\overline{(x+n=0 \vee x+n>0)}$$
$$\Leftrightarrow (\exists x\in \mathbf{Z})(\forall n\in \mathbb{N})(x+n\neq 0 \wedge x+n\leq 0)$$

Analicemos ahora el valor de verdad de esta última expresión.

- Si $x\in \mathbf{Z}^-$ (o sea x es entero negativo) entonces $-x\in \mathbb{N}$ (o sea es un número natural) y sucede que $x+(-x)=0$, es decir no se satisface la condición $x+n\neq 0$ (tomando $n=-x$), o sea que $x+n\neq 0 \wedge x+n\leq 0$ es Falsa. Luego, ningún entero negativo nos sirve para concluir la veracidad de la expresión.

- Si $x=0$ y n es un natural cualquiera, entonces $x+n=0+n=n\neq 0$ (o sea se cumple la primera condición), pero $x+n=0+n=n>0$, o sea no se cumple la segunda condición.

- Si $x\in \mathbf{Z}^+$ (o sea x *es* entero positivo o natural) y n es un número natural cualquiera, entonces $x+n$ será otro natural, de donde se deduce que $x+n>0$ y no se cumple $x+n\leq 0$.

En consecuencia, no es cierto que $(\exists x\in \mathbf{Z})(\forall n\in \mathbb{N})(x+n\neq 0 \wedge x+n\leq 0)$, o sea, se trata de una proposición Falsa.

EJERCICIO 18: Niegue las siguientes proposiciones y simplifique el resultado. Determine además el valor de verdad, usando la proposición original o su negación en cada caso:

a) $(\exists x \in \mathbf{Q})(x^2 = 9)$
b) $(\forall x \in \mathbf{Q})(x - 3 \in \mathbb{Z} \ \vee \ 3 - x \in \mathbb{N})$
c) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(x > y - 1 \ \wedge \ x > 0)$
d) $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x \cdot y > 0 \ \vee \ x \cdot y < 0)$
e) $(\exists x \in \mathbf{Q})(\exists y \in \mathbf{I})(x + y \in \mathbf{Q})$
f) $(\exists x \in \mathbf{Q})(\forall y \in \mathbf{I})(x \cdot y \in \mathbf{I})$

EJERCICIO 19: ¿Cuál de las siguientes expresiones es la negación de la proposición

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x - y > 0 \ \vee x^2 > y^2)\ ?$$

a) $(\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x - y > 0 \ \wedge \ x^2 \leq y^2)$

b) $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x - y \leq 0 \ \vee \ x^2 \leq y^2)$

c) $(\exists x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x - y > 0 \ \vee \ x^2 > y^2)$

d) $(\exists x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x - y \leq 0 \ \vee \ x^2 < y^2)$

e) Ninguna de las anteriores

EJERCICIO 20: Exprese las siguientes proposiciones mediante símbolos lógicos:

a) Todo número natural es menor que su cuadrado.
b) Existe un número racional comprendido entre a y b.
c) Para cada número entero existe otro tal que sus cuadrados son distintos.
d) Existe un número entero que es menor a cualquier número natural.
e) Existen dos números naturales tales que sus cubos difieren en 3 unidades o sus cuadrados difieren en 2 unidades.
f) Todo número natural es par o es impar.

CAPITULO II

ELEMENTOS DE TEORIA DE CONJUNTOS

Un concepto básico o primitivo en esta unidad será el de **conjunto**, vale decir, conjunto es un concepto que no admite definición. Simplemente lo "entendemos" mediante sinónimos como colección o reunión de objetos. Los objetos que conforman un conjunto se llaman **elementos** del conjunto y se representan generalmente por letras minúsculas, mientras que un conjunto se denota generalmente por letras mayúsculas. Así, $A = \{a, b, 1, \neq, \$\}$ es un conjunto formado por los objetos $a, b, 1, \neq$ y $\$$. Estos 5 objetos son los elementos del conjunto. Si x es un elemento de un conjunto A, se dice que "x pertenece a A" y se denota $x \in A$. En caso contrario, es decir cuando x no es un elemento de A, decimos que "x no pertenece a A" y se denota $x \notin A$ (o sea que $\overline{x \in A} \Leftrightarrow x \notin A$)

Ejemplos de conjuntos son: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$$B = \{Arica, Iquique, Putre\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{Q} \ / \ \frac{1}{x} \in \mathbf{Z}\}$$

$$D = \{x \in \mathbf{Z} \ / \ \exists y \in \mathbf{Z} \wedge x + y = 4\}$$

Los conjuntos A y B anteriores se caracterizan por mostrar explícitamente sus elementos. En tal caso se dice que los conjuntos se representan por EXTENSIÓN. En cambio, los conjuntos C y D no muestran explícitamente sus elementos, sino que presentan una o más características o condiciones (que son funciones proposicionales) que deben satisfacer (o hacer Verdaderas) únicamente los elementos del conjunto. En este caso se dice que el conjunto se representa por COMPRENSIÓN.

EJEMPLO 38. Expresar por comprensión los siguientes conjuntos: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; $C = \{-1, 0, 1\}$

SOLUCION : $A = \{\ x \in Z\ /\ x\ es\ par \wedge x \geq 2\ \wedge\ x \leq 10\ \}$

$B = \{\ x \in Z\ /\ x\ primo\ \wedge\ x \leq 22\ \}$

$C = \{\ x \in Z\ /\ x^2 \leq 1\ \}$

EJEMPLO 39. Expresar por extensión los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in Q\ /\ \dfrac{1}{x} \in Z\ \}$; $B = \{x \in Z\ /\ (\exists y \in \mathbb{N})\ \wedge\ x + y = 4\ \}$

SOLUCION: $A = \left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, ...\right\}$ pues estos son los únicos números racionales cuyo inverso multiplicativo es un entero.

$B = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ pues para cada uno de ellos efectivamente existe un número natural y de modo que su suma sea 4.

Así, para x = 3 , tenemos y = 1

para x = 2, tenemos y = 2

para x = 1, tenemos y = 3

para x = 0, tenemos y = 4

para x = -1, tenemos y = 5

etc.

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Un conjunto se dice que es FINITO si la cantidad de elementos que tiene se puede representar por un número natural o cero. Así, por ejemplo $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ es un conjunto finito, pues tiene exactamente $n = 5$ elementos.

Un conjunto que no es finito, se dice que es INFINITO, o sea que no existe número natural que represente la cantidad de elementos que tiene. Por ejemplo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ son todos conjuntos infinitos, lo mismo que $\left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, ...\right\}$ y el conjunto de los números primos.

Generalmente usamos puntos suspensivos para representar por extensión un conjunto infinito.

CONJUNTO VACIO:

Siempre hemos entendido al conjunto vacío como aquel conjunto que "no tiene elementos". Como idea es correcta, tiene 0 elementos y es un conjunto finito. Sin embargo, podemos representar este conjunto por comprensión de varias formas, como por ejemplo,

$\{x \in \mathbf{Z} \ / \ x \cdot 0 = 4 \}$ ó $\{x \in \mathbf{Q} \ / \ x^2 = 2 \}$ ó $\{x \in \mathbb{N} \ / \ x > 7 \ \wedge \ x < 2 \}$

En ninguno de los tres casos existe un elemento x que satisfaga la o las condiciones.

El conjunto vacío, que por lo demás es único, se denota por la letra griega ϕ ó bien como $\{ \ \}$.

CONJUNTO UNIVERSO.

A veces hemos oído de la existencia de un conjunto "que todo lo contiene" y es llamado conjunto universo. Se puede demostrar (no es el objetivo de este curso) que tal conjunto universal no existe. Lo que sí existe es un conjunto universo relativo, entendido como un marco referencial sobre el tipo de objeto con el que estamos tratando en un momento dado. Por ejemplo, cuando tratamos con números, nuestro universo puede ser **R** o bien **Z**, dependiendo de lo que queramos hacer. Si queremos tratar con estudiantes, nuestro universo puede ser el de los estudiantes de la Universidad de Tarapacá o bien el de los estudiantes de colegios municipalizados de todo Chile, dependiendo del alcance que queremos darle a nuestro estudio.

En cualquier caso, denotaremos que U al conjunto universo (relativo). Siempre debiéramos tener claro con qué universo estamos trabajando. A veces se destaca al inicio, como por ejemplo:

Sea $U = \{estudiatesUTA\}$ y $sean$ $A = \{estudiantes \ de \ Ing. Comercial\}$

$$B = \{estudiantes \ de \ Ingeniería \ Civil\}$$

Se entiende que los estudiantes en A y en B deben ser estudiantes de la Universidad de Tarapacá, pues ese es nuestro universo.

En otras ocasiones, el conjunto universo es destacado dentro del propio conjunto que se define, como por ejemplo:

$C = \{estudiantes \ UTA / sean \ estudiantes \ de \ Ing. Comercial\}$ o bien $D = \{x \in \mathbf{Z} \ / \ x^2 \leq 7 \}$

En el conjunto C anterior, el universo es $U = \{estudiantes \ UTA\}$ mientras que en el conjunto D el universo es $U = \mathbf{Z}$.

EJEMPLO 40:

Considere los conjuntos $A = \{2, 4, 8, 16, ..., 512\}$ formado sólo por potencias de 2,

$B = \{1, \phi, \{\phi\}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} \ / -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x > 2 \}$

El conjunto A expresado por comprensión es $A = \{2^n / 1 \leq n \leq 9\}$, que además es finito.

El conjunto B es finito y con 3 elementos, a saber, el número 1, el conjunto vacío ϕ y el conjunto $\{\phi\}$ cuyo único elemento es ϕ. Luego, son Verdaderas las siguientes tres proposiciones: $1 \in B$, $\phi \in B$ y $\{\phi\} \in B$.

Analicemos ahora el conjunto C. Sus elementos serán números enteros que satisfagan la función proposicional $-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x > 2$ (la expresión $-1 \leq x \leq 3$ debe entenderse como la conjunción $-1 \leq x \wedge x \leq 3$). Si $x = 0$, la proposición resultante es $-1 \leq 0 \leq 3 \Rightarrow 0 > 2$ con antecedente V y consecuente F. Luego la implicación es F. Se concluye que $0 \notin C$.

Si $x = 1$, tenemos $-1 \leq 1 \leq 3 \Rightarrow 1 > 2$, Falsa por la misma razón anterior, o sea $1 \notin C$

Si $x = 2$, tenemos $-1 \leq 2 \leq 3 \Rightarrow 2 > 2$, Falsa también, luego $2 \notin C$.

Si $x = 3$, tenemos $-1 \leq 3 \leq 3 \Rightarrow 3 > 2$, ahora Verdadera pues el antecedente es V y el consecuente es V. Luego $3 \in C$.

Si $x = 4$, tenemos $-1 \leq 4 \leq 3 \Rightarrow 4 > 2$, ahora el antecedente es F y el consecuente V, luego la implicación es V y $4 \in C$.

El mismo análisis muestra que $5 \in C$, $6 \in C$,...

Si $x = -1$ *queda* $-1 \leq -1 \leq 3 \Rightarrow -1 > 2$ $(V \Rightarrow F)$ *que es* F, *o sea*, $-1 \notin C$

Si $x = -2$ *queda* $-1 \leq -2 \leq 3 \Rightarrow -2 > 2$ $(F \Rightarrow F)$ *que es* V, *o sea*, $-2 \in C$

Si $x = -3$ *queda* $-1 \leq -3 \leq 3 \Rightarrow -3 > 2$ $(F \Rightarrow F)$ *que es* V, *o sea*, $-3 \in C$

Continuando se tiene $-4 \in C$, $-5 \in C$,...

$\therefore C = \{..., -5, -4, -3, -2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ y es un conjunto infinito.

EJERCICIO 21.

Considere los conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; $B = \{1, 3, 7, 15, ..., 511\}$,

$C = \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \phi\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ \exists y \in \mathbb{N} \wedge x - y \geq 2 \}$, $E = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x + \frac{1}{x} \leq 0 \}$,

$F=\{x\in \mathbb{N}\ /\ \exists y\in \mathbb{N}\ \wedge\ y\neq 1\ \wedge\ \frac{x}{y}\in \mathbb{N}\ \}$, $G=\{x\in \mathbb{R}\ /\ x^2+2x+2=0\ \}$

$H=\{x\in\ \mathbb{Q}\ /\ \exists y\in\ \mathbb{Q}\ \ \wedge\ x^2=y^2\ \}$, $I=\{x\in \mathbb{Q}\ /\ x^2=\frac{1}{4}\ \vee\ x^2=\frac{1}{8}\ \}$

$J=\{x\in \mathbb{Z}\ /\ \exists y\in \mathbb{Z}\ \ \wedge\ x^2+y^2\leq 10\ \}$

a) Exprese por comprensión los conjuntos A y B

b) Exprese por extensión los conjuntos D,E,F,G,H,I,J

c) Determine si son V o F las siguientes proposiciones:

$127\in B,\quad \{\phi\}\notin C,\quad 2\in D,\quad -1\in E,\quad 6\in F,\quad 1\notin G,\quad 0\notin H,\quad \frac{1}{2}\in I,\quad 0\notin J.$

d) ¿Cuáles conjuntos son finitos y cuáles son infinitos?

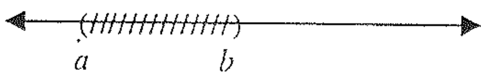
INTERVALOS EN R

Tomando como universo $U=\mathbb{R}$ y dos números a y b siendo $a<b$ definamos los siguientes conjuntos infinitos en R:

- El intervalo abierto de extremos (o límites) a y b es:

  $(a,b)=\{x\in\ \mathbb{R}\ /\ a<x<b\ \}$

  Se trata del segmento de la recta real que contiene todos los números reales comprendidos entre a y b, excepto los números a y b.

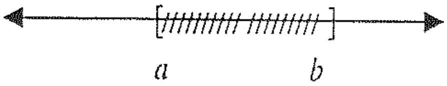


  La notación (a,b) a veces es presentada como $]a,b[$

  Recuerde que la expresión $a<x<b$ es equivalente con $a<x\wedge x<b$

- El intervalo cerrado de extremos (o límites) a y b es:

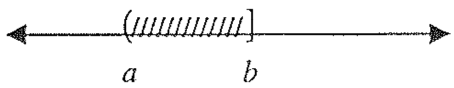
  $[a,b]=\{x\in R/a\leq x\leq b\}$



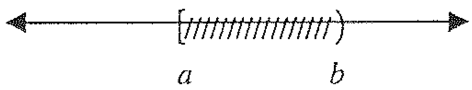
  Este intervalo incluye tanto a como b.

- Los intervalos semiabiertos (o semicerrados) de extremos o límites a y b como:

$(a,b\,] = \{x \in \mathrm{R}\ /\ a \leq x < b\ \}$

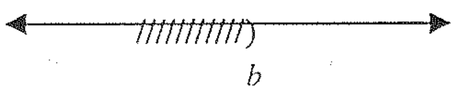


$[a,b) = \{x \in \mathrm{R}\ /\ a \leq x < b\ \}$

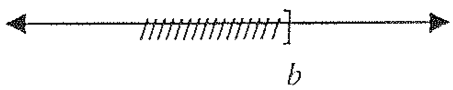


- Los intervalos infinitos de extremo superior (o límite superior) b :

$(-\infty,b) = \{x \in \mathrm{R}\ /\ x < b\ \}$

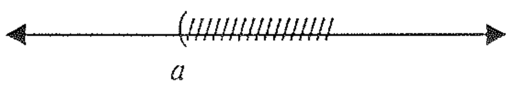


$(-\infty,b\,] = \{x \in \mathrm{R}\ /\ x \leq b\ \}$

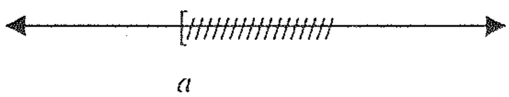


- Los intervalos infinitos de extremo inferior (o límite inferior) a:

$(a,+\infty) = \{x \in \mathrm{R}\ /\ x > a\ \}$



$(a,+\infty) = \{x \in \mathrm{R}\ /\ x \geq a\ \}$



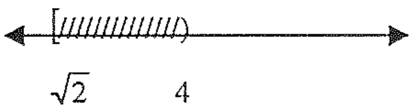
<u>OBSERVACION:</u>

Los intervalos son conjuntos infinitos que no admiten una representación por extensión ya que no es posible enumerar uno a uno sus elementos. Esto marca una diferencia con otros conjuntos infinitos, como $\mathbb{N}$ que se puede representar como $\{1,2,3,\ldots\}$.

Cada vez que usamos un paréntesis redondo "(" ó ") ", debemos tener presente que se trata de un intervalo "abierto" que <u>no</u> incluye al extremo correspondiente. En cambio, el uso de paréntesis tipo corchete "[" ó "]" , nos indica que se trata de un intervalo "cerrado", que incluye el extremo o límite correspondiente.

EJEMPLO 41:

a) El intervalo $\lfloor\sqrt{2},4\rfloor = \{x \in \mathrm{R} \; / \; \sqrt{2} \leq x < 4 \; \}$ se representa gráficamente:

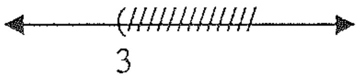


Luego, $\sqrt{2} \in \lfloor\sqrt{2},4\rfloor$ es una proposición V, $4 \in \lfloor\sqrt{2},\ 4)$ es F y $\sqrt{3} \in \lfloor\sqrt{2},\ 4\rfloor$ es V

b) El conjunto de números reales mayores que 3 es:

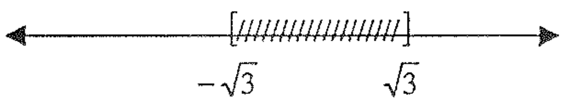
$\{x \in \mathrm{R} \; / \; x > 3 \; \} = (3,+\infty)$

y se representa gráficamente por



c) El conjunto de números reales cuyo cuadrado es menor o igual a 3 es :

$\{x \in \mathrm{R} \; / \; x^2 \leq 3 \; \} = \quad \{x \in \mathrm{R} \; / \; -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \; \} = \lfloor -\sqrt{3},\sqrt{3} \rfloor$



SUBCONJUNTO

Sean A y B dos conjuntos en un universo U. Diremos que A es subconjunto de B si todo elemento de A es también elemento de B. En símbolos se escribe $A \subseteq B$.

Otras formas equivalentes para indicar que "A es subconjunto de B" son: A está contenido en B, A está incluído en B, B contiene a A, B incluye a A ó B es superconjunto de A.

Simbólicamente tenemos: $A \subseteq B$ ssí $(\forall x \in U)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Aprovechemos nuestros conocimientos de lógica para negar la expresión anterior: A no es subconjunto de B ssi $(\exists x \in U)(x \in A \wedge x \notin B)$ (según la Tautología N°22).

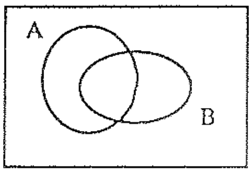
$\therefore \overline{A \subseteq B} \Leftrightarrow A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x \in U)(x \in A \ \wedge x \notin B)$

(se usa el símbolo $\not\subset$ para simbolizar "no contenido")

Representemos gráficamente lo anterior, usando lo que se denomina un "diagrama de Venn": el universo se dibuja como un rectángulo y en su interior se dibujan curvas cerradas (círculos, cuadrados, triángulos u otras) para representar los conjuntos. Cada elemento del universo es un punto dentro del rectángulo y cada elemento de un conjunto es un punto dentro de la curva que lo representa.

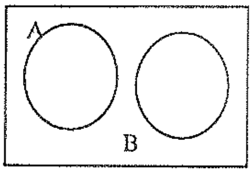
Los siguientes diagramas de Venn muestran un universo con dos conjuntos A y B con diferentes características:

U



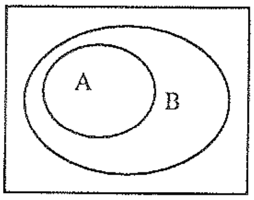
A y B tienen puntos en común

U



A y B no tienen puntos en común

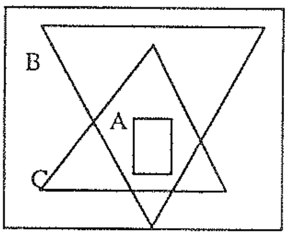
U



A es subconjunto de B o $A \subseteq B$

$A \subseteq B$

U



$A \subseteq B \wedge A \subseteq C$

$B \not\subset C$ *pues existen puntos B que no pertenecen a C*

$C \not\subset B$ *pues existen puntos C que no pertenencen a B*

Nótese que ninguna curva que represente un conjunto puede salir fuera del rectángulo U pues se entiende que nuestro marco referencial es U ; nada existe fuera de U .

EJEMPLO 42:

$$\text{Sea } U = \{1, 2, ..., 20\} \quad y \quad sean \quad A = \{2,4,6,...,20\}$$

$$B = \{x \in U / x^2 \leq 17\} \text{ , } C = \{x \in U / x \text{ es múltiplo de } 4\}$$

Expresando B y C por extensión tenemos: $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Luego se tiene $C \subseteq A$ pues todo número en C es un número par comprendido entre 2 y 20.

Por otro lado, $B \not\subset A$ *pues* $1 \in B \wedge 1 \notin A$ *y por lo mismo* $B \not\subset C$.

EJEMPLO 43:

Encontremos todos los subconjuntos de $A = \{1, a, b\}$

Primeramente tomamos los subconjuntos de A que tienen un único elemento (estos conjuntos se denominan SINGLENTON o UNITARIOS) a saber, $\{1\}, \{a\}, \{b\}$. Nótese que $\{1\} \subseteq A$ pues el único elemento que tiene $\{1\}$, o sea el número 1, también es elemento de A. Similarmente $\{a\} \subseteq A$ y $\{b\} \subseteq A$.

Enseguida tomemos los subconjuntos de A que tienen 2 elementos; estos son $\{1,a\}$, $\{1,b\}$ y $\{a,b\}$. Nótese que $\{1,b\} \subseteq A$ pues tanto 1 como b son también elementos de A .

Ahora consideramos los subconjuntos de A que tienen 3 elementos; en este caso existe sólo uno $\{1, a, b\}$, es decir, el mismo A. En efecto $\{1, a, b\} \subseteq A$ *pues* $1 \in A \wedge a \in A \wedge b \in A$

Este último hecho se expresa más generalmente como: "Todo conjunto es subconjunto de si mismo" que en símbolos es: $(\forall A)(A \subseteq A)$ (La demostración de este resultado se hará más adelante)

Completamos el ejemplo con el último subconjunto de A , aquel que no tiene elementos, vale decir, el conjunto vacío ϕ . Estamos afirmando que $\phi \subseteq A$ ¿porqué?

La justificación o demostración de este hecho se apoya nuevamente en la lógica: $\phi \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \phi \Rightarrow x \in A)$. Para que esta afirmación sea Verdadera, la implicación debe ser Verdadera con cualquier valor de x. Como el antecedente $x \in \phi$ es Falso para cualquier valor de x (ϕ no tiene elementos) entonces la implicación será Verdadera para cualquier valor de x.

Luego se tiene $(\forall A)(\phi \subseteq A)$.

En consecuencia, todos los subconjuntos de $A = \{1, a, b\}$ son:

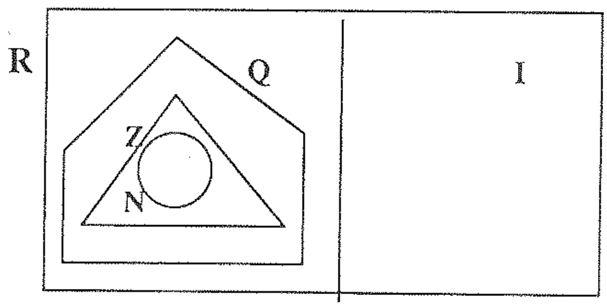
$$\phi,\ \{1\},\ \{a\},\ \{b\},\ \{1,a\},\ \{1,b\},\ \{a,b\}\ y\ el\ \ propio\ A.$$

EJEMPLO 44:

En relación con los conjuntos numéricos, se tienen las siguientes inclusiones:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Z} \quad ; \quad \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{Q} \quad ; \quad \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R} \quad ; \quad \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$$

Considerando como universo al conjunto R podemos representar las relaciones anteriores usando diagramas de Venn.



EJEMPLO 45:

Usando la notación vista para intervalos, tenemos:

$$[1,3] \subseteq [1,5) \quad ; \quad \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \subseteq \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \quad ; \quad (0,1) \subseteq (0,1]$$

(el alumno puede comprobar la veracidad de esas proposiciones, dibujando en cada caso los intervalos en la recta real).

EJERCICIO 22:

a) Sean $U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, $A = \{1, 3, 5, \ldots, 19\}$, $B = \{x \in U / x\ es\ \ primo \wedge x \leq 20\}$

$C = \{x \in U / x^2 \geq 10\}$, $D = \{x \in U / x \leq 5 \Rightarrow 2 \leq x^2 \leq 15\}$

Se pide:

- expresar B, C y D por extensión.
- Determinar si son V o F las relaciones $A \subseteq B$; $B \subseteq A$; $C \subseteq A$; $A \subseteq C$; $D \subseteq C$; *etc.*

b) Determinar si son V o F las siguientes proposiciones:

$$\left[0,\frac{1}{2}\right) \subseteq \left(0,\frac{1}{2}\right] \quad ; \quad \left(-\infty,-\frac{3}{5}\right) \subseteq (-\infty,-1) \quad ; \quad \left[\frac{1}{3},+\infty\right) \subseteq \left(\frac{1}{4},+\infty\right)$$

c) Encuentre todos los subconjuntos de $A = \{0,\ \phi,\ 1,\ \{1\}\}$

d) Determine si son V o F: $\quad \phi \subseteq \phi$; $A \subseteq \phi$; $\phi \subseteq \{\phi\}$; $\{\phi\} \subseteq \phi$; $\{\phi\} \subseteq \{\phi, \{\phi\}\}$

IGUALDAD DE CONJUNTOS:

Sean A y B dos conjuntos en un universo U.

Se dice que A es igual a B, en símbolos $A = B$, si A y B tienen exactamente los mismos elementos.

Simbólicamente se escribe: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

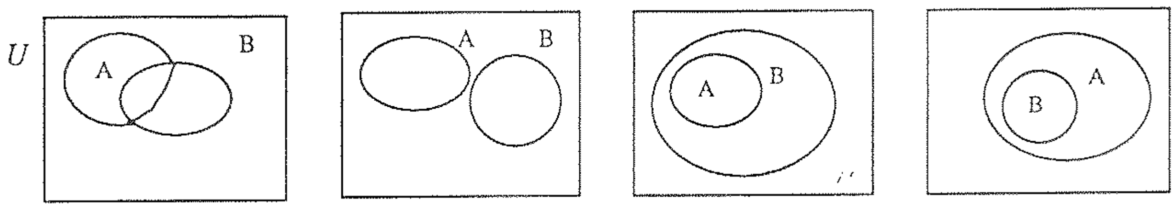
(todo elemento de A es también elemento de B y vice-versa)

Negando la relación anterior, se tiene: $A \neq B \Leftrightarrow (\exists x \in U)\ ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B))$

según Tautología N° 29

($A \neq B$ se lee "A distinto de B")

Para representar conjuntos A y B distintos, se pueden usar diagramas como los siguientes:



$A \neq B$ $\qquad$ $A \neq B$ $\qquad$ $A \neq B \ \wedge\ A \subseteq B$ $\qquad$ $A \neq B \ \wedge\ B \subseteq A$

EJEMPLO 46:

El concepto de igualdad de conjuntos lo hemos manejado intuitivamente cuando hemos pasado de una representación por comprensión a una por extensión y vice-versa.

Así, $A=\{x\in \mathbb{Z} / x \leq 3 \Rightarrow x^2 >1\}$ tiene exactamente los mismos elementos que $B=\{\ldots,-4,-3,-2,2,3,4,\ldots\}$ (Verifique Ud.). Luego $A=B$

Lo mismo sucede entre $\mathbb{Q}$ y $D=\{x\in \mathbb{R} / x$ es decimal finito $\vee$ x es decimal infinito periódico $\}$.

Es decir, $\mathbb{Q}$ y D tienen exactamente los mismos elementos, o sea, $\mathbb{Q}=D$

De la definición de igualdad entre dos conjuntos A y B se tiene:

$A=B \Leftrightarrow (\forall x\in U)(x\in A \Leftrightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow (\forall x\in U)(x\in A \Rightarrow x\in B \;\wedge\; x\in B \Rightarrow x\in A)$ según Tautología N°28

$\Leftrightarrow (\forall x\in U)(x\in A \Rightarrow x\in B) \wedge (\forall x\in U)(x\in B \Rightarrow x\in A)$

(una propiedad del cuantificador universal es:

$$(\forall x)[P(x)\wedge Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \wedge (\forall x)(Q(x))$$

$\Leftrightarrow A\subseteq B \;\wedge\; B\subseteq A$

Se tiene entonces: $\boxed{A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A}$

Esta propiedad será usada en reiteradas oportunidades para demostrar igualdad entre dos conjuntos.

EJEMPLO 47:

Sean $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{1,2,3,5\}$

Note Ud. que en este caso $A\neq B$ *pues* $(\exists x)$ $(x\in A \wedge x\notin B)$ ¿cuál es x?

También $(\exists y)(y\in B \wedge y\notin A)$ ¿cuál es y?

Por otro lado, $C=\{1,2,3,4\}$ y $D=\{3,4,1,2\}$ son conjuntos iguales $(C=D)$, pues tienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden en que ellos aparecen. El orden dentro de un conjunto no tiene ninguna relevancia.

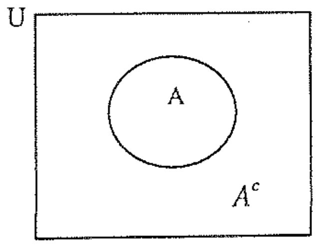
COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sea A un conjunto en un universo U.

Se define el COMPLEMENTO de A como otro conjunto, denotado por A^c (también se usa A') y cuyos elementos son todos aquellos del universo que no pertenecen a A.

Simbólicamente se tiene: $\boxed{A^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}}$

El diagrama de Venn que muestra un conjunto A y su complemento A^c es:



De acuerdo con la definición de A^c, tenemos: $x \in A^c$ ssi $x \notin A$ (es decir, pertenecer al complemento de A es equivalente a no pertenecer a A). Negando ambos lados (según Tautología N° 38), tenemos $x \notin A^c$ ssi $x \in A$, (es decir, no pertenecer al complemento de A es equivalente a pertenecer a A).

Además, para cada $x \in U$ se tiene que $x \in A$ o bien $x \notin A$, lo que implica que $x \in A \vee x \in A^c$ es una Tautología del tipo $p \vee \overline{p}$.

EJEMPLO 48: Sea $U = \{1, 2, \ldots, 20\}$ y $A = \{x \in U \,/\, x \text{ es primo} \wedge x^2 \geq 24\}$

El conjunto A expresado por extensión es $A = \{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

Tenemos $x \in A$ ssi x es primo $\wedge$ x ≥ 24

Luego: $x \notin A$ ssi $x \in A^c$ ssi x no es primo $\vee$ $x^2 < 24$

$$\therefore\ A^c = \{x \in U \,/\, x \text{ no es primo} \vee x^2 < 24\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$$

<u>EJEMPLO 49</u>: Encontrar el complemento de los siguientes conjuntos considerando $U = \mathbf{R}$

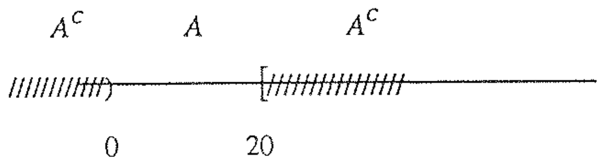
$(a)\ A = [0,\ 20)$ $\quad (b)\ B = \left(-\infty,\ \dfrac{1}{4}\right)$ $\quad (c)\ C = \left[-\sqrt{2},\ +\infty\right)$ $\quad$ (d) $\mathbf{Q}$

<u>SOLUCION:</u>

(a) $\quad x \in [0,\ 20) \Leftrightarrow 0 \le x < 20 \Leftrightarrow 0 \le x \wedge x < 20$

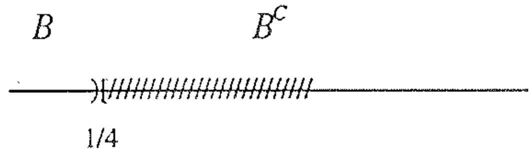
$\therefore\ x \notin [0, 20) \Leftrightarrow 0 > x \vee x \ge 20$

$\therefore\ A^C = [0,20)^C = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x < 0 \quad \vee \quad x \ge 20\ \}$



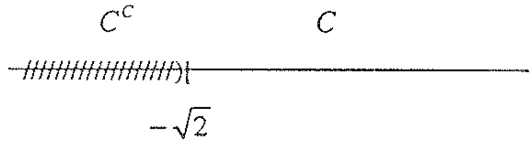
(b) $\quad x \in (-\infty,\ \frac{1}{4}) \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$ $\qquad \therefore\ x \notin (-\infty,\ \frac{1}{4}) \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{4}$

Luego se tiene $\quad B^C = \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)^c = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \ge \dfrac{1}{4}\ \} = \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$



(c) $\quad x \in \left[-\sqrt{2}, +\infty\right) \Leftrightarrow x \ge -\sqrt{2}$ $\qquad \therefore\ x \notin \left[-\sqrt{2},\ +\infty\right) \Leftrightarrow x < -\sqrt{2}$

$\therefore\ C^C = \left[-\sqrt{2}, +\infty\right)^C = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x < -\sqrt{2}\ \} = (-\infty, -\sqrt{2})$



(d) $\quad \mathbf{Q}^{\,c} = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \notin \mathbf{Q}\ \} = \mathbf{I}$, pues todo número real que <u>no es</u> <u>racional</u> es un <u>irracional.</u>

Algunas propiedades del complemento son:

- $\phi^C = U$

  En efecto, $\quad x \in \phi^C \Leftrightarrow x \notin \phi \Leftrightarrow T \qquad (T \text{ es } Tauto\text{logía})$

  $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow x \in U \quad (\text{también } tauto\text{logía})$

  $\therefore\ (\forall x)\ (x \in \phi^C \Leftrightarrow x \in U\ )$ y entonces $\phi^C = U$

- $U^C = \phi$

  En efecto, $\quad x \in U^C \Leftrightarrow x \notin U \Leftrightarrow C \qquad (C \text{ es contradicción})$

  $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow x \in \phi \quad (\text{también contradicción})$

  $\therefore\ (\forall x)(x \in U^C \Leftrightarrow x \in \phi)$ y entonces $U^C = \phi$

- $(A^C)^C = A$

  En efecto, $x \in (A^C)^C \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$

  $\therefore\ (\forall x)\ (x \in (A^C)^C \Leftrightarrow x \in A)$ y entonces $(A^C)^C = A$

- $A = B \Leftrightarrow A^C = B^C$ (conjuntos iguales tienen complementos iguales y viceversa)

Observe Ud. que esta propiedad es una equivalencia entre dos proposiciones p y q, siendo $p : A = B$ y $q : A^C = B^C$, es decir se tiene una propiedad del tipo $p \Leftrightarrow q$ que es equivalente (según Tautología Nº 28) a $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$.

Luego, procederemos separadamente con cada una de las dos implicaciones referidas:

(a) $A = B \Rightarrow A^C = B^C$

Aquí, el antecedente o hipótesis es $A = B$ o sea, $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ o equivalentemente $(\forall x)(x \notin A \Leftrightarrow x \notin B)$, en tanto que el consecuente es $A^C = B^C$, es decir, $(\forall x)(x \in A^C \Leftrightarrow x \in B^C)$.

Ahora bien, $x \in A^C \Leftrightarrow x \notin A$, según la definición de complemento

$\Leftrightarrow x \notin B$, por hipótesis

$\Leftrightarrow x \in B^C$, según la definición de complemento

$\therefore (\forall x)(x \in A^C \Leftrightarrow x \in B^C)$

$\therefore A^C = B^C$

(b) $A^C = B^C \Rightarrow A = B$

Ahora la hipótesis es $A^C = B^C$, o sea $(\forall x)(x \in A^C \Leftrightarrow x \in B^C)$, o equivalentemente $(\forall x)(x \notin A^C \Leftrightarrow x \notin B^C)$ según Tautología N°38.

La tesis es $A = B,\ o\ sea,\ (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Ahora bien, $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^C$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow x \notin B^C$ (por hipótesis)

$\Leftrightarrow x \in B$ (definición de complemento)

$\therefore\ (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$\therefore\ A = B$

OPERACIONES CON CONJUNTOS.

En el capítulo de Lógica, presentamos secuencialmente los conceptos de "proposición", "negación de una proposición" y "conectivos proposicionales".
El mismo orden de presentación estamos siguiendo ahora, vale decir, el concepto de "conjunto", luego "complemento de un conjunto" y ahora corresponde a "operaciones con conjuntos". El objetivo es obtener nuevos conjuntos a partir de dos conjuntos A y B en un universo U. Las operaciones que estudiaremos no son desconocidas para el alumno, pues éstas se introducen en la enseñanza básica, nos referimos a la UNION, la INTERSECCION, la DIFERENCIA y la DIFERENCIA SIMETRICA entre dos conjuntos.
Como vemos, se trata nuevamente de operaciones "binarias" que son aquellas que se efectúan entre dos conjuntos. (Los conectivos lógicos son operaciones binarias entre proposiciones y las operaciones aritméticas son opciones binarias entre números).

UNION DE CONJUNTOS.

Sean A y B dos conjuntos en un universo U.

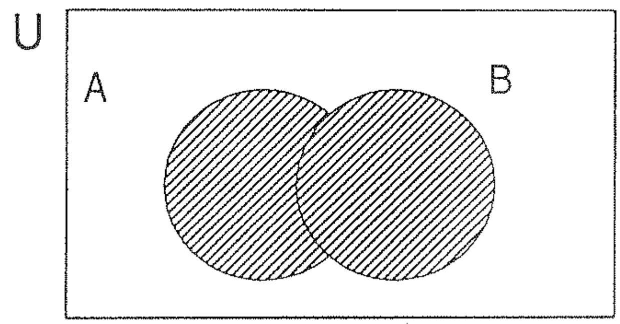
La unión de A y B es otro conjunto que se simboliza por $A \cup B$, cuyos elementos son todos aquellos que pertenecen a A o que pertenecen a B.

$$\boxed{\therefore\ A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \vee x \in B\}}$$

Luego tenemos: $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$

y negando: $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \ \vee \ x \notin B$

El diagrama de Venn que representa la unión de A y B es:



$A \cup B$

Obsérvese la relación que existe entre la unión ($\cup$) de conjuntos y el conectivo lógico disyunción ($\vee$). Es importante entender y recordar esta relación ya que será permanentemente usada.

EJEMPLO 50.

Sean $U = \{1, 2, 3, ..., 20\}$, $A = \{1, 3, 7, 10, 15\}$

$B = \{1, 2, 4, 6, 9, 10, 12\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 18, 20\}$

Entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 18, 20\}$

Además, $(A \cup B)^C = \{5, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$(A \cup C)^C = \{5, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 19\}$

$(A \cup B)^C \cup (A \cup C)^C = \{5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$ y

$\left[(A \cup B)^C \cup (A \cup C)^C\right]^C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 15\}$

EJEMPLO 51.

Sean $U = \mathbf{Z}$; $A = \{x / x \ \ par \ \wedge \ x^2 < 20\}$

$B = \{x / \exists \ y \in \mathbf{N} \ \wedge \ x^2 + x = y \}$; $C = \{x / x \leq 1 \Rightarrow x > 1\}$

Determinar $(A \cup B)^C \cup C$

SOLUCION. Expresemos los conjuntos A, B y C por extensión:

$A=\{-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4\}$; $\quad B=\{\dots,-3,-2,1,2,3,\dots\}$; $\quad C=\{2,3,4,\dots\}$

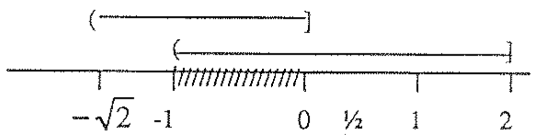
$A\cup B=\{\dots,-3,-2,0,1,2,3,\dots\}$, $\quad (A\cup B)^C=\{-1\}$ y $(A\cup B)^C\cup C=\{-1,2,3,4,\dots\}$

EJEMPLO 52 Sean $U=\mathbf{R}$, $A=(-1,2]$, $B=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, $C=(-\infty,3]$

$D=\left(-\sqrt{2},\dfrac{1}{2}\right]$, determinar $[A\cup D]^C\cup(B\cup C)^C$

SOLUCION.

$$A\cup D=(-1,2]\cup\left(-\sqrt{2},\frac{1}{2}\right] = \left(-\sqrt{2},2\right]$$



$$B\cup C=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)\cup(-\infty,3]=(-\infty,+\infty) = \mathbf{R}$$

$$\therefore\ (A\cup D)^C=\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup(2,+\infty) \quad , \quad (B\cup C)^C=\phi$$

$$\text{y}\quad (A\cup D)^C\cup(B\cup C)^C=\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup(2,+\infty)$$

EJEMPLO 53.

El conjunto $A=\{x\in\mathbf{Z}\ /\ x\ es\ primo\ \vee\ x^2-x\geq 100\}$ se puede expresar como unión de dos conjuntos. En efecto, como la condición que caracteriza los elementos de A es una disyunción, tendremos por definición de unión,

$$A=\{x\in\mathbf{Z}\ /\ x\ es\ primo\ \}\cup\ \{x\in\ \mathbf{Z}\ /\ x^2-x\geq 100\ \}$$

Lo mismo podría hacerse usando la representación por extensión del conjunto A, es decir, $A = \{\ldots, -12, -11, -10, 2, 3, 5, 7, 11, 12, 13, \ldots\}$.

En tal caso, podemos escribir $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} \cup \{\ldots, -12, -11, -10, 11, 12, 13, \ldots\}$ o bien $A = \{\ldots, -12, -11, -10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 12, 13, \ldots\}$, o de otras infinitas maneras.

EJERCICIO 23.

(a) Sean $U = \mathbf{Z}$ □ $A = \{x / x \ \ es\ par \ \vee \ x - x^2 \leq 0\}$ $\quad B = \{x / x^3 \leq 200 \wedge x^2 \geq 10\}$

$C = \{x \ / \ (x \leq 1 \Rightarrow x \geq 2) \vee (x^2 \leq 100)\}$

Se pide:

- Expresar A y C como unión de conjuntos dados por comprensión.
- Expresar B como unión de 2 conjuntos.
- Expresar A, B y C por extensión
- Calcular $\left[(A \cup C)^C \cup (B \cup A)^C\right]^C$

(b) Sean $U = \mathbf{R}$, $A = [-3, -1)$; $\quad B = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}\right]$; $\quad C = (-\infty, 2]$

Calcular $\left[(A \cup C)^C \cup B\right]^C$

La operación de unión entre conjuntos tiene, como debiera esperarse, una serie de propiedades que serán presentadas y demostradas más adelante, conjuntamente con las propiedades de las otras operaciones que estudiaremos.

INTERSECCION DE CONJUNTOS.

Sean A y B dos conjuntos en un universo U.

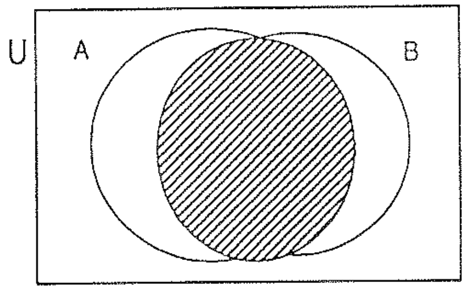
La INTERSECCION de A y B es otro conjunto que se simboliza por $A \cap B$, cuyos elementos son todos aquellos que pertenecen a A y que también pertenecen a B.

$$\boxed{A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}}$$

Luego tenemos: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

y negando: $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

El diagrama de Venn que representa la intersección de A y B es:



$A \cap B$

Obsérvese ahora la relación que tenemos entre la intersección $(\cap)$ de conjuntos y el conectivo lógico conjunción $(\wedge)$

EJEMPLO 54.

Usando los conjuntos del ejemplo 50, tenemos: $A \cap B = \{1, 10\}$; $B \cap C = \{2, 4, 6, 10\}$;

$(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{1, 2, 4, 6, 10\}$

EJEMPLO 55. Usando los conjuntos del ejemplo 51, calcular $(A \cap C)^C \cap B$

SOLUCION.

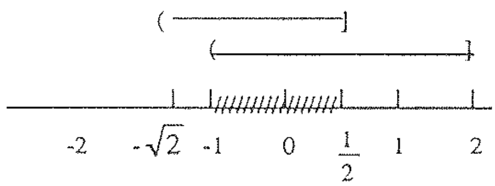
$A \cap C = \{2, 4\}$, $(A \cap C)^C = \{..., -1, 0, 1, 3, 5, 6, 7, ...\}$, $(A \cap C)^C \cap B = \{..., -3, -2, 1, 3, 5, 6\}$

EJEMPLO 56. Usando los conjuntos del ejemplo 52, calcular:

$$(A \cap D)^C \cup (B^C \cap C)$$

SOLUCION.

$$A \cap D = (-1, 2] \cap \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right] = \left(-1, \frac{1}{2}\right]$$



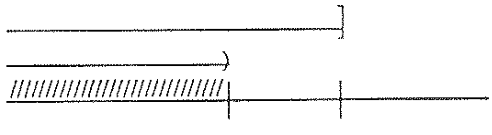
Nótese que $-1 \notin (-1, 2]$, por lo tanto $-1 \notin A \cap D$

Además $\frac{1}{2} \in (-1, 2] \wedge \frac{1}{2} \in \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right]$, por lo tanto $\frac{1}{2} \in A \cap D$

También $(A \cap D)^C = (-\infty, -1] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

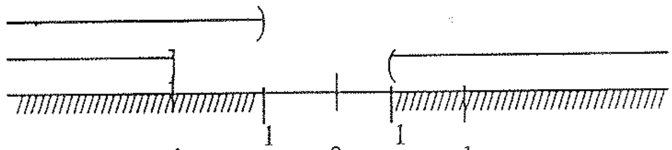
$$B^C = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

$$B^C \cap C = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cap (-\infty, 3] = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$



Así:

$$(A \cap D)^C \cup (B^C \cap C) = \left(\left(-\infty, -1\right] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$



EJEMPLO 57

Expresar $A = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, x^3 \leq 200 \wedge \ x^2 \geq 10\}$ como intersección de conjuntos.

SOLUCION: Según la definición de intersección, tenemos:

$A = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, x^3 \leq 200\} \cap \{x \in \mathbf{Z} \,/\, x^2 \geq 10\}$ o también,

$A = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{\ldots, -6, -5, -4, 4, 5, 6, \ldots\}$

EJERCICIO 24.

(a) Sean $U = \mathbf{Z}$, $A = \{x \,/\, -3 < x < 0 \Rightarrow x^2 > 1\}$, $B = \{y \,/\, (1+y)^2 < 20\}$

$C = \{z \,/\, 1 \leq z^2 + 1 \leq 20\}$

Determine: $(A^C \cap B) \cup (B^C \cap A)^C$

(b) Sean $U = \mathbf{Q}$, $A = \left\{\frac{m}{n} \,/\, m = n + 1\right\}$, $B = \left\{\frac{m}{n} \,/ -1 \leq m \leq 2 \ \wedge \ -2 \leq n < 3\right\}$

$C = \left\{ \frac{a}{b} / a = 1 \right\}$. Determine: $(B \cap C) \cup (A \cap B)$

(c) Sean $U = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, -2]$, $B = [-4, +\infty)$, $C = (-3, 5]$, $D = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$,

determine $\left[\ (A \cap B^C) \cup \left(C^C \cap D\right)^C \right] \cap \left[\ A \cap D^C\ \right]$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Sean A y B dos conjuntos en un universo U.

La diferencia entre A y B es otro conjunto que se simboliza por $A - B$, cuyos elementos son todos aquellos que pertenecen a A y que no pertenecen a B.

$\therefore$ $\boxed{A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}}$

Luego tenemos: $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

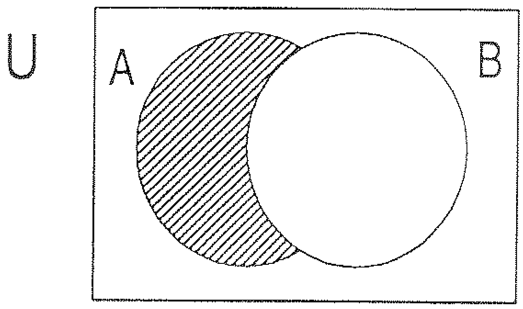
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B^C)$$

Se deduce que $A - B = A \cap B^C$, una propiedad interesante que permite transformar una diferencia entre 2 conjuntos en la intersección del primero con el complemento del segundo. Aquí convendría llamar minuendo al conjunto A y sustraendo al conjunto B, para marcar bien la posición y el rol que juega cada uno en una diferencia.

Negando la relación $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

resulta $x \notin (A - B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$

El diagrama de Venn que representa la diferencia entre A y B es:



$A - B$

EJEMPLO 58.

Sean A, B, C y D conjuntos en un universo U.

Tenemos $x \in ((A \cup B)^C - (D \cap C)) \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^C \wedge x \notin (D \cap C)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \wedge x \notin (D \cap C) \\
&\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin D \vee x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A^C \wedge x \in B^C) \wedge (x \in D^C \vee x \in C^C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A^C \cap B^C) \wedge x \in (D^C \cup C^C) \\
&\Leftrightarrow x \in \left[(A^C \cap B^C) \cap (D^C \cup C^C) \right]
\end{aligned}$$

Como lo anterior es válido $\forall\, x \in U$, se tiene:

$$(A \cup B)^C - (D \cap C) = (A^C \cap B^C) \cap (D^C \cup C^C)$$

EJEMPLO 59.

Sean $U = \{1, 2, 3, ..., 20\}$; $A = \{1, 3, 4, 6, 9, 11, 15, 16, 19, 20\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 17, 18, 19\}$; $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 19\}$

Entonces $A - B = \{6, 11, 15, 16, 20\}$, pues cada uno de estos números es elemento de A y no es elemento de B. Los restantes son elementos de A y también de B, por lo cual no pertenecen a $A - B$.

Además $A \cap B = \{1, 3, 4, 9, 19\}$

Observemos que $(A - B) \cup (A \cap B) = \{6, 11, 15, 16, 20, 1, 3, 4, 9, 19\} = A$

es decir, resultó: $\boxed{(A - B) \cup (A \cap B) = A}$

Lo anterior no es casualidad, es una propiedad que podemos demostrar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x \in [(A-B) \cup (A \cap B)] &\Leftrightarrow x \in (A-B) \vee x \in (A \cap B) && \text{(definición de unión)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) && \text{(definición de diferencia e intersección)} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B) && \text{(tautología N° 12)} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (\overline{x \in B} \vee x \in B) && \text{(notación)} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge T && \text{(tautología N° 32)} \\
&\Leftrightarrow x \in A && \text{(tautología N° 1)}
\end{aligned}$$

$\therefore (\forall\, x)\, (x \in [(A - B) \cup (A \cap B)] \Leftrightarrow x \in A)$

$\therefore\ (A-B)\cup(A\cap B)=A$

Ya calculamos $A-B=\{6, 11, 15, 16, 20\}$

Además se tiene $B-A=\{2, 7, 8, 17, 18\}$, que resulta notoriamente diferente de $A-B$

Digamos que en general, $A-B\neq B-A$, salvo en casos muy especiales donde tendremos la igualdad (por ejemplo si A y B son iguales). Podemos entonces afirmar que la diferencia entre conjuntos no satisface la propiedad conmutativa. Por ello es que conviene tener muy claro qué conjunto actúa como "minuendo" y cuál como "sustraendo".

Continuamos haciendo algunos cálculos con los conjuntos descritos en este ejemplo.

Tenemos: $A\cup C=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 19, 20\}$

$B\cap C=\{4, 7, 8, 9, 19\}$

$(B\cap C)^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13\ 14, 15, 16, 17, 18, 20\}$

$(A\cup C)-(B\cap C)^C=\{4, 7, 8, 9, 19\}$

Además: $B-(A\cup C)=\{2, 17, 18\}$

$A-(B\cap C)=\{1, 3, 6, 11, 15, 16, 20\}$

$[B-(A\cup C)]\cap[A-(B\cap C)]=\phi$

Finalmente observemos lo siguiente:

$A^C=\{2, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 17, 18\}$

$U-A=\{2, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 17, 18\}$

resultando ser el mismo conjunto. Esto no es casualidad, se trata de otra propiedad con estas operaciones y se demuestra de la siguiente manera:

$x\in A^C \Leftrightarrow x\notin A$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow T \wedge x\notin A$ (tautología N° 1)

$\Leftrightarrow x\in U \wedge x\notin A$ ($x\in U$ es una tautología)

$\Leftrightarrow x\in (U-A)$ (definición de diferencia)

$\therefore\ (\forall x)\ (x\in A^C \Leftrightarrow x\in (U-A))$

$\therefore\ \boxed{A^C=U-A}$

La propiedad anterior nos dice que "el complemento de un conjunto es lo mismo que la diferencia entre el universo y el conjunto". Según esa propiedad o "modelo" , tenemos $(A \cup B)^C = U - (A \cup B)$ y también $U - (A \cap B)^C = (A \cap B)$

(recuerde la propiedad $(A^C)^C = A$)

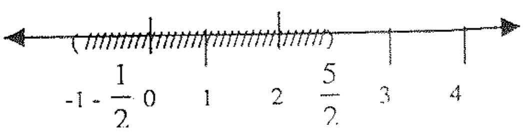
EJEMPLO 60.

Sean $U = \mathbf{R}$, $A = (-1,2)$, $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $C = (-\infty, 1)$

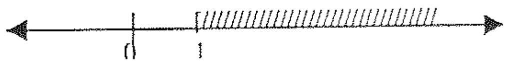
Calcular : $X = \left[(A \cup B) - C^C\right] - (B \cap C)$

SOLUCIÓN:

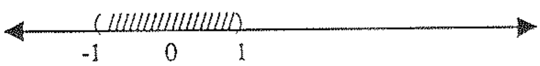
$A \cup B = (-1, 2) \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$



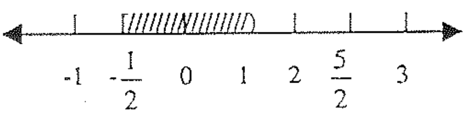
$C^C = [1, +\infty)$



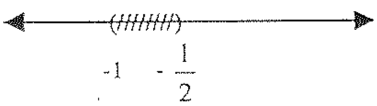
$\therefore\ (A \cup B) - C^C = (-1, 1)$



$B \cap C = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \cap (-\infty, 1) = \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$



$\therefore\ X = \left[(A \cup B) - C^C\right] - (B \cap C) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$



EJERCICIO 25.

(a) Usando los conjuntos del ejemplo 59, calcule: $\left(C - A^C\right)^C \cap (A - B)^C$

(b) Usando los conjuntos del ejemplo 60, calcule: $(A \cap B)^C - \left[(C - A) \cup B^C\right]$

DIFERENCIA SIMETRICA DE CONJUNTOS.

Sean A y B dos conjuntos en un universo U.

La **DIFERENCIA SIMETRICA** entre A y B es otro conjunto que se simboliza por $A \Delta B$, cuyos elementos son todos aquellos que pertenecen a A y no a B o bien que pertenecen a B y no a A.

$$\therefore \quad \boxed{A \Delta B = \{x \in U \;/\; (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}}$$

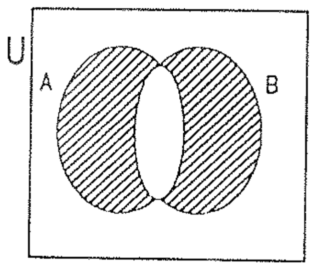
Luego tenemos: $x \in (A \Delta B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$$

Concluimos que $\boxed{A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)}$, vale decir, la diferencia simétrica entre A y B es la unión de la diferencia entre A y B con la diferencia entre B y A.

El diagrama de Venn que representa la diferencia simétrica entre A y B es:



$A \Delta B$

Como se puede apreciar en este diagrama de Venn, $A \Delta B$ corresponde a extraer la porción $A \cap B$ de la unión $A \cup B$, es decir: $\boxed{A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)}$

Esta es otra forma de expresar una diferencia simétrica y se demuestra como sigue (justifique Ud. cada paso):

$x \in (A \Delta B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$\Leftrightarrow [\, (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B \,] \wedge [\, (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \notin A) \,]$

$\Leftrightarrow [\, (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \,] \wedge [\, x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \notin A) \,]$

$\Leftrightarrow [\, x \in (A \cup B) \wedge T \,] \wedge [\, T \wedge x \notin (A \cap B) \,]$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

$$\therefore\ (\forall x)(x \in (A \Delta B) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B))$$

Como puede verse, la diferencia simétrica se basa en operaciones anteriores como unión, intersección y diferencia. Aún más, usando algunas propiedades vistas tenemos:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$$

$$\therefore \quad \boxed{A \Delta B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)}$$

y también : $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$

$$\therefore \quad \boxed{A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C}$$

Estas dos últimas expresan $A \Delta B$ usando unión, intersección y complemento, razón por la cual no daremos mayor énfasis a esta operación de diferencia simétrica.

A continuación presentaremos un listado de propiedades fundamentales sobre complemento, unión e intersección de conjuntos. Este listado sigue el mismo orden que el que se presentó anteriormente con Tautologías Básicas o Teoremas Lógicos. Cada propiedad es ahora llámada TEOREMA, como evidenciando que se trata de una verdad perfectamente demostrable.

TEOREMAS BASICOS CON CONJUNTOS

IDENTIDAD:

1.- $A \cap U = A$

2.- $A \cap \phi = \phi$

3.- $A \cup \phi = A$

4.- $A \cup U = U$

IDEMPOTENCIA:

5.- $A \cap A = A$

6.- $A \cup A = A$

INVOLUCION:

7.- $\left(A^C\right)^C = A$

COMMUTATIVIDAD:

8.- $A \cup B = B \cup A$

9.- $A \cap B = B \cap A$

ASOCIATIVIDAD:

10.- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

11.- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

DISTRIBUTIVIDAD:

12.- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

13.- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

DE MORGAN:

14.- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

15.- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ABSORCION:

16.- $A \cap (A \cup B) = A$

17.- $A \cup (A \cap B) = A$

CONTRARECIPROCA:

18.- $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$

TRANSITIVIDAD:

19.- $[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$

20.- $[(A = B) \wedge (B = C)] \Rightarrow (A = C)$

OTRAS IMPORTANTES:

21.- $(A \subseteq B) \Leftrightarrow A^C \cup B = U$

22.- $(A \not\subset B) \Leftrightarrow A \cap B^C \neq \phi$

23.- $A \subseteq A$

24.- $A \subseteq A \cup B$

25.- $(A \cap B) \subseteq A$

26.- $(A \cap B) \subseteq B$

27.- No tiene similar en lógica

28.- $(A = B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

29.- $(A \neq B) \Leftrightarrow [(A \not\subset B) \vee (B \not\subset A)]$

30.- No tiene similar en lógica

31.- No tiene similar en lógica

32.- $A \cup A^C = U$

33.- $A \cap A^C = \phi$

34.- $U^C = \phi$

35.- $\phi^C = U$

36.- $A = B \Leftrightarrow B = A$

37.- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^C = \phi$

38.- $A = B \Leftrightarrow A^C = B^C$

39.- $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B^C \subseteq C$

Observando el listado de Teoremas Básicos, podemos apreciar una gran similitud con el listado de Tautologías Básicas. Para ello, hagamos los siguientes analogías fundamentales:

Lógica:	Conjuntos:
T (tautología)	U (Universo)
C (contradicción)	ϕ (vacío)
$\vee$ (disyunción)	$\cup$ (unión)
$\wedge$ (conjunción)	$\cap$ (intersección)
- (negación)	c (complemento)
$\Rightarrow$ (implicación)	$\subseteq$ (subconjunto)
$\Leftrightarrow$ (equivalencia)	$=$ (igualdad)
p (una proposición)	A (un conjunto)

Así, la Tautología N° 1, es decir $p \wedge T \Leftrightarrow p$ queda transformada en el Teorema 1: $A \cap U = A$, cuando cambiamos respectivamente p por A, $\wedge$ por $\cap$, T por U y $\Leftrightarrow$ por $=$. Lo mismo sucede con la Tautología N° 14: $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ que queda transformada en el Teorema N° 14: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Por último, la tautología N° 18: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ resulta ser el Teorema N° 18: $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$. En esta última transformación se mantuvo el conectivo $\Leftrightarrow$ para dar sentido lógico al Teorema N° 18.

El alumno puede continuar haciendo las restantes analogías entre los dos listados de propiedades y aprovechar ese hecho para no memorizar fórmulas en exceso.

A continuación haremos la demostración formal de algunos de los Teoremas Básicos, con el propósito que el alumno comprenda cabalmente los procedimientos que se utilizan.

<u>TEOREMA N° 4.</u> $A \cup U = U$

Se trata de una igualdad de dos conjuntos que puede demostrarse por doble inclusión, vale decir, $A \cup U \subseteq U \;\wedge\; U \subseteq A \cup U$

(a) Primero probaremos $A \cup U \subseteq U$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup U) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in U && \text{(definición de unión)} \\
&\Rightarrow x \in U \vee x \in U && (x \in A \Rightarrow x \in U \; pues \; A \subseteq U) \\
&\Leftrightarrow x \in U && \text{(Tautología N° 6)}
\end{aligned}
$$

$$\therefore (\forall x)\,(x \in (A \cup U) \Rightarrow x \in U)$$

$$\therefore A \cup U \subseteq U$$

(b) Ahora probaremos $U \subseteq A \cup U$

$$x \in U \Rightarrow x \in A \vee x \in U \qquad \text{(Tautología N° 24)}$$
$$\Rightarrow x \in A \cup U \qquad \text{(definición de unión)}$$
$$\therefore (\forall x)(x \in U \Rightarrow x \in (A \cup U))$$
$$\therefore U \subseteq A \cup U$$

Por (a) y (b) se tiene probado que $A \cup U = U$

<u>**TEOREMA N° 10.**</u> $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Como veremos cada paso en esta demostración es una equivalencia, de modo que resultan las dos inclusiones $\subseteq$ y $\supseteq$ al mismo tiempo.

$$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \qquad \text{(definición de intersección)}$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \qquad \text{(definición de intersección)}$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in C) \qquad \text{(Tautología N° 10)}$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \qquad \text{(definición de intersección)}$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C \qquad \text{(definición de intersección)}$$
$$\therefore (\forall x)(x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C)$$
$$\therefore A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

<u>**TEOREMA N°14:**</u> $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$$x \in (A \cap B)^C \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \qquad \text{(definición de complemento)}$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \qquad \text{(negación de } x \in (A \cap B))$$
$$\Leftrightarrow x \in A^C \vee x \in B^C \qquad \text{(definición de complemento)}$$
$$\Leftrightarrow x \in (A^C \cup B^C) \qquad \text{(definición de unión)}$$

Como hemos usado sólo equivalencias tenemos $(\forall x)(x \in (A \cap B)^C \Leftrightarrow x \in (A^C \cup B^C))$

$$\therefore (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

<u>**TEOREMA N° 21.**</u> $A \subseteq B \Leftrightarrow A^C \cup B = U$

Aquí se tiene una equivalencia, es decir, una doble implicación que haremos separadamente:

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A^C \cup B = U$

La hipótesis o antecedente es $A \subseteq B$ y nuestra tesis o consecuente es $A^C \cup B = U$, vale decir una igualdad de 2 conjuntos que se puede demostrar por doble inclusión: $A^C \cup B \subseteq U \wedge U \subseteq A^C \cup B$.

A esta altura debe estar claro que no es necesario probar $A^C \cup B \subseteq U$, puesto que todo conjunto se considera subconjunto de U. Veamos entonces como probamos $U \subseteq A^C \cup B$.

$$x \in U \Leftrightarrow T \qquad (T \text{ es una tautología})$$
$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A \qquad \text{(Tautología N° 32)}$$
$$\Rightarrow x \in B \vee x \notin A \qquad \text{(pues } A \subseteq B \text{ por hipótesis)}$$

$\Leftrightarrow x \in B \quad \vee \quad x \in A^C$ (definición de complento)

$\Leftrightarrow x \in B \cup A^C$ (definición de unión)

$\Leftrightarrow x \in (A^C \cup B)$ (Teorema 8)

$\therefore \; (\forall x)\,(x \in U \Rightarrow x \in A^C \cup B)$

$\therefore \; U \subseteq A^C \cup B$

Se concluye que $A \subseteq B \Rightarrow A^C \cup B = U$

(b) $A^C \cup B = U \Rightarrow A \subseteq B$

Nuestra tesis es ahora $A \subseteq B$ y la hipótesis $A^C \cup B = U$

Ahora bien, $x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge T$ (T es tautología)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in U$ ($x \in U$ es tautología)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (A^C \cup B)$ (hipótesis)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A^C \vee x \in B)$ (definición de unión)

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A^C) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ (Tautología N° 12)

$\Leftrightarrow C \vee (x \in A \wedge x \in B)$ (C es contradicción)

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$ (Tautología N° 3)

$\Rightarrow x \in B$ (Tautología N° 26)

$\therefore \; (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\therefore \; A \subseteq B$

TEOREMA 37. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^C = \phi$

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B^C = \phi$

Nuestra tesis aquí es $A \cap B^C = \phi$ y ya se tiene $\phi \subseteq A \cap B^C$, luego sólo resta probar $A \cap B^C \subseteq \phi$

$x \in A \cap B^C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C$ (definición de intersección)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in A^C$ (Teorema N° 18)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$ (definición de complemento)

$\Leftrightarrow C$ (C es contradicción)

$\Leftrightarrow x \in \phi$ ($x \in \phi$ es una contradicción)

$\therefore \; (\forall x)\,(x \in A \cap B^C \Rightarrow x \in \phi$

$\therefore \; A \cap B^C \subseteq \phi$

Como se tiene $\phi \subseteq A \cap B^C$ y se demostró $A \cap B^C = \phi$, concluímos $A \cap B^C = \phi$

(b) $A \cap B^C = \phi \Rightarrow A \subseteq B$

$$
\begin{array}{lll}
x \in A & \Leftrightarrow x \in A \ \wedge T & (T \text{ es tautología}) \\
& \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (x \in B^C \vee x \notin B^C) & (\text{Tautología N° 29}) \\
& \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge x \in B^C) \vee (x \in A \wedge x \notin B^C) & (\text{Tautología N° 12}) \\
& \Leftrightarrow x \in (A \cap B^C) \vee (x \in A \wedge x \notin B^C) & (\text{definición de intersección}) \\
& \Leftrightarrow (x \in \phi \ \vee \ (x \in A \wedge x \notin B^C) & (\text{hipótesis}) \\
& \Leftrightarrow C \ \vee (x \in A \ \wedge x \notin B^C \ ) & (x \in \phi \text{ es una contradicción}) \\
& \Leftrightarrow x \in A \ \wedge x \notin B^C & (\text{Tautología N° 3}) \\
& \Leftrightarrow x \in A \ \wedge x \in B & (\text{definición de complemento}) \\
& \Rightarrow x \in B & (\text{Tautología N° 26}) \\
& \therefore (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) & \\
& \therefore A \subseteq B &
\end{array}
$$

Con ello se termina la demostración. No obstante mostraremos otra forma de demostrar el mismo Teorema 37, haciendo uso de otros teoremas.

$$
\begin{array}{lll}
A \subseteq B & \Leftrightarrow A^C \cup B = U & (\text{Teorema N° 21}) \\
& \Leftrightarrow (A^C \cup B)^C = U^C & (\text{Teorema N° 38}) \\
& \Leftrightarrow (A^C \cup B)^C = \phi & (\text{Teorema N° 34}) \\
& \Leftrightarrow (A^C)^C \cap B^C = \phi & (\text{Teorema N° 15}) \\
& \Leftrightarrow A \cap B^C = \phi & (\text{Teorema N° 7})
\end{array}
$$

No cabe duda que la segunda demostración del Teorema 37, basado sólo en los teoremas o propiedades de las operaciones con conjuntos, es mucho más corta y elegante. La primera en cambio demuestra una inclusión o igualdad de conjuntos mediante su definición, es decir, aludiendo a un elemento genérico x y usando propiedades lógicas o tautologías.

<u>EJERCICIO 26.</u>

Se pide al alumno demostrar los restantes teoremas básicos sobre conjuntos.

<u>EJEMPLO 61.</u>

Demostrar : $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ (Es otra propiedad importante)

<u>SOLUCIÓN:</u> Tenemos como hipótesis $A \subseteq B$ y bajo ese supuesto se debe demostrar $A \cup B = B$ que es equivalente con $B \subseteq A \cup B \ \wedge \ A \cup B \subseteq B$.

El teorema 24 establece $A \subseteq A \cup B$, lo que debe entenderse como: "cualquier conjunto A es subconjunto de la unión de sí mismo con cualquier otro conjunto B". Análogamente se tiene $B \subseteq B \cup A$ o bien $B \subseteq A \cup B$, puesto que $A \cup B = B \cup A$ según teorema 8. Se concluye así que: $B \subseteq A \cup B$

Para probar la otra inclusión, procedemos usando elementos, vale decir:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \;\vee\; x \in B$ (definición de unión)

$\Rightarrow x \in B \;\vee\; x \in B$ (hipótesis)

$\Leftrightarrow x \in B$ (Tautología N° 6)

$\therefore (\forall x)\ (x \in A \cup B \Rightarrow x \in B)$

$\therefore A \cup B \subseteq B$

Así suponiendo $A \subseteq B$ hemos probado $A \cup B = B$

EJEMPLO 62.

Demostrar : $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

SOLUCIÓN:

Aquí usaremos sólo Teoremas que digan relación con "igualdad entre conjuntos" pues es precisamente una igualdad lo que debe ser probado.

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$ (propiedad de la diferencia)

$= (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C)$ (Teorema N° 14)

$= [\ (A \cup B) \cap A^C\ ] \cup [\ (A \cup B) \cap B^C\ ]$ (Teorema N°12)

$= [\ A^C \cap (A \cup B)\ ] \cup [\ B^C \cap (A \cup B)\ ]$ (Teorema N°9)

$= [\ (A^C \cap A) \cup (A^C \cap B)\ ] \cup [\ (B^C \cap A) \cup (B^C \cap B)\ ]$(Teorema 12)

$= [\ \phi \cup (A^C \cap B)\ ] \cup [\ (B^C \cap A) \cup \phi\ ]$ (Teorema N° 33)

$= (A^C \cap B) \cup (B^C \cap A)$ (Teorema N°3)

$= (B^C \cap A) \cup (A^C \cap B)$ (Teorema N° 8)

$= (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$ (Teorema N°9)

$= (A - B) \cup (B - A)$ (propiedad de la diferencia)

$\therefore (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Como se sabe, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, entonces también se deduce $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$, propiedad que ya había sido demostrada usando definiciones (o sea por elementos) y tautologías.

EJERCICIO 27. Demostrar las siguientes propiedades:

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

(c) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(d) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

Use diagramas de Venn para visualizar el significado de cada una.

EJEMPLO 63.

Simplificar la expresión: $[\ A-(B\cap A)\ ]^{c}\cup[\ (A\cup B)^{c}-A\ ]$

SOLUCION:

Al igual como hicimos en el capítulo de lógica, simplificar una expresión consiste en transformarla en otra igual, pero de estructura lo más simple posible. Para ello podremos usar todos los teoremas que involucren igualdad de conjuntos. De ahora en adelante, omitiremos las justificaciones de cada paso que se haga, pero se pide al alumno que las realice para su mejor comprensión.

$$\begin{aligned}
[\ A-(B\cap A)\ ]^{c}\cup[\ (A\cup B)^{c}-A\ ] &= [\ A\cap(B\cap A)^{c}\ ]^{c}\cup[\ (A\cup B)^{c}\cap A^{c}\ ]\\
&= [\ A\cap(B^{c}\cup A^{c})\ ]^{c}\cup[\ (A^{c}\cap B^{c})\cap A^{c}\ ]\\
&= [\ (A\cap B^{c})\cup(A\cap A^{c})\ ]^{c}\cup[\ (A^{c}\cap A^{c})\cap B^{c}\ ]\\
&= [\ (A\cap B^{c})\cup\phi\ ]^{c}\cup[\ A^{c}\cap B^{c}\ ]\\
&= (A\cap B^{c})^{c}\cup(A^{c}\cap B^{c})\\
&= (A^{c}\cup B)\cup(A^{c}\cap B^{c})\\
&= [\ (A^{c}\cup B)\cup A^{c}\ ]\cap[\ (A^{c}\cup B)\cup B^{c}\ ]\\
&= [\ (A^{c}\cup A^{c})\cup B\ ]\cap[\ A^{c}\cup(B\cup B^{c})\ ]\\
&= (A^{c}\cup B)\cap(A^{c}\cup U)\\
&= (A^{c}\cup B)\cap U\\
&= A^{c}\cup B
\end{aligned}$$

EJERCICIO 28.

Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $[\ A-(B\cap A)\ ]^{c}\cap(A-B)$

(b) $[\ (A\cup B)-(A\cap B)\ ]^{c}\cap A$

(c) $([\ (A\cup B)-C\ ]\cup[\ C-(A\cap B)\ ])\cap(B\cap C)$

EJEMPLO N° 64.

Defínase la siguiente operación entre dos conjuntos: $A\circ B=(A-B)\cup B^{C}$

(a) Calcular $A\circ\phi$

(b) Calcular $(A\circ U)\cap(\phi\circ A)$

(c) ¿Es $\circ$ una operación conmutativa?

SOLUCION.

La operación aquí definida (podemos llamar operación "círculo") no tiene relevancia en sí misma, es sólo un nuevo "modelo" que se pide comprender y luego aplicar correctamente. Como se puede ver, $A\circ B$ se calcula en base a operaciones ya conocidas como diferencia, unión y complemento, por lo cual podemos usar las propiedades que se tenga de estas tres. Debemos entender $A \circ B$ como "la unión entre la diferencia de los conjuntos y el complemento del segundo conjunto".

Así por ejemplo, para calcular $A^C \circ B^C$ entendemos que el primer conjunto es ahora A^C y el segundo conjunto es B^C, por lo cual $A^C \circ B^C = (A^C - B^C) \cup (B^C)^C$, o mejor, $A^C \circ B^C = (A^C - B^C) \cup B$

Del mismo modo, $A^C \circ (B-A) = [\ A^C - (B-A)\ ] \cup (B-A)^C$

Ahora realicemos los cálculos pedidos:

(a) $A \circ \phi = (A - \phi) \cup \phi^C = A \cup U = U$

(b) $(A \circ U) \cap (\phi \circ A) = [\ (A-U) \cup U^C\ ] \cap [\ (\phi - A) \cup A^C\ ]$

$$= [\ \phi \cup \phi\ ] \cap [\ \phi \cup A^C\ ]$$
$$= \phi \cap A^C$$
$$= \phi$$

(c) Para que " $\circ$" sea una operación conmutativa, debiera verificarse $A \circ B = B \circ A$, cualesquiera sean los conjuntos A y B. Según (a), $A \circ \phi = U$, mientras que según (b), $\phi \circ A = A^C$, es decir, no resulta lo mismo $A \circ \phi$ *que* $\phi \circ A$. Con esto basta para concluir que la operación " $\circ$" no es conmutativa.

EJERCICIO 29.

Considere la operación $\otimes$ definida por $A \otimes B = (B^c - A)^c \cap (A \cup B)$

(a) Calcule $A \otimes A^C$

(b) Calcule $(A \otimes A^C) \cap (\phi \otimes A)$

(c) Calcule $(A \otimes U) \otimes A^C$

d) Calcule $[\ (A^C \otimes \phi) \otimes A\ ] \cap [\ U - (A \otimes A^C)\ ]$

(e) Calcule $(A \circ A^C) \otimes$ A, siendo "$\circ$" la operación del ejemplo 64

(f) Simplifique $(A \otimes B) \circ A$

(g) ¿Es $\otimes$ conmutativa? ¿Es asociativa?

CONJUNTO POTENCIA.

Sea A un conjunto cualquiera en un universo U.

Se define el CONJUNTO POTENCIA de A como otro conjunto que denotaremos por $P(A)$ y cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.

Luego se tiene $P(A) = \{X / X \subseteq A\}$

Aquí es muy importante resaltar el hecho que los elementos de $P(A)$ son conjuntos, no son X pertenecientes al universo. Luego $P(A)$ es un conjunto formado por conjuntos, razón por la que es considerado una Familia de conjuntos.

Aclarado ese punto, tenemos $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$, lo que nos dice que X es un elemento de $P(A)$ ssi X es un subconjunto de A, es decir, los elementos de $P(A)$ se caracterizan por ser subconjuntos de A.

Así, son verdaderas las siguientes equivalencias:

$X \cup Z \in P(A) \Leftrightarrow X \cup Z \subseteq A$

$Y \in P(A \cap B) \Leftrightarrow Y \subseteq A \cap B$

$X^C \in P(A^C) \Leftrightarrow X^C \subseteq A^C$

$B \subseteq A \Leftrightarrow B \in P(A)$

$A \subseteq A \cup B \Leftrightarrow A \in P(A \cup B)$

$\phi \subseteq A \Leftrightarrow \phi \in P(A)$

$A \cap B \subseteq A \cup B \Leftrightarrow A \cap B \in P(A \cup B)$

Siguiendo los ejemplos anteriores, determine Ud. una equivalencia para:

$A \subseteq A - B$; $A^c \cup B \subseteq B \cap C^c$; $A \cap (A - B) \subseteq X - Y$

$A - B \in P(B)$; $B^c - A \in P(X)$; $X \in P(A \cap B^c)$

EJEMPLO 65.

Expresar por extensión el conjunto potencia de $A = \{1, 3, 5\}$

SOLUCION:

Como se dijo, $P(A)$ tendrá como elemento a todos los subconjuntos de A. Esto ya lo anticipamos en el ejemplo 43.
Los subconjuntos de A son ϕ, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3,5\}$, $\{1, 3, 5\}$.
Luego $P(A)=\{\ \phi,\ \{1\},\ \{3\},\ \{5\},\ \{1, 3\},\ \{1, 5\},\ \{3,5\},\ A\ \}$
Como podemos apreciar, hay exactamente 8 subconjuntos de A, es decir, si A tiene 3 elementos, entonces $P(A)$ tendrá 2^3 elementos o subconjuntos de A.

Más generalmente, si A tiene n elementos, entonces $P(A)$ tendrá exactamente 2^n elementos (subconjuntos de A). Este hecho puede ser demostrado con algo de combinatoria y el Teorema del Binomio, temas que no se abordan en este texto.

Así por ejemplo, si un conjunto A tiene $n = 10$ elementos, entonces su conjunto potencia $P(A)$ tendrá $2^{10} = 1024$ elementos. Más aún, si $n = 50$ entonces $P(A)$ tendrá aproximadamente 10^{15} elementos. Dado lo anterior, es común encontrar en la literatura la notación 2^A en vez de $P(A)$ para denotar al conjunto potencia de A.

EJEMPLO 66.

Si $A = \{\phi, \{\phi\}\}$ entonces $P(A) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, A\}$.
Como sabemos $\phi \subseteq A$ y $A \subseteq A$, cualquiera sea el conjunto A, por lo cual siempre tendremos $\phi \in P(A)$ y $A \in P(A)$. Además para este particular conjunto A, tenemos $\{\phi\} \subseteq A$ (pues el único elemento ϕ de $\{\phi\}$ es también elemento de A), es decir $\{\ \phi\ \} \in P(A)$. También $\{\ \{\phi\}\ \} \subseteq A$ pues $\{\phi\}$ es elemento de A, es decir $\{\ \{\phi\}\ \} \in P(A)$.

PROPIEDADES DEL CONJUNTO POTENCIA.

1. Tal como ya se anticipó, para cualquier conjunto A se tiene $\phi \in P(A)$ y también $A \in P(A)$.

2. Si A tiene n elementos entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos, lo cual hace impracticable expresar por extensión el conjunto potencia de un conjunto A con muchos elementos. Si $A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ entonces $P(A)$ lo expresamos por comprensión: $P(A) = \{X \,/\, X \subseteq A\}$. No obstante podremos saber si un elemento (o conjunto) X es o no un elemento de $P(A)$; por ejemplo $\{2, 4, 6\} \in P(A)$; $\{1, 2, 3\} \notin P(A)$; $\{x \in \mathbf{Z}^+ / x$ es múltiplo de $4\ \} \in P(A)$, etc.

3. ¿Será cierto que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$?, es decir, ¿serán iguales el conjunto potencia de la intersección de dos conjuntos, con la intersección de los dos conjuntos potencia?

Para responder, necesitaremos probar primeramente lo siguiente: $X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B$. Veamos la implicación a izquierda $(\Leftarrow)$, vale decir, con hipótesis $X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B$ y como tesis $x \subseteq A \cap B$.

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } x \in X &\Leftrightarrow x \in X \ \wedge \ x \in X \\
&\Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \\
&\therefore (\forall x)\,(x \in X \Rightarrow x \in (A \cap B)) \\
&\therefore \ X \subseteq A \cap B
\end{aligned}
$$

Veamos ahora la implicación a derecha $(\Rightarrow)$. Ahora la hipótesis es $X \subseteq A \cap B$ y la tesis $X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B$.

Sea $x \in X \Rightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \quad \therefore X \subseteq A$ y
$x \in X \Rightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \quad \therefore X \subseteq B$
$\therefore \ X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B$

Se concluye : $\boxed{X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B}$

(Observe Ud. la relación anterior en un diagrama de Venn)

Ahora demostremos $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

$$
\begin{aligned}
X \in P(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\
&\Leftrightarrow X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B \\
&\Leftrightarrow X \in P(A) \ \wedge \ X \in P(B) \\
&\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B) \\
&\therefore (\forall X)\ (X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B))
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\therefore \ P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)}$$

Esta propiedad puede ser útil por ejemplo en el siguiente caso:

Dado $A = \{1, 2, 3, ...10\}$; $B = \{x \,/\, x \ es \ primo\}$, obtener $P(A) \cap P(B)$.

Claramente nos sería imposible obtener $P(B)$ puesto que B es infinito, sin embargo, sabiendo que $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$, podemos simplificar nuestros cálculos usando $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$ y obteniendo ahora $P(A \cap B)$. Se pide al alumno completar los cálculos.

4.- En el punto anterior se hizo referencia a $P(A \cap B)$ ¿qué sucede si $A \cap B = \phi$? Dos conjuntos cuya intersección es ϕ se dice que son <u>DISJUNTOS</u>.

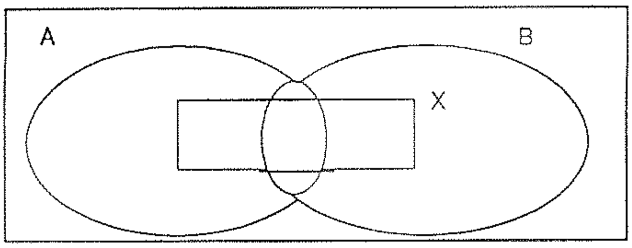
¿A qué es igual $P(\phi)$?. El único subconjunto de ϕ es el propio ϕ, por lo tanto:

$$\boxed{P(\phi) = \{\phi\}}$$

Luego, en el caso que A y B sean disjuntos, $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) = P(\phi) = \{\phi\}$

5.- ¿Será cierto que $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$?

Antes de responder a esto, nos preocuparemos de saber si son o no equivalentes $X \subseteq A \cup B$ con $X \subseteq A \vee X \subseteq B$. Mediante un diagrama de Venn podemos percibir que $X \subseteq A \cup B \not\Rightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$, vale decir, estar contenidos en una unión <u>no implica</u> estar contenido en algunos de los dos conjuntos:



Un ejemplo específico para mostrar aquello es el siguiente:

$A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, $B = \{2, 4, 6, ...\}$, $X = \{1, 2\}$ claramente $X \subseteq A \cup B$ pues $A \cup B = \mathbf{N}$, no obstante $X \not\subset A$ (pues $2 \notin A$) y también $X \not\subset B$ (pues $1 \notin B$).

Veamos la implicación contraria: $X \subseteq A \vee X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq A \cup B$.
Esta sí es verdadera; en efecto :

$$x \in X \Leftrightarrow x \in X \vee x \in X \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$$
$$\therefore (\forall x)\ (x \in X \Rightarrow x \in A \cup B)$$
$$\therefore X \subseteq A \cup B$$

Concluimos: $$\boxed{X \subseteq A \vee X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq A \cup B}$$

Ahora veamos si $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

$$\begin{aligned} X \in P(A) \cup P(B) &\Leftrightarrow X \in P(A) \vee X \in P(B) \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B \\ &\Rightarrow X \subseteq A \cup B \\ &\Leftrightarrow X \in P(A \cup B) \end{aligned}$$

Como tenemos una $\Rightarrow$ en la secuencia anterior, concluimos que:

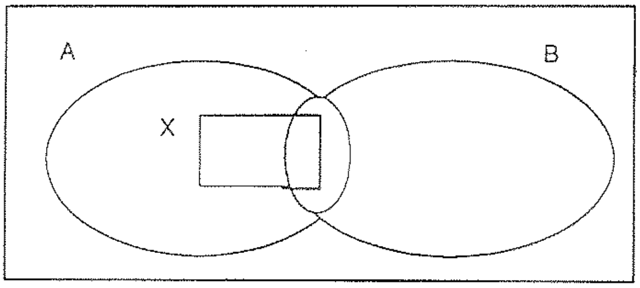
$$\boxed{P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)}$$

Con toda seguridad, la inclusión contraria no será siempre verdadera y se pide al alumno mostrar un ejemplo donde tal inclusión no se verifique (o sea, se pide un contraejemplo).

6.- Se puede probar que : $\boxed{P(A-B) \subseteq P(A) - P(B)}$

En efecto
$$\begin{aligned} X \in P(A-B) &\Leftrightarrow X \subseteq A-B \\ &\Rightarrow X \subseteq A \ \wedge\ x \not\subset B \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \ \wedge\ x \notin P(B) \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) - P(B) \end{aligned}$$

En (*), sólo se usa implicación ($\Rightarrow$) en vez de equivalencia ($\Leftrightarrow$) porque la implicación contraria no es efectiva. El siguiente diagrama de Venn muestra que : $X \subseteq A \ \wedge\ X \not\subset B$, pero no es cierto $X \subseteq A - B$



Se pide al alumno presentar un ejemplo donde no se verifique $P(A) - P(B) \subseteq P(A - B)$

EJERCICIO 30.

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3\}$

(a) Compruebe la fórmula $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(b) Compruebe la relación $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
¿Se verifica en este caso la igualdad?

(c) Calcule $P((A \cap B) - C)$ y compárelo con $(P(A) \cup P(B)) - P(C)$

EJERCICIO 31.

(a) Demuestre : $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

Para la implicación ($\Leftarrow$) puede serle útil : $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$

(b) Use (a) para demostrar : $P(A \cap B) \subseteq P(A)$ y $P(A) \subseteq P(A \cup B)$

(c) Si $A \cap B = \phi$, es decir, A y B son conjuntos DISJUNTOS, determine $P(A) \cap P(B)$.
(d) Use (c) para simplificar: $P(A-B) \cap P(A \cap B)$
(e) Si A y B son disjuntos ¿es cierto que $P(A) \cap P(B) = P(A \cup B)$?
Demostrar si su respuesta es afirmativa o dé un contraejemplo en caso contrario.

PRODUCTO CARTESIANO.

Recordemos que un conjunto A con dos elementos a y b, se denota por $A = \{a, b\}$ o bien $A = \{b, a\}$, no importando el orden en que se colocan los elementos en el conjunto A. Así, cuando hablamos de conjuntos, nos referimos siempre a conjuntos no ordenados, en el sentido que podemos colocar o disponer los elementos del conjunto en cualquier orden. Esta situación se tiene por ejemplo en algunos juegos de azar como el KINO, que consiste en elegir 15 números entre 1 y 25. Así, una típica jugada (o cartón) de KINO está dada por

$$\{1, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24\},$$

sin importar el orden de los números. Si al momento del sorteo, los 15 números ganadores fueron : 10, 14, 12, 7, 5 , 1, 3, 6, 20, 21, 24, 19, 22, 17, 18, entonces el cartón anterior será premiado, pues contiene exactamente todos los números ganadores.

Un caso distinto se tiene en un juego de azar como LOTERÍA, donde se compra un "billete" que contiene 5 dígitos. Un típico billete de lotería es 45324. Si el billete ganador fuese 34524, nuestro número 45324 no sería ganador puesto que ahora si importa el orden en que aparecen los 5 dígitos que componen el número. En el caso de Lotería, los 5 dígitos forman un conjunto ordenado, que se representa generalmente como (4, 5, 3, 2, 4)

Nos interesa hablar de conjuntos ordenados con 2 elementos o también llamados pares ordenados, los que denotaremos por (a, b).

Observe que usamos la misma notación para intervalo abierto con extremos "a" y "b", pero ello no debiera llevarnos a confusión. En el contexto actual, un par ordenado (a, b) es un conjunto con dos elementos "a" y "b" con la condición que "a" se ubica en primer lugar y "b" se ubica en segundo lugar.

Según esa definición de par ordenado, resulta evidente que el par (1, 3) no es lo mismo que el par (3,1). En general, (a, b) y (b, a) son distintos, salvo que $a = b$.

Escribimos: $(a,b) = (b,a) \Leftrightarrow a = b$ y

Más generalmente: $\boxed{(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d}$

Negando tenemos: $\boxed{(a, b) \neq (c, d) \Leftrightarrow a \neq c \vee b \neq d}$

EJEMPLO 67.

(a) Encuentre el valor de x e y si $(2x-1, 4) = (1, 1+2y)$

SOLUCIÓN. De la igualdad de los pares podemos deducir:

$$2x-1=1 \ \wedge \ 4=1+2y \text{, es decir, } x=1 \ \wedge \ y=\frac{3}{2}$$

(b) Encuentre el valor de x e y si $(2x-y, 1) = (4, x+2y)$

SOLUCIÓN. De nuevo tenemos : $2x-y=4 \ \wedge \ 1=x+2y$, lo que habitualmente se escribe:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ x+2y=1 \end{array}\right|$$

Este es un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Aplicando métodos vistos en la enseñanza media, obtenemos $x=\frac{9}{5} \ \wedge \ y=-\frac{2}{5}$

c) Encuentre x e y si $(x^2+y-3, 2) = (1, x+y)$

SOLUCIÓN. De la igualdad de pares tenemos $x^2+y-3=1 \ \wedge \ 2=x+y$, o bien

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y-3=1 \\ x+y=2 \end{array}\right|$$

Este es un sistema de dos ecuaciones, la primera cuadrática y la segunda lineal.
Despejemos y de la segunda ecuación : $y=2-x$
Reemplazando este valor en la primera ecuación, nos queda: $x^2+(2-x)-3=1$, o sea, $x^2-x-2=0$ que es una ecuación cuadrática (o de 2° grado) con discriminante $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$

Luego $x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2} \Rightarrow x_1=-1 \ \vee \ x_2=2$

Así, para $x_1=-1$ tendremos $y_1=2-x_1=2+1=3$
y para $x_2=2$ tendremos $y_2=2-x_2=2-2=0$
En consecuencia las soluciones (x, y) son $(-1, 3)$ y $(2, 0)$

EJERCICIO 32. Determine en cada caso, los valores de x e y que satisfacen la igualdad indicada:

(a) $(5x+1,\ 4) = (-1, 4)$
(b) $(x-y,\ x+y) = (1,6)$
(c) $(2,\ 5x - y) = (4x,\ 1)$
(d) $(x^2 + y^2,\ 2) = (4,\ y)$
(e) $(x^2 + xy + y^2,\ x - y) = (1, 1)$

Ahora bien, sea A un conjunto en un universo U_1 y sea B otro conjunto en un universo U_2. Con esto también queremos decir que los universos U_1 y U_2 podrían no ser iguales.

El **PRODUCTO CARTESIANO** de A y B, denotado por $A \times B$, es el conjunto formado por todos los pares ordenados con primer elemento en A y segundo elemento en B.

Simbólicamente se tiene:

$$\boxed{A\times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}}$$

Debe quedar claro que todo elemento de $A \times B$ es un par ordenado y además

$$(x, y) \in A\times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

como también $(x, y) \notin A\times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$

Así por ejemplo, se tiene las siguientes equivalencias:

- $(x-y,\ y) \in A\times B \Leftrightarrow (x-y) \in A \wedge y \in B$
- $(u, u^2) \in C\times D \Leftrightarrow u \in C \wedge u^2 \in D$
- $(p-q+1,\ 2-p) \in E\times F \Leftrightarrow (p-q+1) \in E \wedge (2-p) \in F$
- $4 \in A \wedge -2 \in B \Leftrightarrow (4, -2) \in A\times B$
- $(p-1) \in F \wedge q^2 \in G \Leftrightarrow (p-1,\ q^2) \in F\times G$

EJEMPLO 68.

Sean $A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{3, a\}$

Entonces $A\times B = \{(1,3); (1, a); (2,3); (2,a); (4, 3); (4,a)\}$

También $B\times A = \{(3, 1); (3, 2); (3, 4); (a, 1); (a, 2); (a, 4)\}$ observando que cada par (x, y) del producto cartesiano $B\ x\ A$ tiene su primer elemento $x \in B$ y su segundo elemento $y \in A$.

Tal como se indicó, los pares ordenados en $A\times B$ son distintos de los pares ordenados en $B\times A$, por ejemplo $(2, 3) \neq (3,2)$. Es decir, el producto $A\times B$ no es igual al producto $B\times A$; son conjuntos distintos.

Se concluye que, no existe conmutatividad en el producto cartesiano, razón por la cual debemos tener mucho cuidado en respetar la ubicación de A y B en el producto $A\times B$.

EJEMPLO 69.

Sean $U=\{1,2,3,\ldots,10\}$; $A=\{1,3,7\}$; $B=\{2,3\}$; $C=\{1,7,9\}$. Expresar por extensión los conjuntos :

i) $(A\cap B)\times(A\cap C)$
ii) $[(A\cap B)\times B]\cup[(C-A)\times A]$

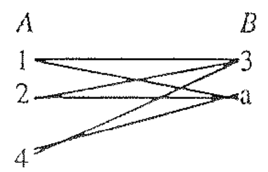
SOLUCIÓN.

i)
$$A\cap B=\{3\}$$
$$A\cap C=\{1,7\}$$
$$\therefore\ (A\cap B)\times(A\cap C)=\{(3,1),(3,7)\}$$

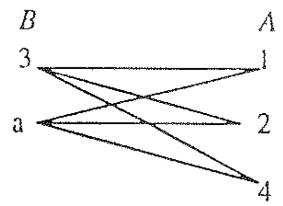
ii)
$$(A\cap B)\times B=\{(3,2),(3,3)\}$$
$$C-A=\{9\}$$
$$(C-A)\times A=\{(9,1);(9,3);(9,7)\}$$
$$\therefore\ [(A\cap B)\times B]\cup[(C-A)\times A]=\{(3,2);(3,3);(9,1);(9,3);(9,7)\}$$

A continuación estableceremos algunas propiedades relativas al producto cartesiano.

1. Supóngase que el conjunto A es finito con n elementos y que B es otro conjunto finito con m elementos. ¿Cuántos pares ordenados tiene el producto $A\times B$? y ¿ $B\times A$? En el ejemplo 68, $n=3$ pues A tiene 3 elementos y $m=2$ pues B tiene 2 elementos. Así resulta $A\times B$ con $3\cdot 2=6$ pares ordenados, pues cada elemento de A debe aparejarse con cada elemento de B. El siguiente diagrama muestra los 6 pares formados.



En el caso de $B\times A$, el número de pares ordenados es exactamente el mismo, pues la única diferencia entre $A\times B$ y $B\times A$ es el <u>orden</u> de cada par ordenado.



Más generalmente:

"Si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces $A \times B$ y $B \times A$ tienen $n \cdot m$ elementos cada uno".

2. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Podemos efectuar el producto cartesiano de A consigo mismo, vale decir $A \times A$. En efecto, $A \times A$ contendrá todos los pares ordenados con primer y segundo elemento en A .

   Así, $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

   Este conjunto $A \times A$ se denota usualmente como A^2

   Así por ejemplo, $\mathbf{N}^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3),..., (2,1), (2,2), (2,3),...,(3,1), (3,2), (3,3),...\}$

3. $A \times B \neq \phi \Leftrightarrow A \neq \phi \wedge B \neq \phi$ (*)

   Esta propiedad nos dice que un producto cartesiano tiene por lo menos un elemento ssi tanto A como B deben tener al menos un elemento. Negando la relación anterior se tiene: $A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$ (si A o B no tiene elementos ¿cómo formaremos pares ordenados?)

   Veamos ahora la demostración de (*).

$$\begin{aligned} A \times B \neq \phi &\Leftrightarrow \exists\ (x, y) \in A \times B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge y \in B \\ &\Leftrightarrow A \neq \phi \wedge B \neq \phi \qquad \therefore\ A \times B \neq \phi \Rightarrow A \neq \phi \wedge B \neq \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \neq \phi \wedge B \neq \phi &\Leftrightarrow \exists\ x \in A \wedge \exists\ y \in B \\ &\Rightarrow (x, y) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow A \times B \neq \phi \qquad \therefore\ A \neq \phi \wedge B \neq \phi \Rightarrow A \times B \neq \phi \end{aligned}$$

4. Son válidas las siguientes propiedades distributivas:

   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

   (c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

   Aquí haremos la demostración de (c), dejando al lector las otras dos.
   Comencemos eligiendo (x, y) en $(A \times B) - (A \times C)$

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) - (A \times C) &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin A \vee y \notin C) \\ &\Leftrightarrow [\ (x \in A \wedge y \in B) \wedge x \notin A\ ] \vee [\ (x \in A \wedge y \in B) \wedge (y \notin C)\ ] \\ &\Leftrightarrow [\ (x \in A \wedge x \notin A) \wedge y \in B\ ] \vee [\ x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)\ ] \\ &\Leftrightarrow [F \wedge y \in B] \vee [x \in A \wedge y \in B - C] \qquad (F \textit{ es contradicción}) \\ &\Leftrightarrow F \vee [x \in A \wedge y \in B - C] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B - C$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times (B - C)$$
$$\therefore (\forall (x, y))((x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times (B - C))$$

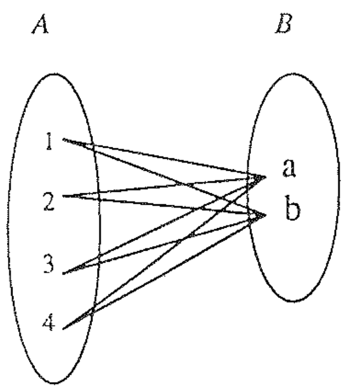
$$\therefore (A \times B) - (A \times C) = A \times (B - C)$$

Aquí se prefirió llamar F (en vez de C) a una contradicción, para no confundir con el conjunto C.

REPRESENTACIONES GRAFICAS DEL PRODUCTO CARTESIANO.

Las dos formas más comunes de representar gráficamente un producto cartesiano entre 2 conjuntos A y B tienen que ver con el tamaño de los conjuntos. En el caso que A y B sean conjuntos finitos con pocos elementos cada uno, se suele representar cada par ordenado (x, y) con una línea que une x e y.

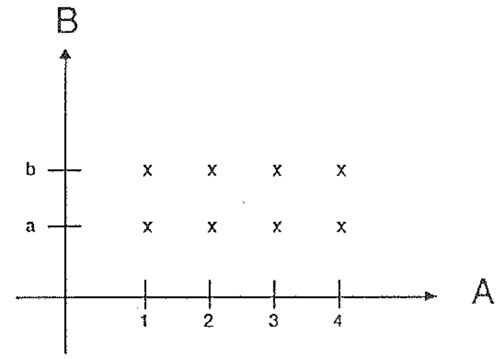
Así por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces los 8 pares ordenados corresponderán a 8 líneas o conexiones como se muestra a continuación:



¿Qué sucedería si A tuviese 500 elementos y B tuviese 100?

Nuestro gráfico tendría exactamente 50.000 líneas, demasiadas para trazarlas todas y que quede algo legible. En tal caso, vale decir para conjuntos con muchos elementos, se sugiere usar otro tipo de representación gráfica, que utilizan 2 rectas (o ejes) perpendiculares y en que cada par ordenado (x, y) se identifica con un único punto en el plano formado por las 2 rectas. Esta es conocida como representación CARTESIANA del producto $A \times B$ y asumimos que el alumno también la conoce desde la educación media.

En el mismo ejemplo anterior, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$ la representación cartesiana del producto $A \times B$ es la siguiente:



En la recta horizontal (o eje de abscisas) se ubican los elementos del conjunto A y en la recta vertical (o eje de ordenadas) se ubican los elementos de B. Así, los 8 pares ordenados del producto $A \times B$ serán los 8 puntos (marcados con x) que se muestran en la figura.

EJEMPLO 70.

Sean $A = \{x \in \mathbf{N} /\ x\ es\ par\ \wedge\ 1 \leq x < 7\ \}$

$B = \{x \in \mathbf{Z} /\ x \leq\ 2\ \Rightarrow\ x^2 < 5\ \}$

Representar gráficamente el producto cartesiano $B \times A$

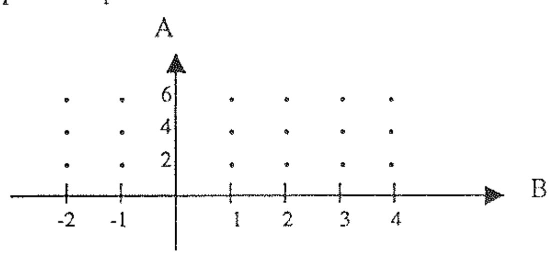
SOLUCIÓN:

Expresemos por extensión los conjuntos A y B.

$A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Observemos que en el producto $B \times A$, colocaremos en el eje horizontal al conjunto B y en el eje vertical al conjunto A.

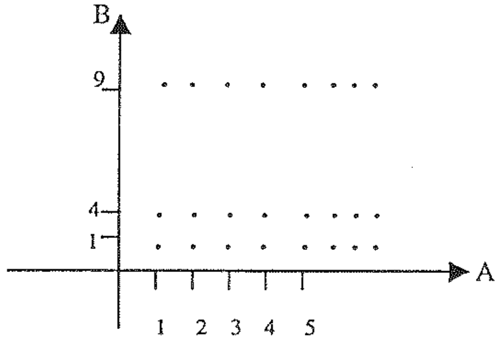
Así, $B\ x\ A$ se representa por:



EJEMPLO N° 71.

Graficar $A \times B$ siendo $A = \mathbf{N}$; $B = \{x \in \mathbf{N} / \exists\ y \in \mathbf{N}\ \wedge\ x = y^2\ \}$

SOLUCIÓN. El conjunto B expresado por extensión es $B = \{1, 4, 9, 16, ...\}$
Luego el producto $A \times B$ se puede representar como sigue:

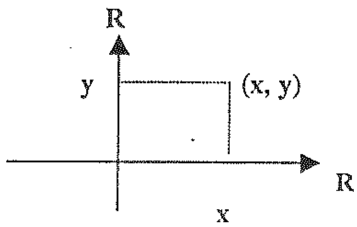


EJEMPLO 72.

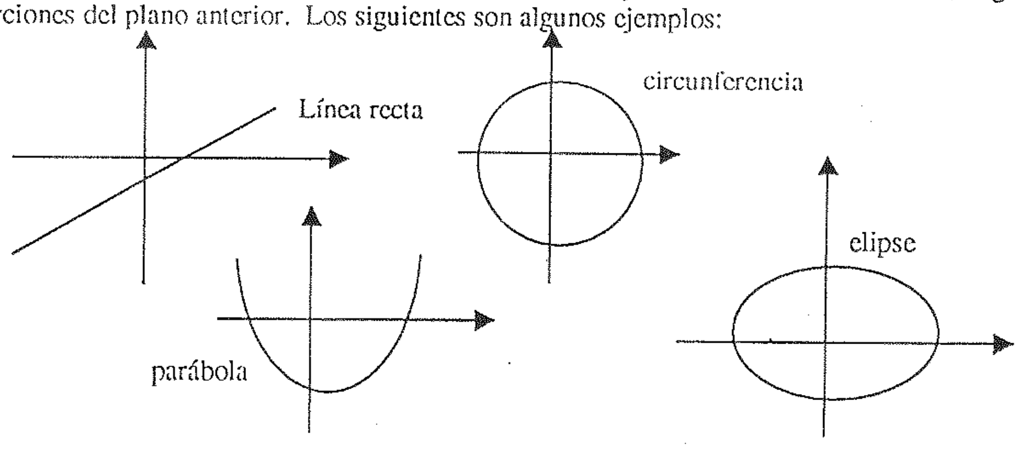
Graficar $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

SOLUCIÓN.

El conjunto **R** se representa por medio de la recta real, es decir, cada número real es un punto de la recta y vice-versa.
El conjunto $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \,/\, x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R}\}$ se representa por todos los pares ordenados de números reales. Luego, cualquier punto del plano formado por los ejes de abscisa y ordenada será un punto en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$□
Así, la representación gráfica de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$□s el conjunto de todos los puntos del plano formado por los dos ejes perpendiculares:



Más adelante nos interesará distinguir algunos subconjuntos de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, es decir, algunas porciones del plano anterior. Los siguientes son algunos ejemplos:



CAPITULO III

DESIGUALDADES E INECUACIONES.

Las desigualdades y las inecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita serán de bastante utilidad en los capitulos siguientes de Relaciones y Funciones, razón por la cual las insertamos en esta parte del texto. Las inecuaciones de primer grado en dos incógnitas se aplican para describir regiones factibles de un problema de Programación Lineal, tema que el alumno estudiará inicialmente en un curso de Algebra Lineal y con mayor profundidad en un curso de Investigación Operativa.

Acá introduciremos con alguna formalidad los conceptos de "menor que", "menor o igual que", "mayor que" y "mayor o igual que", los que simbolizamos respectivamente por: $<, \leq, >, \geq$.

Sabemos que $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ representa al conjunto de números positivos. Tenemos los siguientes axiomas en relación con $\mathbb{R}^+$ y las operaciones de adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$.

<u>AXIOMA 1.</u> $\boxed{(\forall x)\,(\forall y)\,(x \in \mathbb{R}^+ \;\wedge\; y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+)}$

(La suma de dos números reales <u>positivos</u> es otro número real <u>positivo</u>)

Como se trata de un axioma, aceptaremos su veracidad, aún cuando nos debiera parecer evidente. Note Ud., que la implicación contraria, vale decir :

$x + y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+ \;\wedge\; y \in \mathbb{R}^+$, no es necesariamente verdad.

(Tome como contraejemplo $x = 5$, $y = -3$)

<u>AXIOMA 2</u>: $\boxed{(\forall x)(\forall y)\,(x \in \mathbb{R}^+ \;\wedge\; y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}^+)}$

(La multiplicación de dos números reales <u>positivos</u> es otro número real <u>positivo</u>)

La implicación contraria no es necesariamente verdadera. ¿Porqué?

Axioma 3 : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (x \in \mathbb{R}^+ \ \underline{\vee}\ (-x) \in \mathbb{R}^+ \ \underline{\vee}\ x = 0)}$

El símbolo $\underline{\vee}$ conocido como "disyunción excluyente" y que leemos "o excluyente" se define como otro conectivo lógico mediante la tabla:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se observa que $p \underline{\vee} q$ es V sólo cuando p y q tiene diferentes valores de verdad; sólo una de las proposiciones debe ser V para que $p \underline{\vee} q$ sea Verdadera. Corresponde a la negación de $p \Leftrightarrow q$.

Luego el axioma 3, establece: $x > y \ \ ssi \ \ y < x \ \ ssi \ \ (x-y) \in \mathbb{R}^+$

Para cada número real, sólo una de las siguientes tres afirmaciones es verdadera: el número es positivo o (excluyentemente) su inverso aditivo es positivo o (excluyentemente) el número es cero.

Piense en un número real, por ejemplo $x = 7$, entonces $x \in \mathbb{R}^+$ es Verdadera, mientras que $-x \in \mathbb{R}^+$ es Falso y $x = 0$ es Falso.

También, si $x = -8$, tenemos $x \in \mathbb{R}^+$ es Falso, $-x \in \mathbb{R}^+$ Verdadero y $x = 0$ es Falso.

Utilizando estos tres axiomas, podemos definir los símbolos de desigualdad $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$, además de sus propiedades.

Sean $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (se entiende que x e y son cualesquiera). Decimos que "x es menor que y" (en símbolos $x < y$) si la diferencia $y - x$ es un número real positivo, o sea, $(y - x) \in \mathbb{R}^+$.

Así por ejemplo, $2 < 5$ es V pues $5 - 2 = 3 \in \mathbb{R}^+$

$3 < 1$ es F pues $1 - 3 = -2 \notin \mathbb{R}^+$

$0 < \frac{1}{5}$ es V pues $\frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}^+$

Tenemos entonces : $\boxed{x < y \;\; ssi \;\; (y-x) \in \mathbb{R}^+}$

Se define también "x es mayor que y" (en símbolos $x > y$ si y es menor que x).

Luego se tiene: $\boxed{x > y \;\; ssi \;\; y < x \;\; ssi \;\; (x-y) \in \mathbb{R}^+}$

También definimos "x es menor o igual que y" (en símbolos $x \leq y$) si "x es menor que y" o excluyentemente "x es igual que y" .

Es decir: $\boxed{x \leq y \quad ssi \quad x < y \;\underline{\vee}\; x = y}$

Por último, definimos "x es mayor o igual que y" (en símbolos $x \geq y$) si "x es mayor que y" o excluyentemente "x es igual que y".

$\boxed{x \geq y \quad ssi \quad x > y \;\underline{\vee}\; x = y}$

El <u>conjunto de los números reales negativos</u> $\mathbb{R}^-$, se define como

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -x \in \mathbb{R}^+\}$ es decir, son todos aquellos números cuyo inverso aditivo es positivo.

Según esa definición se tiene: $\boxed{x \in \mathbb{R}^- \quad ssi \quad -x \in \mathbb{R}^+}$

Además, $x > 0 \Leftrightarrow x - 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$

y también $x < 0 \Leftrightarrow 0 - x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^-$

$\therefore$ $\boxed{x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+}$ y $\boxed{x < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^-}$

<u>PROPIEDADES BASICAS DE DESIGUALDADES:</u>

(P1) $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x < y \;\underline{\vee}\; x > y \;\underline{\vee}\; x = y)}$ (Tricotomía)

En efecto, si x e y con dos números reales cualesquiera, entonces $x - y$ es otro número real. De acuerdo con el axioma 3, tenemos: $x - y \in \mathbb{R}^+ \;\underline{\vee}\; -(x-y) \in \mathbb{R}^+ \;\underline{\vee}\; x - y = 0$

Ahora bien, $x - y \in \mathbb{R}^+ \iff x > y$.

También $-(x-y) \in \mathbb{R}^+ \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \iff y > x \iff x < y$

y además $x - y = 0 \iff x = y$

Asi concluímos que $x > y \;\underline{\vee}\; x < y \;\underline{\vee}\; x = y$

Esto nos indica que <u>sólo una</u> de las 3 afirmaciones será verdadera, lo que nos permite concluir que $x \not> y \;\wedge\; x \not< y \;\; ssi \;\; x = y$

También, $x > y \;\wedge\; x \neq y \;\; ssi \;\; x < y$

O sea $\boxed{x \not\geq y \iff x < y}$ (La negación de $x \geq y$ *es* $x < y$)

Análogamente $\boxed{x \not\leq y \iff x > y}$ (La negación de $x \leq y$ *es* $x > y$)

En lo sucesivo, simplificaremos $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})$ por $(\forall x,\ y \in \mathbb{R})$

(P2) $\boxed{(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ \ (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)}$ (Transitividad)

En efecto: $x < y \;\wedge\; y < z \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \;\wedge\; z - y \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow (y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{(Axioma 1)}$$

$$\iff z - x \in \mathbb{R}^+$$

$$\iff x < z$$

También se verifican las propiedades transitivas siguientes:

$(\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R})\,(x \leq y \wedge y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z)$

$(\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R})\,(x > y \wedge y > z \;\Rightarrow\; x > z)$

$(\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R})\,(x \geq y \wedge y \geq z \;\Rightarrow\; x \geq z)$

(P3) $\boxed{(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ \ (x < y \iff x + z < y + z)}$

Esta propiedad indica que en cualquier desigualdad podemos sumar a ambos miembros un número real cualquiera y la desigualdad permanece.

En efecto: $x + z < y+z \Leftrightarrow (y+z)-(x+z) \in \mathbf{R}^+$ (definición de <)

$\Leftrightarrow y-x \in \mathbf{R}^+$ (simplificando)

$\Leftrightarrow x < y$ (definición de <)

Análogamente se tiene: $\boxed{(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\ (x < y \Leftrightarrow x-z < y-z)}$

También son válidas propiedades similares en que se sustituye < por $\leq$, > o $\geq$

(P4) $\boxed{(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\ [x \cdot y > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]}$

"Un producto de 2 números reales es positivo ssi los números son ambos positivos o ambos negativos".

En efecto:

(i) $x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}^+ \wedge y \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbf{R}^+ \Leftrightarrow x\,y > 0$

(ii) $x < 0 \wedge y < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}^- \wedge y \in \mathbf{R}^- \Leftrightarrow -x \in \mathbf{R}^+ \wedge -y \in \mathbf{R}^+$

$\Rightarrow (-x) \cdot (-y) \in \mathbf{R}^+ \Leftrightarrow x \cdot y \in \mathbf{R}^+ \Leftrightarrow x \cdot y > 0$

$\therefore (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow x \cdot y > 0$

(iii) $x > 0 \wedge y < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}^+ \wedge y \in \mathbf{R}^- \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}^+ \wedge -y \in \mathbf{R}^+$

$\Rightarrow x \cdot (-y) \in \mathbf{R}^+ \Leftrightarrow -x \cdot y \in \mathbf{R}^+ \Leftrightarrow x \cdot y \in \mathbf{R}^- \Leftrightarrow x \cdot y < 0$

(iv) Análogamente $x < 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$

$\therefore (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x \cdot y < 0$

En resumen se tiene:

x	y	$x \cdot y$
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

¿No le parece esta tabla de signos similar a la tabla de equivalencia lógica?

En consecuencia, el producto de x e y es positivo ssi x e y tienen el mismo signo.

(P5) $\boxed{(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\left[x \cdot y < 0 \Leftrightarrow (x>0 \wedge y<0) \vee (x<0 \wedge y>0)\right]}$

"Un producto de 2 números reales es negativo ssi los números tienen diferente signo".

(P6) $\boxed{(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \ (x<y \wedge z>0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z)}$

"Si a una desigualdad $x<y$ se le multiplican ambos miembros por un número <u>positivo</u> z entonces la desigualdad <u>se</u> <u>mantiene</u>".

En efecto:

$$x<y \wedge z>0 \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{R}^+ \wedge z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (y-x) \cdot z \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow (y \cdot z - x \cdot z) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \cdot z < y \cdot z$$

Del mismo modo, son verdaderos los enunciados:

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge z>0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \ (x>y \wedge z>0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z)$

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \ (x \geq y \wedge z>0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z)$

(P7) $\boxed{(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \ (x<y \wedge z<0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z)}$

"Si a una desigualdad $x<y$ se le multiplican ambos miembros por un número <u>negativo</u> z entonces la desigualdad <u>se</u> <u>invierte</u>". La demostración se deja como ejercicio al alumno.

Son también válidas: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge z<0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z)$

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x>y \wedge z<0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \geq y \wedge z<0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$

(P8) $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0)}$

"El inverso multiplicativo de un número positivo x, es también positivo"

Demostremos primeramente $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$, usando reducción al absurdo (taut. Nº 37):

$$x > 0 \wedge \frac{1}{x} \not> 0 \iff x > 0 \wedge \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \left[x > 0 \wedge (\frac{1}{x} < 0 \vee \frac{1}{x} = 0) \right]$$

$$\Rightarrow [\ x > 0 \wedge (\frac{1}{x} < 0 \ \vee C)\ ] \Rightarrow [\ x > 0 \ \wedge \ \frac{1}{x} \leq 0\ ] \Rightarrow \ x \cdot \frac{1}{x} \leq 0 \ \Rightarrow 1 \leq 0 \Rightarrow C$$

Ahora falta demostrar $\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$. Esta parte se deja al alumno.

Análogamente se tiene $(\forall\ x \in \mathbb{R})(x < 0 \iff \frac{1}{x} < 0)$

¿Cómo se interpreta?

(P9) $\boxed{(\forall x,\ y \ \in \mathbb{R})\ (\ 0 < x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\ )}$

"Si tenemos dos números positivos, uno menor que otro, los inversos multiplicativos satisfacen la desigualdad contraria".

Por ejemplo, se sabe que : $3 \ < \ 5$ entonces $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

Dicho de otro modo, en una fracción $\frac{a}{b}$ si aumentamos el denominador entonces la fracción disminuye y también, si disminuimos el denominador entonces la fracción aumenta.

La demostración de (P9) se deja como ejercicio.

(P10) $\boxed{(\forall x, y, u, v \in \mathbb{R})\ (x < y \wedge u < v \Rightarrow x + u < y + v)}$

"Si tenemos dos desigualdades $x < y \ \wedge \ u < v$ entonces la suma de los miembros menores $(x + u)$, es menor que la suma de los mayores $(y + v)$".

Una propiedad similar se tiene para el producto, pero mientras las cantidades no sean negativas.

(P11) $\boxed{(\forall x, y, u, v \in \mathbb{R})\ (0 \leq x < y \ \wedge\ 0 \leq u < v \Rightarrow 0 \leq x \cdot u < y \cdot v)}$

(P12) $\boxed{(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n)}$

Esta propiedad nos indica que "en una desigualdad con números positivos, podemos elevar ambos miembros a una potencia natural y la desigualdad se mantiene".

Para demostrar esta propiedad, recordemos las siguientes factorizaciones:

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

y más generalmente: $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + x^{n-3} \cdot y^2 + \ldots + y^{n-1})$

Por hipótesis, $0 < x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$

Además, $x \in \mathbb{R}^+ \wedge y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + x^{n-3} \cdot y^2 + \ldots + y^{n-1} \in \mathbb{R}^+$

$\therefore\ (y - x) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + x^{n-3} \cdot y^2 + \ldots + y^{n-1}) \in \mathbb{R}^+$

o sea, $x^n - y^n \in \mathbb{R}^+$ y entonces $x^n < y^n$

Observe que esta propiedad también indica $\boxed{x > y > 0 \Rightarrow x^n > y^n}$ pues $x > y \Leftrightarrow y < x$

(P13) $\boxed{(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (0 < x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y})}$

Para demostrar, usemos la propiedad contrarecíproca de la lógica (Taut.N° 18), o sea,

$(0 < x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}) \Leftrightarrow (\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y}) \Rightarrow x \geq y)$

Luego $(\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y}) \Leftrightarrow (\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}) \vee (\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y})$

$\Rightarrow (\sqrt[n]{x})^n > (\sqrt[n]{y})^n \vee (\sqrt[n]{x})^n = (\sqrt[n]{y})^n$ según (P12)

$\Leftrightarrow x > y \vee x = y$

$\Leftrightarrow x \geq y$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Recordemos que una ecuación de primer grado en una incógnita es una ecuación de la forma $ax+b=0$, siendo $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Su solución es $x = -\dfrac{b}{a}$, la que se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& a\,x + b = 0 && / + (-b) \\
\Leftrightarrow\ & a\,x + b + (-b) = 0 + (-b) \\
\Leftrightarrow\ & a\,x + 0 = -b \\
\Leftrightarrow\ & a\,x = -b && / \cdot \frac{1}{a} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{a} \cdot a\,x = \frac{1}{a} \cdot (-b) \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Una inecuación de primer grado en una incógnita (o variable) x es una desigualdad de los siguientes 4 tipos o modelos básicos, donde $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

$$a\,x + b > 0 \quad ó \quad a\,x + b \geq 0 \quad ó \quad a\,x + b < 0 \quad ó \quad a\,x + b \leq 0$$

La solución se obtiene usando un procedimiento similar al de las ecuaciones. Así, tenemos en el primer caso: $a\,x + b > 0 \quad / + (-b)$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & a\,x + b + (-b) > 0 + (-b) && \text{(según P3 la desigualdad no cambia)} \\
\Leftrightarrow\ & a\,x + 0 > -b \\
\Leftrightarrow\ & a\,x > -b
\end{aligned}$$

Ahora debemos tener cuidado al momento de multiplicar por $\dfrac{1}{a}$

(a) Si $a > 0$ entonces $\dfrac{1}{a} > 0$ (según P8)

Luego, $a\,x > -b \quad / \cdot \dfrac{1}{a}$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{a} \cdot a\,x > -\frac{b}{a} && \text{(según P6 la desigualdad no cambia)} \\
\Leftrightarrow\ & x > -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

La solución en este caso es $S = \left\{x \in 5 \ / \ x > -\dfrac{b}{a}\right\}$, o en notación de intervalos es

$$S = \left(-\frac{b}{a}\ ,\ +\infty\right)$$

(b) Si $a < 0$ entonces es $\frac{1}{a} < 0$ (según la observación dada en P8)

Luego $a\,x > -b \qquad / \cdot \frac{1}{a}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot a\,x < -\frac{b}{a}$ (según P7 la desigualdad se invierte)

$\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

Así, la solución es $S = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < -\frac{b}{a} \} = (-\infty, \frac{-b}{a})$

En el caso de los otros 3 modelos de inecuaciones de primer grado, se procede de manera análoga.

EJEMPLO Nº 73:

Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $1 - 3\,x \leq 0$ b) $1 - \frac{2x}{3} > 3 - 4x$ c) $(2x-1)^2 - 3 < 4x + (3+2x)(1+2x)$

d) $2 - \frac{3}{x} \geq 5$

SOLUCION:

a) $1 - 3\,x \leq 0 \qquad / + (-1)$

$\Leftrightarrow -3x \leq -1 \qquad / \cdot (-\frac{1}{3})$ (Observe que multiplicamos por un número negativo)

$\Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{-3}$ (según P7, la desigualdad cambia de sentido)

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$\therefore\; S = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq \frac{1}{3} \} = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

b) $1 - \frac{2x}{3} > 3 - 4x \qquad / + (-1)$

$\Leftrightarrow -\frac{2x}{3} > -1 + 3 - 4x \qquad \Leftrightarrow -\frac{2x}{3} > 2 - 4x \qquad / \cdot 3$

$\Leftrightarrow -2x > 6 - 12x \qquad / + 12x \qquad \Leftrightarrow 12x - 2x > 6$

$\Leftrightarrow 10x > 6 \quad /\cdot\frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{6}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3}{5}$

$\therefore\ S = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x > \frac{3}{5}\ \} = \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$

c) $(2x-1)^2 - 3 < 4x + (3+2x)(1+2x)$

Tal como se indica, debemos desarrollar los productos y enseguida agrupar términos semejantes, resultando:

$$
\begin{array}{rll}
4x^2 - 4x + 1 - 3 < 4x + 3 + 6x + 2x + 4x^2 & & /-4x^2 \\
-4x - 2 < 12x + 3 & /+2 & \\
-4x < 12x + 5 & /-12x & \\
-16x < 5 & /\cdot(-1) & \\
16x > -5 & \text{(hubo cambio en los signos y en la desigualdad)} & \\
x > -\frac{5}{16} & &
\end{array}
$$

$\therefore\ S = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x > -\frac{5}{16}\ \} = \left(-\frac{5}{16}, +\infty\right)$

d) $2 - \frac{3}{x} \geq 5 \qquad / + (-2)$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{x} \geq 5 + (-2)$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{x} \geq 3$

<u>CUIDADO</u>, aquí se tiene la tentación de multiplicar ambos lados de la inecuación por x (o sea, pasar x que divide en el lado izquierdo, multiplicando al lado derecho). Esto es un <u>**ERROR**</u>. El problema es que <u>no</u> <u>sabemos</u> si x es positivo o negativo como para aplicar (P6) manteniendo $\geq$ o aplicar (P7) cambiando a $\leq$.

Aquí podemos trabajar de la siguiente manera: (más adelante se explica otra forma de proceder).

Separamos la recta real en 2 partes : $x > 0 \ \wedge\ x < 0$

Caso 1 ——————|—————— Caso 2
0

<u>CASO 1:</u> Aquí buscamos las soluciones que pudiesen existir en $(-\infty, 0)$, es decir, <u>suponiendo</u> $x < 0$ continuamos resolviendo la inecuación :

$-\frac{3}{x} \geq 3 \qquad /\cdot x \qquad$ (como $x < 0$, aplicamos P7)

$$\Leftrightarrow -3 \leq 3x \qquad / \cdot \frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{-3}{3} \leq x \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 \leq x$$

Esta solución $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x\}$ deberá intersectarse con $(-\infty, 0)$, pues esa es precisamente la <u>condición</u> ($x < 0$) que nos condujo a ese conjunto solución.

Luego, la solución para este primer caso es:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x\} \cap (-\infty, 0) \\ &= [-1, +\infty) \cap (-\infty, 0) = [-1, 0) \end{aligned}$$

<u>CASO 2:</u> Ahora buscamos las soluciones que pudieran existir en $(0, +\infty)$, es decir, ahora <u>suponemos</u> $x > 0$ y continuamos resolviendo la inecuación:

$$-\frac{3}{x} \geq 3 \qquad / \cdot x \qquad (\text{como } x > 0, \text{ aplicamos P6})$$

$$\Leftrightarrow -3 \geq 3x \qquad / \cdot \frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow \frac{-3}{3} \geq x \qquad \Leftrightarrow -1 \geq x$$

Así, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \geq x\} \cap (0, +\infty)$
$= [-\infty, -1] \cap (0, +\infty) = \phi$

¿Qué debemos hacer ahora con S_1 y S_2?

Corresponde la unión de ambos, o sea $S = S_1 \cup S_2$ puesto que el conjunto solución debe contener aquellas soluciones que son positivas (si es que las hay) además de aquellas que son negativas (si es que las hay).

$$\therefore\ S = [-1, 0) \cup \phi = [-1, 0)$$

Note Ud., que si un profesor desea determinar el conjunto de todos sus alumnos con nota ≥ 4, el profesor puede buscar separadamente los alumnos con nota ≥ 4 en el grupo A, en el grupo B y en el grupo C. Una vez que encontró estos tres conjuntos, deberá <u>unirlos</u> para determinar el conjunto total de alumnos con nota ≥ 4.

<u>EJERCICIO 33.</u> Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1) $2x - 3 < 0$ 2) $1 - 4x \geq 0$ 3) $2(3 - 2x) < 5(1 - x)$

4) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \geq x + 1$ 5) $3(x-1)(x+1) < 3x^2 + 2x - 6$ 6) $\frac{1-3x}{4} < 2(1-x)$

8) $5+\dfrac{1-2x}{3} < x+\dfrac{1}{2}$ 9) $\dfrac{5}{x}<1$ (separe en 2 casos : $x>0 \;\wedge\; x<0$)

10) $\dfrac{3-x}{x}<2$ 11) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-x}{3x}\right)>5$

INECUACIONES QUE SE REDUCEN A PRIMER GRADO.

Ahora se trata de resolver inecuaciones que no son precisamente de primer grado, pero que con ayuda de las propiedades (P4) y (P5) pueden transformarse en otras de primer grado.

Según (P4), un producto de 2 números es positivo ssi ambos números son positivos o ambos negativos.

Usando esta propiedad se puede resolver una inecuación como la siguiente:

EJEMPLO 74. Encontrar el conjunto solución de la inecuación $(2x+3)\cdot(1-4x)>0$.

SOLUCION:

Aquí los dos números se representan por $(2x+3)$ y $(1-4x)$

Luego, $(2x+3)\cdot(1-4x)>0 \Leftrightarrow (\underbrace{2x+3>0}_{(1)} \wedge \underbrace{1-4x>0}_{(2)}) \vee (\underbrace{2x+3<0}_{(3)} \wedge \underbrace{1-4x<0}_{(4)})$

Pasamos a tener 4 nuevas inecuaciones que resolver, todas ellas de primer grado. Sus soluciones las llamaremos S_1, S_2, S_3 y S_4, respectivamente.

Resolviendo (1): $2x+3>0 \Leftrightarrow 2x>-3 \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\; S_1=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x>-\tfrac{3}{2}\}=\left(-\tfrac{3}{2},\,+\infty\right)$$

Resolviendo (2) : $1-4x>0 \Leftrightarrow -4x>-1 \Leftrightarrow 4x<1 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$

$$\therefore\; S_2=\left(-\infty,\,\tfrac{1}{4}\right)$$

Resolviendo (3): $2x+3<0 \Leftrightarrow 2x<-3 \Leftrightarrow x<-\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\; S_3=\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)$$

Resolviendo (4): $1-4x<0 \Leftrightarrow 1<4x \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<x$

$$\therefore\; S_4=\left(\tfrac{1}{4},\,+\infty\right)$$

¿Qué debemos ahora hacer con S_1, S_2, S_3 y S_4?
La respuesta la proporciona la propiedad P4: donde aparece disyunción ($\vee$) corresponderá UNION de conjuntos y donde aparece conjunción ($\wedge$) corresponderá INTERSECCION de conjuntos.

$$(2x+3)\cdot(1-4x)>0 \Leftrightarrow (2x+3>0 \wedge 1-4x>0) \vee (2x+3<0 \wedge 1-4x<0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

Luego;

$$\begin{aligned} S &= (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) \\ &= \left[\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)\cap\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\right] \cup \left[\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cap\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\right] \\ &= \left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right) \cup \phi \\ &= \left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Esto nos indica que x satisface la inecuación ssi $x \in \left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$

(o sea que x no satisface la inecuación ssi $x \notin \left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$)

EJEMPLO 75.

Encontrar el conjunto solución de $(3x+2)(2x-5)\leq 0$

SOLUCION:

Aquí aplicamos una pequeña variante de la propiedad (P5), a saber:

$$a\cdot b\leq 0 \Leftrightarrow (a\leq 0 \wedge b\geq 0) \vee (a\geq 0 \wedge b\leq 0)$$

(el hecho de que el producto puede ser 0 permite que tanto a como b puedan ser 0)

Así, $(3x+2)\cdot(2x-5)\leq 0 \Leftrightarrow (3x+2\leq 0 \wedge 2x-5\geq 0) \vee (3x+2\geq 0 \wedge 2x-5\leq 0)$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$(1) \qquad (2) \qquad (3) \qquad (4)$$

Resolviendo (1): $3x+2\leq 0 \Leftrightarrow 3x\leq -2 \Leftrightarrow x\leq -\frac{2}{3} \quad \therefore S_1=\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]$

Resolviendo (2): $2x-5\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 5 \Leftrightarrow x\geq \frac{5}{2} \quad \therefore S_2=\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

Resolviendo (3): $3x+2\geq 0 \Leftrightarrow 3x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq -\frac{2}{3} \quad \therefore S_3=\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$

Resolviendo (4): $2x-5\leq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 5 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{2} \quad \therefore S_4=\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$

$$\therefore S=(S_1\cap S_2)\cup(S_3\cap S_4)=\left[\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cap\left[\frac{5}{2},+\infty\right)\right]\cup\left[\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)\cap\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]\right]$$

$$= \phi \qquad \cup \qquad \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right]$$

$$= \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right]$$

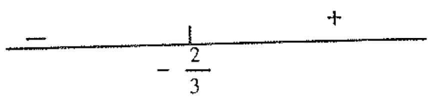
El método anterior para resolver la inecuación $(3x+2)\ (2x-5) \leq 0$, podemos resumirlo mediante una "<u>tabla de signos</u>" para los dos factores $(3x+2)$ y $(2x-5)$.

Primeramente, tomamos el factor $3x+2$ y determinamos para que valores de x se tiene $3x+2>0$ (o sea $3x+2$ es positivo) y para que valores de x tenemos $3x+2>0$ (o sea $3x+2$ es negativo).

$$3x+2>0 \iff 3x>-2 \iff x>-\frac{2}{3}$$

$$3x+2>0 \iff 3x<-2 \iff x<-\frac{2}{3}$$

Se concluye que $3x+2$ es positivo si $x>-\dfrac{2}{3}$ y $3x+2$ es negativo si $x<-\dfrac{2}{3}$



Como vemos, el número $x=-\dfrac{2}{3}$ es justo el punto que separa el sector donde $3x+2$ es positivo del sector donde $3x+2$ es negativo. Por ello, $x=-\dfrac{2}{3}$ es llamado <u>punto crítico</u> para la expresión $3x+2$.

El punto crítico para el factor $2x-5$ se obtiene resolviendo la ecuación $2x-5=0$, o sea $x=\dfrac{5}{2}$.

Así, para $x>\dfrac{5}{2}$ ¿qué signo tiene $2x-5$, positivo o negativo?. Basta elegir un número mayor que $\dfrac{5}{2}$ para saberlo, por ejemplo con $x=3$ resulta $2x-5=2\cdot 3-5=6-5=1$ positivo. En consecuencia si $x>\dfrac{5}{2}$ entonces $2x-5>0$. Se deduce también que si $x<\dfrac{5}{2}$ entonces $2x-5<0$.

Coloquemos todo esta información en una <u>TABLA DE SIGNOS</u>. Usamos una fila de la tabla por cada factor. La primera fila contendrá los signos del factor $3x+2$, la segunda fila contendrá los signos del factor $2x-5$ y colocamos una última fila con los signos del producto $(3x+2)\ (2x-5)$, multiplicando los signos de los factores. En las columnas aparecen los intervalos en que se divide la recta real al ubicar los dos puntos críticos $x=-\dfrac{2}{3}$ y $x=\dfrac{5}{2}$.

Así, la tabla resulta ser:

	$-\infty$ … $-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$ … $\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$ … $+\infty$
$3x+2$	$-$	$+$	$+$
$2x-5$	$-$	$-$	$+$
$(3x+2)\ (2x-5)$	$+$	$-$	$+$

La última fila nos indica que:

$(3x+2)\ (2x-5)\ >0$ si $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ y

$(3x+2)\ (2x-5)\ <0$ si $x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{2}\right)$

Recordemos que nuestro problema inicial es resolver $(3x+2)\ (2x-5)\ \leq 0$.

La parte <0 del símbolo $\leq$ tiene como solución $\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{2}\right)$.

La igualdad que contiene el símbolo $\leq$, obliga a incluir en la solución aquellos valores donde $(3x+2)\ (2x-5)=0$, o sea, $3x+2=0$ y $2x-5=0$, vale decir, los puntos críticos $x=-\frac{2}{3}$ y $x=\frac{5}{2}$

Así, el conjunto solución de la inecuación $(3x+2)\ (2x-5)\ \leq 0$ viene dado por $S=\left[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}\right]$

EJERCICIO 76.

Encontrar el conjunto solución de la inecuación: $\dfrac{3x^2+3x-6}{3-x}>0$

SOLUCION:

Observamos que el numerador del miembro izquierdo es una expresión cuadrática, que en este caso puede factorizarse como: $3x^2+3x-6=3(x^2+x-2)=3(x-1)(x+2)$

Luego la inecuación resulta: $\dfrac{3(x-1)\ (x+2)}{3-x}>0$

Multiplicando la desigualdad por $\frac{1}{3}$ tenemos $\dfrac{(x-1)(x+2)}{3-x}>0$

Observe que la inecuación plantea una expresión >0, es decir, interesa encontrar todos los valores de x que hacen que el miembro izquierdo tenga signo positivo.

Busquemos los puntos críticos de cada uno de los 3 factores:

$x-1=0 \iff x=1$

$x+2=0 \iff x=-2$

$3-x=0 \iff x=3$

Construyamos ahora la tabla de signos:

	$-\infty$, -2	-2 , 1	1 , 3	3 , $+\infty$
$x-1$	-	-	+	+
$x+2$	-	+	+	+
$3-x$	+	+	+	-
$\dfrac{(x-1)(x+2)}{3-x}$	+	-	+	-

Luego la solución final es $S = (-\infty, -2) \cup (1,3)$

EJEMPLO 77: Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x-3} \leq 5$

b) $\dfrac{2x+3}{x} - 2 > x$

SOLUCION:

a) $\dfrac{1}{x-3} \leq 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-5(x-3)}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5x+16}{x-3} \leq 0$

Ahora que se tiene un cuociente ≤ 0; continuamos analizando los signos de $-5x+16$ y de $x-3$.

El punto crítico de $-5x+16$ es $-5x+16=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{5}$

El punto crítico de $x-3$ es $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

La tabla de signos resulta:

	$-\infty$, 3	3 , $\frac{16}{5}$	$\frac{16}{5}$, $+\infty$
$-5x+16$	+	+	-
$x-3$	-	+	+
$\dfrac{-5x+16}{x-3}$	-	+	-

El conjunto solución es $S = (-\infty, 3) \cup \left[\dfrac{16}{5}, +\infty\right)$

Observe que hemos incluido $x = \dfrac{16}{5}$, pues con ese valor la expresión $-5x+16$ se hace 0, luego el cuociente $\dfrac{-5x+16}{x-3}=0$ con lo cual también se cumple $\dfrac{-5x+16}{x-3} \leq 0$.

En cambio, no se ha incluido $x-3$ en la solución pues el denominador de $\dfrac{-5x+16}{x-3}$ no puede ser 0.

b) $\dfrac{2x+3}{x}-2>x \iff \dfrac{2x+3}{x}-2-x>0 \iff \dfrac{2x+3-2x-x^2}{x}>0 \iff$

$\iff \dfrac{-x^2+3}{x}>0 \iff \dfrac{x^2-3}{x}<0 \iff \dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x}<0$

Los puntos críticos son:

$x-\sqrt{3}=0 \iff x=\sqrt{3}$
$x+\sqrt{3}=0 \iff x=-\sqrt{3}$
$x=0$

La tabla de signos es:

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a 0	0 a $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ a $+\infty$
$x-\sqrt{3}$	-	-	-	+
$x+\sqrt{3}$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$\dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x}$	-	+	-	+

$\therefore$ El conjunto solución es $S=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup(0,\sqrt{3})$

EJERCICIO Nº 34.

Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1) $2(x-3)+1<x-5$

2) $\dfrac{x+1}{2}-3<5x-\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{2}{2x+5}<6$

4) $\dfrac{1}{2x+5}<\dfrac{2}{x-3}$

5) $(2x+5)(x-3)>0$

6) $\dfrac{3}{x-6}<-\dfrac{5}{x}$

7) $(x-3)(x^2-5x+6)\geq 0$

8) $3-\dfrac{2}{x-1}\leq\dfrac{1}{x-2}$

INECUACIONES CUADRATICAS.

Una expresión cuadrática en la variable x tiene la forma : $ax^2 + bx + c$, siendo a,b,c números reales y $a \neq 0$

(En el caso $a = 0$, la expresión queda $bx + c$ que ya no es cuadrática, sino lineal o de primer grado).

Una ecuación cuadrática o de Segundo Grado, es una ecuación que tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

El discriminante de la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ está definido como :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Se sabe que si $\Delta > 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales, a saber, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (A estas dos soluciones o raíces de la ecuación se les denota como x_1 y x_2 para poder diferenciarlas)

Además, la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se podrá factorizar como:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Por otro lado, si $\Delta = 0$ la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución real, que viene dada por $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$

En este caso podemos factorizar $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Por último, si $\Delta < 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales y en ese caso la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ no se puede factorizar en R.

Así por ejemplo, la expresión cuadrática $2x^2 - 3x - 2$ tiene discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$. Luego las dos raíces o soluciones reales de la ecuación $2x^2 - 3x - 2 = 0$ son: $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{25}}{4} = \dfrac{3-5}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ $\therefore\ x_1 = -\dfrac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \therefore\ x_2 = -2$$

La expresión $2x^2 - 3x - 2$ se factoriza como $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 2)$ o bien

$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$

Una <u>INECUACION CUADRATICA</u> o de Segundo Grado en la variable x es una desigualdad que tiene una de las siguientes formas o modelos:

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$ ó $ax^2+bx+c\leq 0$

¿Cómo encontrar el conjunto solución en cada caso?

Para responder a esto, vamos a analizar según el signo del discriminante de la expresión cuadrática ax^2+bx+c.

<u>CASO 1</u>: Supongamos que el discriminante $\Delta=b^2-4ac>0$.

Como se sabe, la expresión ax^2+bx+c tendrá dos raíces reales x_1 y x_2.

Además podemos factorizar $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\,(x-x_2)$

Luego, resolvemos la inecuación en cualquiera de sus 4 modelos, tal como se hizo en los ejemplos 74 y 75.

Para simplificar este análisis, supondremos también que $a>0$. En caso de ser $a<0$ bastará multiplicar la inecuación por (-1) con el consiguiente cambio en el signo de desigualdad.

Así, si la inecuación es $a(x-x_1)\,(x-x_2)>0$, multiplicamos por $\dfrac{1}{a}$ (que también será positivo cuando $a>0$) y obtenemos $(x-x_1)\,(x-x_2)>0$

Los puntos críticos de cada factor son:

$x-x_1=0 \iff x=x_1$

$x-x_2=0 \iff x=x_2$

La tabla de signos será:

	$-\infty$ … x_1	x_1 … x_2	x_2 … $+\infty$
$x-x_1$	-	+	+
$x-x_2$	-	-	+
$(x-x_1)(x-x_2)$	+	-	+

$\therefore$ La solución para $ax^2+bx+c>0$ es $S=(-\infty,\,x_1)\cup(x_2,\,+\infty)$,

la solución para $ax^2+bx+c\geq 0$ es $S=\left(-\infty,\,x_1\right]\cup\left[x_2,\,+\infty\right)$,

la solución por $ax^2+bx+c<0$ es $S=(x_1,\,x_2)$ y

la solución para $ax^2+bx+c\leq 0$ es $S=[\,x_1,\,x_2\,]$

<u>CASO 2:</u> Supongamos ahora que $\Delta=b^2-4ac=0$ y que $a>0$.

En este caso $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

Así, la inecuación $ax^2+bx+c>0 \iff a(x-x_1)^2>0 \iff (x-x_1)^2>0$

y la expresión $(x-x_1)^2$ es siempre ≥ 0, o sea, $(\forall x\in \mathrm{R})\left((x-x_1)^2\geq 0\right)$

Además $(x-x_1)^2=0 \iff x-x_1=0 \iff x=x_1$

$\therefore$ la solución para $ax^2+bx+c>0$ es $S=\mathbb{R}-\{x_1\}$
la solución para $ax^2+bx+c\geq 0$ es $S=\mathbb{R}$
la solución para $ax^2+bx+c<0$ es $S=\phi$
y la solución para $ax^2+bx+c\leq 0$ es $S=\{x_1\}$

CASO 3: Supongamos ahora que $\Delta=b^2-4ac<0$ y que $a>0$.

En este caso ax^2+bx+c no puede ser factorizada en R.
Sin embargo, podemos escribir:

$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}\cdot x\right)^2+bx+c=\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$$

Como $\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2\geq 0\quad \forall x\in \mathbb{R}\ \wedge\ \frac{-\Delta}{4a}>0$ entonces $ax^2+bx+c>0,\ \forall x\in$

Así, la inecuación $ax^2+bx+c>0$ tiene solución $S=\mathbb{R}$
la inecuación $ax^2+bx+c\geq 0$ tiene solución $S=\mathbb{R}$
la inecuación $ax^2+bx+c<0$ tiene solución $S=\phi$ y
la inecuación $ax^2+bx+c\leq 0$ tiene solución $S=\phi$

Resumamos los casos 1,2 y 3 en el siguiente cuadro, recordando que hemos supuesto $a>0$

	Caso 1 $(\Delta>0)$	Caso 2 $(\Delta=0)$	Caso 3 $(\Delta<0)$
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	$\mathbb{R}-\{x_1\}$	$\mathbb{R}$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$ax^2+bx+c<0$	(x_1,x_2)	ϕ	ϕ
$ax^2+bx+c\leq 0$	$[x_1,x_2]$	$\{x_1\}$	ϕ

EJEMPLO 78.

Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

(a) $2x^2-3x-2\leq 0$
(b) $1-x^2+2x>0$
(c) $4x^2+4x+1\geq 0$
(d) $-x^2-x-2<0$
(e) $x-5x^2-1<0$

SOLUCION:

(a) Las raíces de la ecuación $2x^2-3x-2=0$ son $x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=2$ como $a=2>0$

y de acuerdo al caso 1, tenemos como solución $S=\left[-\frac{1}{2},\ 2\right]$

(b) $1-x^2+2x>0 \iff 1-x^2+2x>0 \iff x^2-2x+1<0$ (ahora a=1>0)

Aquí $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)=4+4=8$

$\therefore x_1=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ y $x_2=\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$

$\therefore S=\left(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$

(c) El discriminante de $4x^2+4x+1$ es $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot1=0$

$\therefore$ la única raíz es $x_1=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad 4x^2+4x+1=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

Así, la solución de $4x^2+4x+1\geq 0$, de acuerdo al caso 2 es $S=\mathbb{R}$

(d) La expresión $-x^2-x-2$ tiene $a=-1<0$. Luego multiplicamos la inecuación $-x^2-x-2>0$ por (-1), resultando $x^2+x+2<0$.

El discriminante para x^2+x+2 es $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

Según el caso 3, la solución de $x^2+x+2<0$ es $S=\phi$

(e) $x-5x^2-1<0 \iff -x+5x^2+1>0 \iff 5x^2-x+1>0$

Ahora, $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot5\cdot1=1-20=-19<0$

Según el caso 3, la solución de $5x^2-x+1>0$ es $S=\mathbb{R}$

<u>EJEMPLO 79.</u> Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x^2-5x+36}{x^2+x+1}<0$ b) $4-\dfrac{4}{x}\geq x$ c) $\dfrac{1}{x-1}+x<\dfrac{x}{x+2}$

SOLUCION.

a) En este caso tenemos un cuociente de dos expresiones cuadráticas.

Como ya se sabe, $\dfrac{a}{b}<0 \iff (a<0 \ \wedge\ b>0)\ \vee\ (a>0\ \wedge\ b<0)$.

Aplicando esta propiedad de signos para un cuociente, que es la misma propiedad de signos para un producto, tenemos:

$$\frac{x^2-5x+36}{x^2+x+1}<0 \Leftrightarrow (\underbrace{x^2-5x+36<0}_{\text{Problema 1}} \wedge \underbrace{x^2+x+1>0}_{\text{Problema 2}}) \vee (\underbrace{x^2-5x+36>0}_{\text{Problema 3}} \wedge \underbrace{x^2+x+1<0}_{\text{Problema 4}})$$

Resolvamos los 4 problemas resultantes y llamemos respectivamente S_1, S_2, S_3 y S_4 a sus conjuntos solución.

Problema 1: $x^2-5x+36<0$

Aquí $\Delta = 25-4\cdot 1\cdot 36 = 25-144 = -119 < 0$

$\therefore\ S_1 = \phi$

Problema 2: $x^2+x+1>0$

Aquí $\Delta = 1-4\cdot 1\cdot 1 = 1-4 = -3 < 0$

$\therefore\ S_2 = \mathrm{R}$

Problema 3: $x^2-5x+36>0$, usa la misma expresión cuadrática que problema 1.

$\therefore\ S_3 = \mathrm{R}$

Problema 4: $x^2+x+1<0$, usa la misma expresión cuadrática que problema 2.

$\therefore\ S_4 = \phi$

$\therefore$ la solución

$$\begin{aligned} S &= (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) \\ &= (\phi \cap \mathrm{R}) \cup (\mathrm{R} \cap \phi) \\ &= \phi \cup \phi \\ &= \phi \end{aligned}$$

Note Ud., que al obtener $S_1 = \phi$, no es necesario obtener S_2 pues $S_1 \cap S_2 = \phi \cap S_2 = \phi$. Lo mismo sucede con S_4 y S_3.

b) $4-\dfrac{4}{x} \geq x \Leftrightarrow 4-\dfrac{4}{x}-x \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-4-x^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{x} \geq 0$

Ahora tenemos 2 opciones para continuar:

i) tomar x^2-4x+4 como una expresión cuadrática o

ii) reemplazar x^2-4x+4 por $(x-2)^2$

Veamos cada una por separado:

i) $$\frac{x^2-4x+4}{x} \geq 0 \iff \Big[\big(\underbrace{x^2-4x+4 \geq 0}_{S_1} \;\wedge\; \underbrace{x<0}_{S_2}\big) \vee \big(\underbrace{x^2-4x+4 \leq 0}_{S_3} \;\wedge\; \underbrace{x<0}_{S_4}\big) \Big]$$

La expresión x^2-4x+4 tiene discriminante $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$.

Según el caso 2. $S_1 = \mathbb{R}$ y además $S_3 = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\} = \left\{\dfrac{4}{2}\right\} = \{2\}$

$\therefore\; S = (\mathbb{R} \cap (0, +\infty)) \;\cup\; (\{2\} \;\cap\; (-\infty, 0)) = (0, +\infty) \cup \phi = (0, +\infty)$

ii) $$\frac{x^2-4x+4}{x} \geq 0 \iff \frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$$

Observando al cuociente del lado izquierdo, vemos que su numerador es $(x-2)^2$ que sea ≥ 0 por ser un cuadrado. Luego, si el numerador es ≥ 0, el denominador deberá ser > 0 para que así el cuociente sea ≥ 0.

(Note Ud., que el denominador no puede ser <u>nunca</u> igual a o)

$$\therefore\; \frac{(x-2)^2}{x} \geq 0 \iff x > 0 \iff x \in \mathbb{R}^+$$

$$\therefore\; S = \mathbb{R}^+$$

c) $$\frac{1}{x-1} + x < \frac{x}{x+2} \iff \frac{1}{x-1} + x - \frac{x}{x+2} < 0 \iff \frac{x+2+x(x-1)(x+2)-x(x-1)}{(x-1)(x+2)} < 0$$

$$\iff \frac{x+2+x^3+x^2-2x-x^2+x}{(x-1)(x+2)} < 0 \iff \frac{x^3+2}{(x-1)(x+2)} < 0$$

$$\iff \frac{(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}\cdot x+(\sqrt[3]{2})^2)}{(x-1)(x+2)} < 0 \iff \frac{(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}\cdot x+\sqrt[3]{4})}{(x-1)(x+2)} < 0$$

Aquí se usó la factorización $x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$.

La expresión cuadrática $x^2-\sqrt[3]{2}\cdot x+\sqrt[3]{4}$ tiene discriminante :

$\Delta = \left(-\sqrt[3]{2}\right)^2 - 4\;\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4} - 4\;\sqrt[3]{4} = -3\;\sqrt[3]{4} < 0$

Luego, esa cuadrática se enmarca en el caso 3.

Para continuar el desarrollo que contiene 4 factores, siendo 3 lineales y uno cuadrático, podemos usar una tabla de signos, considerando que según el caso 3, el signo para $x^2-\sqrt[3]{2}\cdot x+\sqrt[3]{4}$ será $+$, ello pues la solución de $x^2-\sqrt[3]{2}\cdot x+\sqrt[3]{4}>0$ es $\mathbf{R}$, lo que quiere decir que esa cuadrática es positiva, para todo x real.

Los puntos críticos de los 3 factores lineales son : $x=-\sqrt[3]{2}$, $x=1$, $x=-2$. Luego la tabla de signos queda:

$-\infty \quad -2 \quad -\sqrt{2} \quad 1 \quad +\infty$

$x+\sqrt[3]{2}$	-	-	+	+
$x^2-\sqrt[3]{2}\cdot x+\sqrt[3]{4}$	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$x+2$	-	+	+	+
E	-	+	-	+

$\therefore$ la expresión $E=\dfrac{(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}\ x+\sqrt[3]{4})}{(x-1)(x+2)}$ será negativa en $(-\infty,-2)\cup(-\sqrt[3]{2},1)$.

Así, $S=(-\infty,-2)\cup(-\sqrt[3]{2},1)$

EJERCICIO 35 : Encuentre el conjunto solución de las inecuaciones:

1.- $2x^2-x-1<0$

2.- $2x^2-x-1\geq 0$

3.- $4x^2+10x+25\leq 0$

4.- $4x^2+10x+25>0$

5.- $6x^2-4x+1\geq 0$

6.- $-3x^2+5x-1>0$

7.- $3x^2-5x+1\geq 0$

8.- $\dfrac{2x^2-x-1}{x+1}\leq 0$

9.- $\dfrac{6x^2-4x+1}{x^2+x+1}\leq 0$

10.- $x+\dfrac{1}{x}<2$

11.- $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x}\geq 5$

12.- $\dfrac{x^2+3x-16}{-x^2+7x-10}\geq 1$

13.- $\dfrac{2x^2+4x+5}{3x^2+7x+2}<-2$

14.- $\dfrac{6x^2+12x+17}{-2x^2+7x-5}\geq -1$

15.- $1+\dfrac{6}{x^2+3x+2}>\dfrac{6}{x+2}$

16.- $\dfrac{1}{x^2+2x+1}\leq 1$

17.- $3x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{7}{2}$

VALOR ABSOLUTO E INECUACIONES.

En esta parte veremos separadamente los siguientes tópicos :

- El concepto y propiedades del valor absoluto de un número real.
- Ecuaciones con valor absoluto.
- Inecuaciones con valor absoluto.

VALOR ABSOLUTO.

Sea x un número real cualquiera.
Se define el valor absoluto de x como el número real

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}}$$

La definición anterior indica que $|x|$ tiene el mismo valor que x cuando x es mayor o igual que 0, en cambio $|x|$ tiene el valor contrario de x (o sea $-x$) cuando x es negativo (en tal caso $-x$ es positivo).

Así, por ejemplo $|4| = 4$, $\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|0| = 0$, pues x es positivo o cero

$|-3| = 3$, $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $|-\pi| = \pi$, pues x es negativo.

Como Ud., puede apreciar, el resultado del cálculo de un valor absoluto, siempre será ≥ 0, es decir, $(\forall x \in \mathrm{R})(\,|x| \geq 0)$

De la misma definición se tiene también $\quad |x| = 0 \iff x = 0$

Sólo con esto, podemos afirmar que la solución para la ecuación $\left|x^2 - 4x + 5\right| \geq 0$ es $S = \mathrm{R}$ y que la solución de $\left|x - \frac{4}{5}\right| < 0$ es $S = \phi$.

Por las mismas razones anteriores, también se tiene que:

- la inecuación $|5x - 3| \leq 0 \iff |5x - 3| = 0$ (no puede ser < 0)
  $\iff 5x - 3 = 0$ (pues $|x| = 0 \iff x = 0$)
  $\iff 5x = 3 \qquad \iff x = \frac{5}{3} \qquad \therefore\ S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

- La inecuación $\left|2x^2 - 5x + 6\right| < -5$ tiene $S = \phi$ pues un valor absoluto no puede ser negativo ni menor que un negativo.

- La inecuación $\left|2x^2 + 3x + 4\right| > -2$ tiene solución $S = \mathrm{R}$, pues cualquier valor absoluto será siempre mayor que un negativo.

Otras inecuaciones con valor absoluto, como por ejemplo $\left|5x^2 - 3\right| \geq 5$ requieren de un método particular de solución, que será visto más adelante (vea Ud., que esa inecuación la satisface $x = 2$ pero no la satisface $x = 0$, por eso interesa determinar exactamente aquellos valores de x que la satisfacen).

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO.

1. Es común que el estudiante maneje la igualdad $\sqrt{x^2} = x$, pero esto es Falso en muchos casos. Vea Ud., lo que resulta de ella cuando $x = -3$. Tendríamos $\sqrt{(-3)^2} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = -3 \Leftrightarrow 3 = -3$ FALSO. La expresión $\sqrt{x^2}$ es siempre POSITIVA en cambio x puede ser positivo o negativo, luego no pueden ser iguales siempre.

   Un error común en el alumno es creer que $\sqrt{9} = \pm 3$. Esto no es efectivo. La verdad es que $\sqrt{9} = 3$. ¿De dónde proviene este error?. Cuando se resuelve la ecuación cuadrática $x^2 = 9$ o bien $x^2 - 9 = 0$, cuyo discriminante es $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36 > 0$, sabremos que hay 2 soluciones, $x_1 = \dfrac{0-\sqrt{36}}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ y $x_2 = \dfrac{0+\sqrt{36}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.
   $\therefore\ x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$, pero sólo se usó $\sqrt{9} = 3$, los signos + y - vienen de saber que la ecuación cuadrática tiene 2 soluciones (una con + y otra con -).

   Todo lo anterior, sirve como argumento para la propiedad: $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\sqrt{x^2} = |x|)}$
   En efecto,
   Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x^2} = x \ \wedge\ |x| = x$, o sea $\sqrt{x^2} = |x| = x$
   Si $x < 0$ entonces $\sqrt{x^2} = -x \ \wedge\ |x| = -x$, o sea $\sqrt{x^2} = |x| = -x$
   (por ejemplo, con $x = -3$ se tiene $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -x$)
   Si $x = 0$ entonces $\sqrt{x^2} = \sqrt{0} = 0 \ \wedge\ |x| = |0| = 0$, o sea, $\sqrt{x^2} = |x|$

2.- $(\forall x,\ y \in \mathbb{R})\ (|x \cdot y| = |x| \cdot |y|)$

La demostración podemos hacerla separando en varios casos dependiendo de si los números x e y son positivos, negativos o cero.

(i) Si $x = 0 \ \vee\ y = 0$ entonces $x \cdot y = 0$

$\therefore\ |x \cdot y| = |0| = 0$ y también $|x| = 0 \ \vee\ |y| = 0$, es decir $|x| \cdot |y| = 0$

Así, se concluye que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = 0$

(ii) Supongase ahora que $x > 0 \ \wedge\ y > 0$

Luego se tiene $|x| = x \ \wedge\ |y| = y$ (por definición de valor absoluto)

Además $x \cdot y > 0$, con lo cual se tiene $|x \cdot y| = xy$

$$\therefore |x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$$

(ii) Supóngase ahora que $x < 0 \quad \wedge y > 0$

Luego se tiene $|x| = -x \quad \wedge \quad |y| = y$

Además $x \cdot y < 0$, con lo cual se tiene $|x \cdot y| = -x \cdot y$

$$\therefore \quad |x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$$

Los otros 2 casos son:

(iii) $x > 0 \quad \wedge \quad y < 0$

(iv) $x < 0 \quad \wedge \quad y < 0$

y se dejan para que los demuestre el alumno.

3.- $(\forall x \in \mathrm{R})(\forall y \in \mathrm{R} - \{0\}) \left(\left| \dfrac{x}{y} \right| = \dfrac{|x|}{|y|} \right)$

La demostración es análoga a la anterior y se deja para el alumno.

4.- $(\forall x \in \mathrm{R})(|x + y| \leq |x| + |y|)$

Esta propiedad no es particularmente usada en la resolución de ecuaciones o inecuaciones con valor absoluto, pero se ha querido mencionar para que el alumno vea que no es una igualdad.

En efecto, si tomamos $x = 2$, $y = 3$ resulta $|x + y| = |5| = 5$, además $|x| = 2$ y $|y| = 3$, es decir, $|x + y| = |x| + |y|$.

Sin embargo, si $x = 2$ e $y = -3$ resulta $|x + y| = |-1| = 1$, pero $|x| = 2$, $|y| = 3$ con lo cual $|x| + |y| = 2 + 3 = 5$, es decir en este caso se tiene $|x + y| < |x| + |y|$.

Entonces, debe quedar claro que $|x + y| \neq |x| + |y|$ para algunos valores de x e y, de modo que no podemos usar la igualdad en cualquier caso. En verdad, la igualdad es válida sólo cuando x e y son ambos positivos o ambos negativos.

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO.

El modelo básico de una ecuación con valor absoluto es $|x| = a$. Por lo que hemos establecido, si $a < 0$ entonces la solución de la ecuación $|x| = a$ es $S = \phi$. La razón es que nunca un valor absoluto podrá ser igual a un número negativo.

De modo que ahora nos centraremos en el caso $a > 0$.

(i) Si $x > 0$ entonces $|x| = x$. Luego $|x| = a \iff x = a$.

(ii) Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$. Luego $|x| = a \iff -x = a \iff x = -a$.

(iii) Si $x = 0$ entonces $|x| = |0| = 0$. Luego $|x| = a \iff 0 = a$ (Falso, pues $a > 0$)

$\therefore$ como $x > 0 \veebar x < 0 \veebar x = 0$ tenemos

$$|x| = a \iff x = a \veebar x = -a$$

Usando la propiedad anterior, podemos resolver algunas inecuaciones que tengan el tipo o modelo $|x| = a$

EJEMPLO 80. Encontrar el conjunto solución de :

a) $\left|2x - \frac{1}{2}\right| = 6$ b) $|5x^2 - 10x + 6| = 1$

SOLUCION.

a) De acuerdo al modelo propuesto con $a = 6$, tenemos :

$$\left|2x - \frac{1}{2}\right| = 6 \iff 2x - \frac{1}{2} = 6 \vee 2x - \frac{1}{2} = -6$$

$$\iff 2x = 6 + \frac{1}{2} \vee 2x = -6 + \frac{1}{2} \iff 2x = \frac{13}{2} \vee 2x = -\frac{11}{2}$$

$$\iff x = \frac{13}{4} \vee x = -\frac{11}{4} \qquad \therefore S = \left\{-\frac{11}{4}, \frac{13}{4}\right\}$$

b) $|5x^2 - 10x + 6| = 1 \iff 5x^2 - 10x + 6 = 1 \vee 5x^2 - 10x + 6 = -1$

$$\iff \underbrace{5x^2 - 10x + 5 = 0}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{5x^2 - 10x + 7 = 0}_{\mathrm{II}}$$

Resolviendo (I) : $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 0$

La ecuación tiene única solución $x = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{10} = 1 \qquad \therefore S_1 = \{1\}$

Resolviendo (II): $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = -40 < 0$

La ecuación no tiene solución $\qquad \therefore S_2 = \phi$

Por lo tanto, la solución final es: $S = S_1 \cup S_2 = \{1\} \cup \phi = \{1\}$

EJEMPLO 81: Resolver la ecuación $|5x-6| = |x+1|$

SOLUCION: Aquí nos enfrentamos a un modelo del tipo $|x| = |y|$, o sea una igualdad entre 2 valores absolutos.
Si tomamos el modelo $|x| = a$, siendo $a = |y|$, resultará:

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = |y| \vee x = -|y|$$
$$\Leftrightarrow x = |y| \vee -x = |y| \Leftrightarrow |y| = x \vee |y| = -x$$

Si $x > 0$, sólo nos queda $|y| = x$, o sea $y = x \vee y = -x$, puesto que $-x < 0$ y la ecuación $|y| = -x$ tiene solución ϕ

Si $x < 0$, sólo nos queda $|y| = -x$, o sea, $y = x \vee y = -x$ por la misma razón anterior.

En consecuencia, tenemos: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$

Aplicando este nuevo modelo, resulta:

$$|5x-6| = |x+1| \Leftrightarrow 5x-6 = x+1 \vee 5x-6 = -x-1$$
$$\Leftrightarrow 4x = 7 \qquad \vee \qquad 6x = 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \qquad \vee \qquad x = \frac{5}{6} \qquad\qquad \therefore\ S = \left\{\frac{5}{6}, \frac{7}{4}\right\}$$

EJEMPLO 82. Encontrar el conjunto solución de la ecuación:

$$|5x-1| + |3x-2| = 2 + |x|$$

SOLUCION.

Observemos que esta ecuación no corresponde al modelo $|x| = a$, de hecho el miembro izquierdo es una suma de valores absolutos. Para resolver, aplicaremos la definición de valor absoluto a cada una de las expresiones que lo llevan.

$$|5x-1| = \begin{cases} 5x-1 & si\ 5x-1 \geq 0 \\ -(5x-1) & si\ 5x-1 < 0 \end{cases}$$

es decir

$$|5x-1| = \begin{cases} 5x-1 & si\ x \geq \frac{1}{5} \\ 1-5x & si\ x < \frac{1}{5} \end{cases} \qquad (x = \frac{1}{5} \text{ es punto crítico})$$

Así también: $$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & si\ 3x-2 \geq 0 \\ -(3x-2) & si\ 3x-2 < 0 \end{cases}$$

es decir , $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & si \quad x \geq \frac{2}{3} \\ 2-3x & si \quad x < \frac{2}{3} \end{cases}$ $\quad (x = \frac{2}{3}$ es punto crítico)

Finalmente $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ $\quad (x = 0$ es punto crítico)

Ahora, los 3 puntos críticos (uno por cada valor absoluto) y las 3 expresiones involucradas las colocamos en una tabla de signos y la recta real quedará dividida en 4 sectores.

$-\infty$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$				
$5x-1$	-	-	+	+
$3x-2$	-	-	-	+
x	-	+	+	+

Ahora buscamos las soluciones por cada sector o tramo.

(i) Primer sector : $(-\infty, 0)$

Observando la tabla de signos vemos que:

$5x-1<0$, es decir $|5x-1| = 1-5x$

$3x-2<0$, es decir $|3x-2| = 2-3x$

$x<0$, es decir $|x| = -x$

Luego, la ecuación $|5x-1|+|3x-2| = 2+|x|$ queda $(1-5x)+(2-3x) = 2+(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; 3-8x = 2-x \; \Leftrightarrow \; -7x = -1 \; \Leftrightarrow \; x = \frac{1}{7}$

Esta solución la intersectamos con el sector $(-\infty, 0)$ y resulta $S_1 = (-\infty, 0) \cap \left\{\frac{1}{7}\right\} = \phi$

(i) Segundo sector : $\left(0, \frac{1}{5}\right)$

Observando los signos en la tabla, la ecuación ahora queda:

$(1-5x)+(2-3x) = 2+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; 3-8x = 2+x \; \Leftrightarrow \; -9x = -1 \; \Leftrightarrow \; x = \frac{1}{9} \qquad \therefore \; S_2 = \left(0, \frac{1}{5}\right) \cap \left\{\frac{1}{9}\right\} = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

(iii) Tercer sector: $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right)$

Ahora la ecuación queda: $\quad (5x-1)+(2-3x) = 2+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; 2x+1 = 2+x \; \Leftrightarrow \; x = 1 \qquad \therefore \; S_3 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right) \cap \{1\} = \phi$

(iv) Cuarto sector: $\left(\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$

La ecuación queda : $(5x-1)+(3x-2)=2+x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8x-3=2+x \Leftrightarrow 7x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{7} \qquad \therefore\ S_4=\left(\frac{2}{3},+\infty\right)\cap\left\{\frac{5}{7}\right\}=\left\{\frac{5}{7}\right\}$$

Así, la solución final es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \phi \cup \left\{\dfrac{1}{9}\right\} \cup \phi \cup \left\{\dfrac{5}{7}\right\} = \left\{\dfrac{1}{9}, \dfrac{5}{7}\right\}$

<u>EJEMPLO 83.</u> Encontrar el conjunto solución de la ecuación:

a) $\left|x^2-4x+3\right|-\left|2x-1\right|=5$ b) $\left|2x^2+x+1\right|-x=1-\left|x+3\right|$

<u>SOLUCION.</u>

a) Según la definición de valor absoluto,

$$\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases} x^2-4x+3 & si\ \ x^2-4x+3\geq 0 \\ -(x^2-4x+3) & si\ \ x^2-4x+3<0 \end{cases}$$

Ahora para determinar los valores de x tales que $x^2-4x+3\geq 0$ debemos resolver esa inecuación.

La expresión cuadrática x^2-4x+3 tiene discriminante $\Delta=b^2-4ac=16-4\cdot 1\cdot 3=4$

Las raíces de la expresión cuadrática son $x_1=\dfrac{4-\sqrt{4}}{2}=1$ y $x_2=\dfrac{4+\sqrt{4}}{2}=3$

Luego la solución de $x^2-4x+3\geq 0$ es $(-\infty, 1] \cup [3,+\infty)$

$$\therefore\ \left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases} x^2-4x+3 & si\ \ x\in(-\infty,1\,]\cup[3,+\infty) \\ -x^2+4x-3 & si\ \ x\in(1,3) \end{cases}$$

Por otra parte,

$$\left|2x-1\right|=\begin{cases} 2x-1 & si\ 2x-1\geq 0 \\ -(2x-1) & si\ 2x-1<0 \end{cases} \qquad \text{o sea,}\quad \left|2x-1\right|=\begin{cases} 2x-1 & si\ x\geq\dfrac{1}{2} \\ 1-2x & si\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Así tenemos 3 puntos críticos, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$ y $x=3$, lo que nos lleva a dividir al análisis en 4 tramos. La tabla de signos es la siguiente:

	$-\infty$ a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
x^2-4x+3	+	+	-	+
$2x-1$	-	+	+	+

(i) Primer tramo: $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$

La ecuación $\left|x^2-4x+3\right|-\left|2x-1\right|=5$ queda : $\left(x^2-4x+3\right)-\left(1-2x\right)=5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ x^2-4x+3-1+2x=5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x-3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(-3)=16$$

$$\therefore\ x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2} \ \Rightarrow\ x_1=\frac{-2}{2}=-1 \quad \wedge \quad x_2=\frac{6}{2}=3$$

$$\therefore\ S_1=\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)\cap\{-1,3\}=\{-1\}$$

(ii) Segundo tramo: $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$

La ecuación ahora queda: $\left(x^2-4x+3\right)-\left(2x-1\right)= \ \Leftrightarrow\ x^2-6x-1=0$

$$\Delta\ =\ 36-4\cdot1\cdot(-1)=40$$

$$\therefore\ x=\frac{6\pm\sqrt{40}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{10}}{2}=3\pm\sqrt{10}\ \Rightarrow x_1=3-\sqrt{10} \quad \wedge \quad x_2=3+\sqrt{10}$$

$$\therefore\ S_2=\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\ \cap\left\{3-\sqrt{10},\ 3+\sqrt{10}\right\}=\phi$$

(iii) Tercer tramo: $(1,\ 3)$

La ecuación queda: $\left(-x^2+4x-3\right)-\left(2x-1\right)=5 \ \Leftrightarrow\ -x^2+2x-7=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x+7=0$. Como $\Delta=4-4\cdot1\cdot7=-24<0$, no existe solución

$$\therefore\ S_3=(1{,}3)\ \cap\ \phi=\phi$$

(iv) Cuarto tramo: $(3,\ +\infty)$

Observando la tabla de signos podemos apreciar que en este tramo, todos los signos son iguales a los signos del tramo $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, lo que quiere decir que la ecuación resultante será la misma y también lo será su solución. $\therefore\ S_4=S_2=\phi$

Note Ud., que en ninguno de los tramos se tomó en cuenta los puntos críticos. Ahora verificamos si ellos cumplen o no la ecuación original.

Para $x=\frac{1}{2}$, la expresión $\left|x^2-4x+3\right|-\left|2x-1\right|=\left|\frac{1}{4}-2+3\right|-\left|1-1\right|$

$$=\left|\frac{5}{4}\right|-0=\frac{5}{4}\neq5 \quad \text{(no satisface)}$$

Puede Ud., comprobar que tampoco satisfacen la ecuación los puntos críticos $x=1$ y $x=3$

Así, la solución final es $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\{-1\}\cup\phi\cup\phi\cup\phi=\{-1\}$

(b) $\left|2x^2+x+1\right|-x=1-|x+3|$

Según la definición de valor absoluto $\left|2x^2+x+1\right|=\begin{cases} 2x^2+x+1 & si\ \ 2x^2+x+1\geq 0 \\ -(2x^2+x+1) & si\ \ 2x^2+x+1<0 \end{cases}$

Encontremos la solución de $2x^2+x+1\geq 0$

Aquí $\Delta=1-4\cdot 2\cdot 1=-7<0$, luego su solución es R

Por consiguiente, la solución de $2x^2+x+1<0$ es ϕ.

$\therefore \left|2x^2+x+1\right|=2x^2+x+1$ pues $2x^2+x+1\geq 0,\ \forall x\in R$

Por otra parte, $|x+3|=\begin{cases} x+3 & si\ \ x+3\geq 0 \\ -(x+3) & si\ \ x+3<0 \end{cases}$ o sea, $|x+3|=\begin{cases} x+3 & si\ \ x\geq -3 \\ -x-3 & si\ \ x<-3 \end{cases}$

El único punto crítico encontrado es $x=-3$, o sea que analizamos sólo 2 sectores:
La tabla de signos es:

	$-\infty$ -3	-3 $+\infty$
$2x^2+x+1$	+	+
$x+3$	-	+

(i) Primer sector: $(-\infty,-3)$

La ecuación $\left|2x^2+x+1\right|-x=1-|x+3|$ queda

$$\left(2x^2+x+1\right)-x=1-(-x-3) \iff 2x^2-x-3=0$$

$$\Delta=1-4\cdot(2)\cdot(-3)=25 \Rightarrow x_1=\frac{1-5}{2}=-2 \ \wedge\ x_2=\frac{1+5}{2}=3$$

$$\therefore S_1=(-\infty,-3)\cap\{-2,3\}=\phi$$

(ii) Segundo sector: $(-3,+\infty)$

La ecuación ahora queda: $\left(2x^2+x+1\right)-x=-1-(x+3)\iff$

$$\iff 2x^2+x+5=0 \quad con \quad \Delta=1-4(2)(5)=-39<0$$

$$\therefore S_2=(-3,+\infty)\cap\phi=\phi$$

Así, la solución final es $S=S_1\cup S_2=\phi\cup\phi=\phi$

<u>EJERCICIO 36</u>: Resolver las siguientes inecuaciones:

1.- $|3x-6|=1$ 2.- $|1-4x|=-2$ 3.- $|1-5x|=|2x-3|$ 4.- $\left|2x^2-4x+1\right|=\left|x^2-1\right|$

5.- $|2-3x|+|1-4x|=5$ 6.- $|3-x|+|2-x|-1=|2x-3|-|x|$ 7.- $3\left|2x+\frac{1}{2}\right|-|x|=4-|x+1|$

8.- $|1-2x|+\left|x^2-1\right|=3$ 9.- $\left|3x^2+x+5\right|-|5x+2|=1-|x|$

10.- $\left|3+2x-x^2\right|-\left|1-x^2\right|=7$ 11.- $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+|2x|=3$

INECUACION CON VALOR ABSOLUTO

Ahora se trata de aplicar modelos como los siguientes:

$$|x| < a,\quad |x| \le a,\quad |x| > a,\quad |x| \ge a$$

Note Ud., que si $a < 0$ entonces las soluciones para los 4 modelos anteriores son, respectivamente, $\phi, \phi,$ R y R.

Por otra parte, si $a > 0$ entonces las soluciones serán, respectivamente ϕ , $\{0\}$, $R - \{0\}$, R.

Luego, sólo nos queda por analizar los 4 modelos en el caso $a > 0$.

Veamos primeramente el modelo $|x| < a$

Sabemos que $|x| = \begin{cases} x & si \ \ x \ge 0 \\ -x & si \ \ x < 0 \end{cases}$

Así,

- Si $x \ge 0$ entonces $|x| < a \Leftrightarrow x < a$. Además $x > -a$ pues $x \in R^+ \cup \{0\} \ \wedge \ -a \in R^-$

  Luego, si $x \ge 0$ entonces $|x| < a \Leftrightarrow x < a \ \wedge \ x > -a$
- Si $x < 0$ entonces $|x| < a \Leftrightarrow -x < a \Leftrightarrow x > -a$.

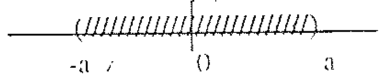
  Además $x < a$ pero $x \in R^- \ \wedge \ a \in R^+$

En consecuencia tenemos: $|x| < a \Leftrightarrow x < a \ \wedge \ x > -a \Leftrightarrow -a < x < a$

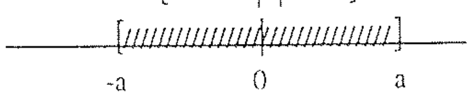
Análogamente: $|x| \le a \Leftrightarrow x \le a \ \wedge \ x \ge -a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

De este modo tenemos:
$$\begin{aligned}\{x \in R \,/\, |x| < a\} &= \{x \in R \,/\, x < a \ \wedge \ x > -a\} \\ &= \{x \in R \,/\, x < a\} \cap \{x \in R \,/\, x > -a\} \\ &= (-\infty, a) \cap (-a, +\infty) \\ &= (-a, a)\end{aligned}$$

$\{x \in R \,/\, |x| < a\}$

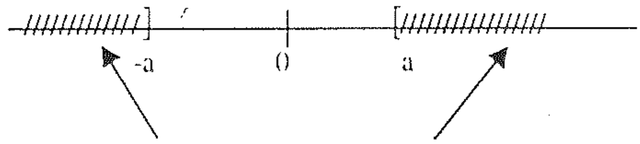


$\{x \in R \,/\, |x| \le a\}$



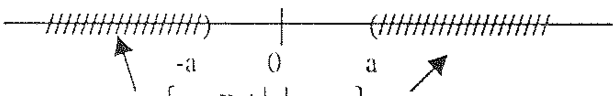
y $\{x \in R/|x| \le a\} = [-a, a]$

Usando negaciones para $<$ y $\leq$ tendremos: $|x| \geq a \iff x \geq a \vee x \leq -a$



$\{x \in R \,/\, |x| \geq a\}$

y también $|x| > a \iff x > a \vee x < -a$



$\{x \in R \,/\, |x| > a\}$

Una vez conocidos y aprendidos estos 4 modelos básicos, podemos resolver inecuaciones con valor absoluto, como en el siguiente ejemplo.

<u>EJEMPLO 84:</u> Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

(a) $|2x-3| < 5$ b) $|2x^2 - 3x + 6| \geq 1$ c) $\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right| \geq 1$

<u>SOLUCION:</u>

(a) En este caso aplicamos directamente el modo $|x| < a$.

$$|2x-3| < 5 \iff -5 < 2x-3 < 5 \iff \underbrace{-5 < 2x-3}_{(1)} \wedge \underbrace{2x-3 < 5}_{(2)}$$

Resolvemos (1) : $-5 < 2x-3 \iff -2 < 2x \iff -1 < x$

Resolvemos (2) : $2x-3 < 5 \iff 2x < 8 \iff x < 4$

Luego el conjunto solución es $S = (-1, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (-1, 4)$

(b) $|2x^2 - 3x + 6| \geq 1$, corresponde al modelo $|x| \geq a$.

$$|2x^2 - 3x + 6| \geq 1 \iff \underbrace{2x^2 - 3x + 6 \geq 1}_{(1)} \vee \underbrace{2x^2 - 3x + 6 \leq -1}_{(2)}$$

Resolviendo (1) : $\iff 2x^2 - 3x + 6 \geq 1 \iff 2x^2 - 3x + 5 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0 \quad \therefore S_1 = R$

Aquí no es necesario resolver (2), puesto que el conjunto solución:

$$S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R} \cup S_2 = \mathbb{R}$$

(c) $\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right| \geq 1$, corresponde al modelo $|x| \geq a$.

(d) $\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-3} \geq 1 \quad \vee \quad \dfrac{x+2}{x-3} \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x+2}{x-3} - 1 \geq 0 \quad \vee \quad \dfrac{x+2}{x-3} + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{5}{x-3} \geq 0}_{(1)} \quad \vee \quad \underbrace{\frac{2x-1}{x-3} \leq 0}_{(2)}$$

Resolviendo (1) : $\dfrac{5}{x-3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-3 > 0 \quad$ pues $\quad 5 > 0$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\therefore \; S_1 = \{x \in \mathbb{R} / \; x > 3 \;\} = (3, +\infty)$$

Resolviendo (2): los puntos críticos para $2x-1$ y $x-3$ son $\dfrac{1}{2}$ y 3, respectivamente. La tabla de signos queda:

	$-\infty$ a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a 3	3 a $+\infty$
$2x-1$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$\frac{2x-1}{x-3}$	+	-	+

$$\therefore \; S_2 = \left[\frac{1}{2}, \; 3\right)$$

Así, la solución final es $S = S_1 \cup S_2 = \left[\dfrac{1}{2}, \; 3\right) \cup (3, +\infty)$

Note Ud., que $x = 3$ no es parte de la solución, puesto que el denominador $x-3$ debe ser diferente de 0.

EJEMPLO 85: Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

(a) $|x+| + |1-x| \leq 5$ (b) $\big|\, |2x-3| - 1 \big| > 2$

(c) $2\,|2x+5| - |x| \leq \big|2 - |x|\,\big|$ (d) $\big|\, x^2 - 3x + 2 \big| + x < |x-3|$

SOLUCION:

(a) Esta inecuación no corresponde exactamente a los modelos básicos $|x| < a$, $|x| \leq a$, $|x| > a$ ó $|x| \geq a$, puesto que el miembro izquierdo es una suma de 2 valores absolutos.
Aquí podemos proceder como en los ejemplos 82 y 83, separando el análisis en sectores de la recta real.
Los puntos críticos para $x+3$ y $1-x$ son, respectivamente -3 y 1.

	$-\infty$ -3	-3 1	1 $+\infty$
$x+3$	-	+	+
$1-x$	+	+	-

Primer Sector: $(-\infty, -3)$

La inecuación $|x+3|+|1-x| \leq 5$ queda $-(x+3)+(1-x) \leq 5$, es decir,

$$-x-3+1-x \leq 5 \iff -2x-2 \leq 5 \iff -2x \leq 7 \iff 2x \geq -7 \iff x \geq -\frac{7}{2}$$

$$\therefore\ S_1 = (-\infty, -3) \cap \left[\frac{-7}{2}, +\infty\right) = \left[\frac{-7}{2}, -3\right)$$

Segundo Sector: $(-3, 1)$

La inecuación queda $(x+3)+(1-x) \leq 5 \iff 4 \leq 5$

$$\therefore\ S_2 = (-3, 1) \cap \mathbb{R} = (-3, 1)$$

Tercer Sector: $(1, +\infty)$

La inecuación queda $(x+3)+(-1+x) \leq 5 \iff 2x+2 \leq 5 \iff x \leq \dfrac{3}{2}$

$$\therefore\ S_3 = (1, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] = \left(1, \frac{3}{2}\right]$$

Finalmente analizamos la validez de la inecuación en los puntos críticos :
si $x=-3$, la inecuación queda $0+|1+3| \leq 5$ (Verdadero)
Si $x=1$, la inecuación queda $|1+3|+0 \leq 5$ (Verdadero)
Así, la solución final es:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \{-3\} \cup \{1\} = \left[\frac{-7}{2}, -3\right) \cup (-3, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right] \cup \{-3\} \cup \{1\} = \left[\frac{-7}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

(b) La inecuación $\big|\,|2x-3|-1\big| > 2$ corresponde al modelo $|x| > a$.

Luego, $\big|\,|2x-3|-1\big| > 2 \iff \underbrace{|2x-3|-1 > 2}_{(1)} \lor \underbrace{|2x-3|-1 < -2}_{(2)}$

Resolviendo (1): $|2x-3|-1>2 \Leftrightarrow |2x-3|>3$ (modelo $|x|>a$)

$\Leftrightarrow \underbrace{2x-3>3}_{(3)} \ \vee \ \underbrace{2x-3<-3}_{(4)}$

Resolviendo (3): $2x-3>3 \Leftrightarrow 2x>6 \Leftrightarrow x>3$

Resolviendo (4): $2x-3<-3 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0$

$\therefore\ S_1=(3,+\infty)\cup(-\infty,0)$

Resolviendo (2): $|2x-3|-1<-2 \Leftrightarrow |2x-3|<-1$, cuya solución es ϕ

Así, la solución final es $S=S_1\cup S_2=(-\infty,\ 0)\cup(3,+\infty)$

(c) La inecuación $2\cdot|2x+5|-|x|\le|2-|x||$, no corresponde exactamente a ninguno de los 4 modelos básicos.

Los puntos críticos para $2x+5$ y x son respectivamente $\frac{-5}{2}$ y 0

$-\infty \quad \frac{-5}{2} \quad 0 \quad +\infty$

$2x+5$	-	+	+
x	-	-	+

Primer Sector: $\left(-\infty,\ \frac{-5}{2}\right)$

La inecuación queda $2\cdot(-2x-5)-(-x)\le|2-(-x)|$, es decir,

$-4x-10+x\le|2+x| \Leftrightarrow -3x-10\le|2+x|$

Tenemos de nuevo un valor absoluto en esta última inecuación, para lo cual volvemos a separar de acuerdo al punto crítico $x=-2$

$-\infty \quad -2 \quad +\infty$

$2+x$	-	+

Primer Subsector: $(-\infty,-2)$

La inecuación última queda $-3x-10\le-2-x \Leftrightarrow -8\le 2x \Leftrightarrow -4\le x$.

La solución en este subsector es $(-\infty,-2)\cap[-4,+\infty)=[-4,-2)$

Segundo Subsector: $(-2+\infty)$

La inecuación queda $-3x-10\le 2+x \Leftrightarrow -12\le 4x \Leftrightarrow -3\le x$

La solución en este subsector es $(-2,+\infty)\cap[-3,+\infty)=(-2,+\infty)$

El punto crítico $x=-2$ satisface la inecuación $-3x-10\le|2+x|$, por lo tanto su solución es $[-4,-2)\cup(-2,+\infty)\cup\{-2\}=[-4,+\infty)$

Así, la solución para el primer sector es: $S_1 = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cap \left[-4, +\infty\right) = \left[-4, \frac{-5}{2}\right)$

Segundo Sector : $\left(\frac{-5}{2},\ 0\right)$

La inecuación original queda $2\cdot(2x+5)-(-x) \le |2-(-x)|$, es decir:

$4x+10+x \le |2+x| \iff 5x+10 \le |2+x|$

Esta última inecuación se vuelve a separar según el signo de $2+x$, por lo caul usamos la misma tabla anterior.

Primer Subsector: $(-\infty, -2)$

La inecuación última queda $5x+10 \le -2-x \iff 6x \le -12 \iff x \le -2$

La solución en este subsector es $(-\infty, -2) \cap (-\infty, -2] = (-\infty, -2)$

Segundo Subsector: $(-2, +\infty)$

La inecuación queda $5x+10 \le 2+x \iff 4x \le -8 \iff x \le -2$

La solución en este subsector es $(-2, +\infty) \cap (-\infty, -2] = \phi$

Además el punto crítico $x=-2$ satisface la inecuación $5x+10 \le |2+x|$, por lo tanto la solución final de este segundo sector es: $S_2 = \left(-\frac{5}{2},\ 0\right) \cap (-\infty, -2] = \left(-\frac{5}{2}, -2\right]$

Tercer Sector: $(0, +\infty)$

La inecuación original queda $2\cdot(2x+5)-x \le |2-x|$, es decir,

$4x+10-x \le |2-x| \iff 3x+10 \le |2-x|$

Esta última inecuación se separa según el signo de $2-x$, cuyo punto crítico es $x=2$.

	$-\infty$ 2	$-\infty$
$2-x$	+	-

Primer Subsector: $(-\infty, 2)$

La inecuación última queda $3x+10 \le 2-x \iff 4x \le -8 \iff x \le -2.$

La solución en este subsector es $(-\infty, 2) \cap (-\infty, -2] = (-\infty, -2]$

Segundo Subsector: $(2,+\infty)$

La inecuación queda $3x+10 \le -2+x \iff 2x \le -12 \iff x \le -6.$

La solución en este subsector es $(2,+\infty) \cap (-\infty, -6] = \phi$

El punto crítico $x=2$ no satisface la inecuación $3x+10 \le |2-x|$

La solución final de este tercer sector es: $S_3 = (0, +\infty) \cap (-\infty, -2] = \phi$

Por último analizamos la inecuación original en los puntos críticos $-\frac{5}{2}$ y 0

Si $x=-\frac{5}{2}$, la inecuación resulta $2\cdot 0-\left|-\frac{5}{2}\right|\leq\left|2-\left|-\frac{5}{2}\right|\right| \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\leq\frac{13}{2}$ (Verdadero)

Si $x=0$, la inecuación resulta $2\cdot|0+5|-0\leq|2-0| \Leftrightarrow 10\leq 2$ (Falso)

Así, la solución final es:

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}=\left[-4,\frac{-5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{2},-2\right]\cup\phi\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}=[-4,-2]$$

<u>**Otra forma de solución**</u> para la misma inecuación $2\cdot|2x+5|-|x|\leq|2-|x||$

La expresión $|2-|x||$ tiene un valor absoluto contenido en otro. Para evitar esta dificultad podríamos separar el análisis de acuerdo con el punto crítico $x=0$ para el valor absoluto interior.

Así, separaremos el estudio en 2 sectores: $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$

	$-\infty$ 0	$+\infty$
x	-	+

<u>Primer Sector:</u> $(-\infty,0)$

La inecuación original queda $2\cdot|2x+5|-(-x)\leq|2-(-x)|$, o sea,

$$2\cdot|2x+5|+x\leq|2+x|$$

Para resolver esta última, volveremos a separar de acuerdo a sus puntos críticos $x=-\frac{5}{2}$ y $x=-2$.

El resto del trabajo se deja para el alumno.

(d) La inecuación $|x^2-3x+2|+x<|x-3|$, tampoco corresponde a uno de los 4 modelos básicos de inecuaciones con valor absoluto. Luego seguiremos el método de separar la recta en sectores.

Los puntos críticos para x^2-3x+2 se obtienen de $x^2-3x+2=0$, es decir $x=1$ y $x=2$. Luego $x^2-3x+2>0$ ssi $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

El punto crítico para $x-3$ es $x=3$. La tabla de signos queda como sigue:

	$-\infty$ 1	2	3	$-\infty$
x^2-3x+2	+	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+

Primer Sector: $(-\infty, 1)$

La inecuación resulta $x^2 - 3x + 2 + x < -x + 3$, es decir $x^2 - x - 1 < 0$. Como $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 5$, la expresión cuadrática $x^2 - x - 1$ tiene raíces $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Luego la solución de $x^2 - x - 1 < 0$ es el intervalo $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Así, la solución final en este primer sector es:

$$S_1 = (-\infty, 1) \cap \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$$

Se deja al alumno completar el desarrollo de este ejemplo.

OBSERVACION:

En el ejemplo último, se usa la expresión $|x^2 - 3x + 2|$. Los signos de $x^2 - 3x + 2$ se obtuvieron usando los puntos críticos $x = 1$ y $x = 2$. ¿Qué hubiese pasado si en vez de $|x^2 - 3x + 2|$ hubiésemos tenido $|x^2 - 3x + 3|$?

Ahora la cuadrática $x^2 - 3x + 3$ tiene $\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$ (negativo) por lo cual no hay puntos críticos (reales) para $x^2 - 3x + 3$.

Sucede en este caso, que la solución de la inecuación $x^2 - 3x + 3 > 0$ es $S = \mathbb{R}$, lo que quiere decir que $x^2 - 3x + 3$ es positiva siempre.

En tal caso, reemplazaríamos $|x^2 - 3x + 3|$ por $x^2 - 3x + 3$ y el problema se habría simplificado.

¿Qué habría pasado si en vez de $|x^2 - 3x + 2|$ hubiésemos tenido $|-2x^2 + 2x - 4|$?

Ahora $\Delta = 4 - 4(-2)(-4) = 4 - 32 = -28$ (negativo) y $a = -2$ es negativo.

Entonces la inecuación $-2x^2 + 2x - 4 > 0$ tendría solución $S = \phi$, o sea que $-2x^2 + 2x - 4 < 0$ tendría solución $S = \mathbb{R}$.

Luego, $|-2x^2 + 2x - 4| = -(-2x^2 + 2x - 4) = 2x^2 - 2x + 4$

EJERCICIO 37 : Encontrar el conjunto solución de:

1.- $|5x-3| > 2$ 2.- $|1-4x| \leq 5$ 3.- $\big|1-|1-x|\big| > 1$

4.- $|2x-3|+|3-x| > |1-x|$ 5.- $\left|\dfrac{2x+5}{x-3}\right| > 3$ 6.- $|2x^2-3x+1|-|x-6| > x$

7.- $|3-x^2|+|x^2-4| < 6$ 8.- $\big||x+7|-|1-x|\big| > 2$ 9.- $|1-3x|-x \leq 3-|x+4|$

10.- $|3x^2-x+7|-x \leq |1-x|$ 11.- $|2x-x^2-2|+3x^2 < |6-x|$

INECUACIONES CON RADICALES:

En los siguientes ejemplos mostraremos las consideraciones y los cuidados que deben tenerse al resolver una inecuación que tenga expresiones con radicales.

EJEMPLO 86: Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $\sqrt{2x+1} < 5$ (b) $\sqrt{x^2-5x+6} < x-3$ (c) $x+1 < \sqrt{1-x^2}$

SOLUCIÓN:

(a) En esta inecuación, aparece la expresión $\sqrt{2x+1}$. Como sabemos, no existe en R la raíz cuadrada de un número negativo.

Luego una condición básica para este problema es $2x+1 \geq 0$, es decir $x \geq -\dfrac{1}{2}$. Esta condición o restricción debe ser considerada como un universo sobre el cual buscamos las soluciones de la inecuación. Así, la solución obtenida deberá intersectarse con $U = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Ahora bien, la expresión $\sqrt{2x+1}$ representa un número positivo o cero de modo que podemos elevar al cuadrado la inecuación original y tendremos $2x+1 < 25 \Leftrightarrow 2x < 24 \Leftrightarrow x < 12$

Así, la solución final es $S = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 12) = \left[-\dfrac{1}{2}, 12\right)$

(b) La inecuación $\sqrt{x^2-5x+6} < x-3$ tiene como condición básica: $x^2-5x+6 \geq 0$, es decir, $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Ahora bien, el miembro izquierdo de la inecuación original es $\sqrt{x^2-5x+6}$, vale decir, una cantidad positiva o cero.

Entonces el miembro derecho $(x-3)$ deberá ser positivo, pues sólo así será mayor que el miembro izquierdo. De este modo surge otra condición para este problema, o sea, $x-3 > 0$ cuya solución es $x > 3$.

Tenemos entonces las condiciones $x \in (-\infty, 2\,] \cup [3, +\infty)$ y también $x \in (3, +\infty)$. Como ambas deben satisface, nuestro universo actual será :

$$U = ((-\infty, 2] \cup [3, +\infty)) \cap (3, +\infty) = (3, +\infty)$$

Luego de estas consideraciones, podemos elevar el cuadrado y tendremos

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} < x - 3 \iff x^2 - 5x + 6 < (x-3)^2 \iff x^2 - 5x + 6 < x^2 - 6x + 9$$
$$\iff 6x - 5x < 9 - 6 \iff x < 3$$

La solución final es entonces: $S = U \cap (-\infty, 3) = (3, +\infty) \cap (-\infty, 3) = \phi$

(c) La inecuación es $x + 1 < \sqrt{1 - x^2}$

Una condición básica es $1 - x^2 \geq 0$, es decir $(1-x)(1+x) \geq 0$ cuya solución es $[-1, 1]$.

Este será nuestro <u>universo</u>.

Ahora bien, el miembro izquierdo $(x+1)$ puede ser negativo o no negativo (≥ 0)

Si $x + 1 < 0$, o sea, si $x < -1$, tendremos $\underset{\overset{\downarrow}{<0}}{x+1} < \underset{\overset{\downarrow}{\geq 0}}{\sqrt{1-x^2}}$

o sea una desigualdad verdadera, siempre que $x < -1$.

$\therefore$ la solución en el caso $x + 1 < 0$ es $S_1 = (-\infty, -1)$

Si $x + 1 \geq 0$, o sea, si $x \geq -1$ tendremos $\underset{\overset{\downarrow}{\geq 0}}{x+1} < \underset{\overset{\downarrow}{\geq 0}}{\sqrt{1-x}}$

y podremos elevar al cuadrado, resultando:

$$(x+1)^2 < 1 - x^2 \iff x^2 + 2x + 1 < 1 - x^2 \iff 2x^2 + 2x < 0 \iff$$
$$\iff 2x(x+1) < 0 \iff x(x+1) < 0$$

cuya solución es el intervalo $(-1, 0)$

Luego, en el caso $x + 1 \geq 0$, la solución es $S_2 = [-1, +\infty) \cap (-1, 0) = (-1, 0)$

La solución final será $S = U \cap (S_1 \cup S_2) = [-1, 1] \cap ((-\infty, -1) \cup (-1, 0)) = (-1, 0)$

<u>EJERCICIO 38:</u> Resolver las siguientes inecuaciones:

1.- $\sqrt{2 - 3x} < 1$	2.- $\sqrt{1 + x} < -3$	3.- $\sqrt{3x - 5} < x + 2$
4.- $x - 1 < \sqrt{3x + 2}$	5.- $\sqrt{2x^2 + 5x - 6} < x + 1$	6.- $4x^2 - 5 < \sqrt{1 - x^2}$
7.- $\lvert 2x + 1 \rvert < \sqrt{2 - x}$	8.- $\sqrt{1 - 3x} < x + \lvert x - 2 \rvert$	

CAPITULO 4

RELACIONES Y FUNCIONES.

En este capítulo trataremos los conceptos, operaciones y propiedades fundamentales sobre Relaciones Binarias y Funciones. Para ello, consideremos dos conjuntos A y B, el primero en un universo U_1, es decir, $A \subseteq U_1$ y el segundo en un universo U_2, es decir, $B \subseteq U_2$. Esto incluye el caso $U_1 = U_2$, es decir, que A y B sean conjuntos en un mismo universo U.

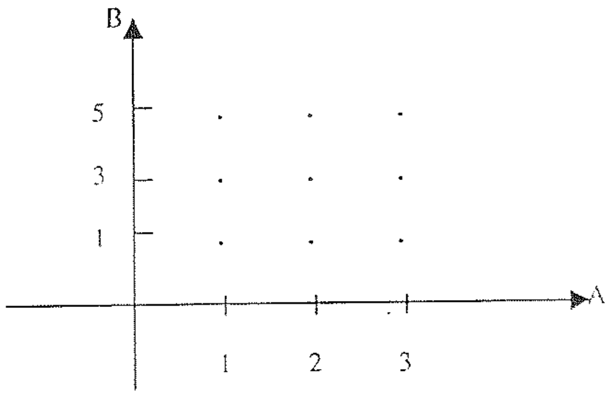
Recordemos que el producto cartesiano entre A y B es el conjunto

$$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \;\wedge\; y \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$ entonces:

$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\}$

La representación gráfica de $A \; x \; B$ se muestra en el siguiente diagrama:



El conjunto $A \times B$ contiene 9 pares ordenados y su representación gráfica contiene 9 puntos, cada uno representando un par ordenado.

Consideremos ahora un subconjunto de $A \times B$, es decir, elijamos (arbitrariamente o mediante algún criterio) algunos pares ordenados de $A \times B$, o sea algunos puntos en el diagrama anterior.

Por ejemplo, al elegir los pares $(1,1)$, $(1,3)$ y $(1,5)$, tendremos:

$$\{(1,1),\ (1,3),\ (1,5)\} \subseteq A \times B$$

¿Cómo se relacionan estos 3 pares elegidos? ¿Qué tienen ellos en común y qué no tienen los demás pares en $A \times B$?

Podemos observar que los 3 pares elegidos son los únicos que tienen primera componente igual a 1, es decir $\{(1,1),\ (1,3),\ (1,5)\} = \{\ (x,y) \in A \times B \,/\, x = 1\ \}$

Formalmente, una RELACION de A en B es simplemente un subconjunto de $A \times B$. Acostumbramos a denotar una relación por R.

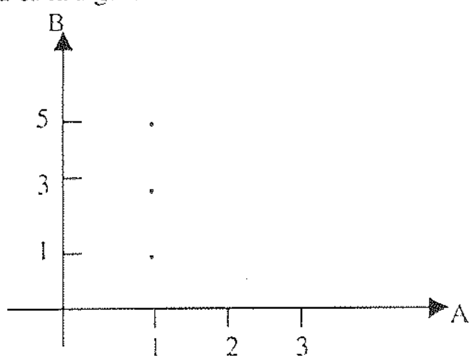
Así, $\boxed{\text{R es una relación de A en B ssi } R \subseteq A \times B}$

Note Ud., que toda relación R está formada sólo por pares ordenados, lo mismo que sucede con $A \times B$, razón por lo cual se dice que la relación es binaria.

A continuacuón presentaremos varios ejemplos de relaciones usando los mismos conjuntos A y B anteriores.

- Denotaremos por $R_1 = \{(1,1),\ (1,3),\ (1,5)\}$ nuestra primera relación de A en B.

  Expresamos R_1 por comprensión de la siguiente manera: $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x = 1\}$ y su representación gráfica es la siguiente:

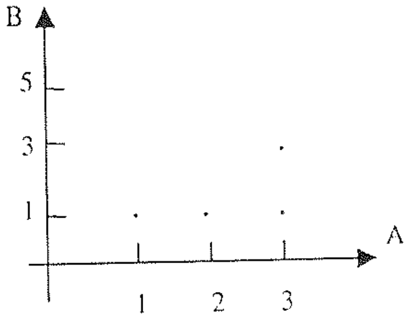


- Sea ahora $R_2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(3,3)\}$. Como $R_2 \subseteq A \times B$ se dice que R_2 es relación de A en B. Expresar R_2 por comprensión es buscar las características que tienen o las condiciones que satisfacen estos 4 pares ordenados y que no satisfacen los demás pares en $A \times B$.

  Podemos ver que esos 4 pares son exactamente aquellos en que la primera componente es mayor o igual que la segunda, es decir:

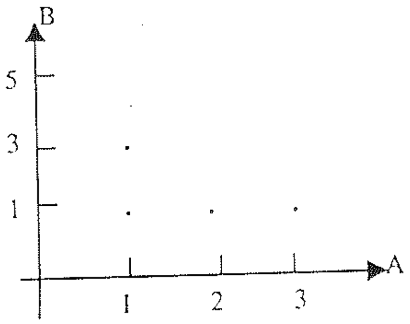
$$R_2 = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x \geq y\}$$

  La representación gráfica de R_2 es



- Sea $R_3 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,1)\}$

  Expresando por comprensión tenemos $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \; / \; x + y \leq 4\}$



- Sea $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \; / \; x + y = 0\}$

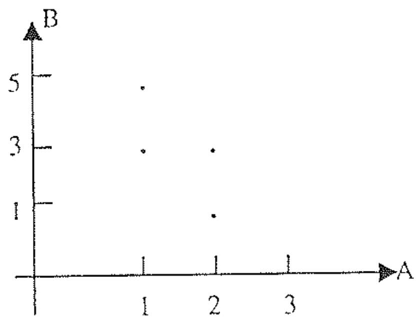
  Como puede verse, no existen pares en $A \times B$ cuyos dos componentes sumen 0, es decir, $R_4 = \phi$ y como $\phi \subseteq A \times B$ tenemos que ϕ <u>es una relación de A en B.</u>

- Sea $R_5 = \{(x, y) \in A \times B \; / \; |x - y| \leq 4\}$

  En este caso puede verse que todos los pares en $A \times B$ cumplen la condición $|x - y| \leq 4$. Luego $R_5 = A \times B$ y como $A \times B \subseteq A \times B$ tenemos que $A \times B$ <u>es una relación de A en B.</u>

- Sea $R_6 = \{(x, y) \in A \times B \; / \; 3 < x^2 + y \leq 7\}$

  Expresando por extensión tendremos $R_6 = \{(1,3), (1,5), (2,1), (2,3)\}$

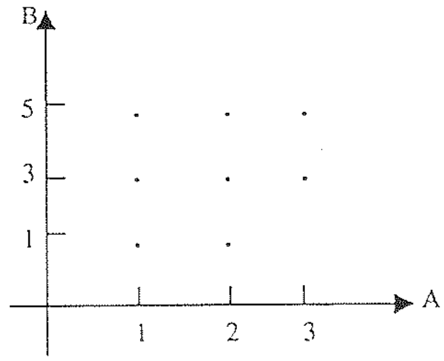


- Sea $R_7 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, |2x - y| < 4\}$

  Por extensión se tiene $R_7 = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$

  Como vemos sólo el par $(3,1)$ de $A \times B$ no pertenece a R_7, es decir,

  $R_7 = A \times B - \{(3,1)\}$



EJEMPLO 87:

Consideremos los conjuntos $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{N}$.

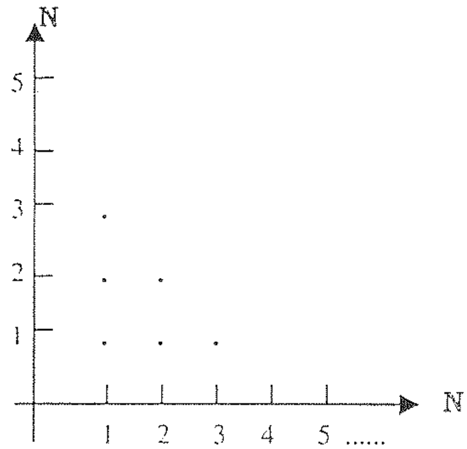
Luego $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, x^2 + y^2 \leq 10\}$ se forma por todos los pares ordenados de números naturales, cuya suma de cuadrados de sus componentes sea menor o igual que 10.

Note que esta relación R se define como conjunto de pares (x, y) pertenecientes a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que...

Por ello se tiene $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es decir, R es relación en $\mathbb{N}$

Expresando por extensión tenemos:

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$



Obsérvese que R es un conjunto finito, mientras que **N** × **N** es infinito. Además son <u>verdaderas</u> las proposiciones : $(1,1)\in R$, $(1,3)\in R$, $(3,1)\in R$ y son <u>Falsas</u> las proposiciones: $(3,2)\in R$, $(1,5)\in R$ y $(-1,2)\in R$.

<u>EJEMPLO 88:</u>

Sea $R=\{(x,y)\in \mathbf{Z}\times \mathbf{N} \;/ |x-y|+|y-x|=4\}$
Obsérvese que ahora R es subconjunto de **Z** × **N**, luego R es una <u>relación en **Z** en **N** .</u>
La condición que deben satisfacer los pares (x,y) es $|x-y|+|y-x|=4$.
En este particular caso, tenemos:

$$|x-y|+|y-x|=|x-y|+|-(y-x)|=|x-y|+|x-y|=2\cdot|x-y|$$

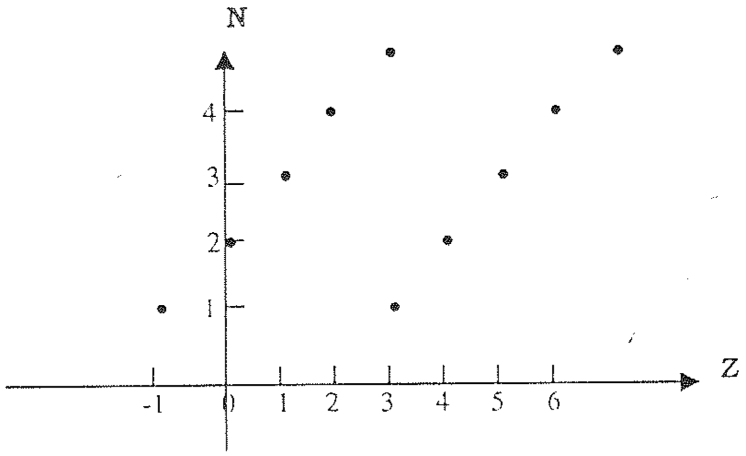
$$\therefore\; R=\{(x,y)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{N} \;/\; 2|x-y|=4\}=\{(x,y)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}/\;|x-y|=2\}$$

$$=\{(x,y)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{N} \;/\; x-y=2 \;\vee\; x-y=-2\}$$

$$=\{(x,y)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{N} \;/\; y=x-2 \;\vee\; y=x+2\}$$

Para expresar R por extensión obsérvese que $x\in \mathbf{Z}$ e $y\in \mathbf{N}$, luego podemos buscar pares del tipo $(x,1)$, $(x,2)$,...

Así , $R=\{(3,1),(-1,1),(4,2),(0,2),(5,3),(1,3),(6,4),(2,4)...\}$



<u>EJEMPLO 89:</u>

Sea $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\; x+y=1\}$
Ahora $R\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, por lo tanto R , por lo tanto es una <u>relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$</u> , o simplemente R es una <u>relación en $\mathbb{R}$.</u>

Expresar esta relación por extensión es imposible, debido a que ella tiene una cantidad infinita de pares (x, y) y además porque todo número real x podrá aparejarse con otro número real $y = 1 - x$

Así, $(1,0) \in R$, $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in R$, $\left(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right) \in R$, etc.

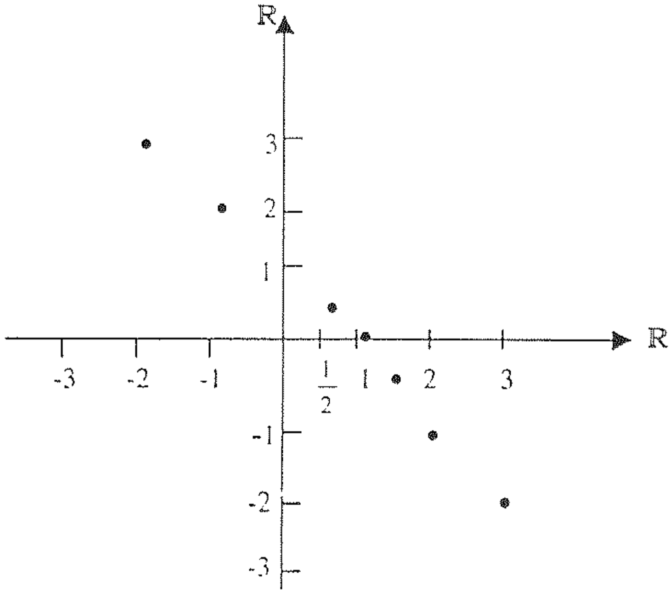
Sin embargo, es válido escribir:

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1 - x\} = \{(x, 1-x) / x \in \mathbb{R}\}$

Para representar gráficamente la relación R, podríamos obtener un conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la relación $x + y = 1$. Esto lo hacemos en una "tabla de valores" como la siguiente:

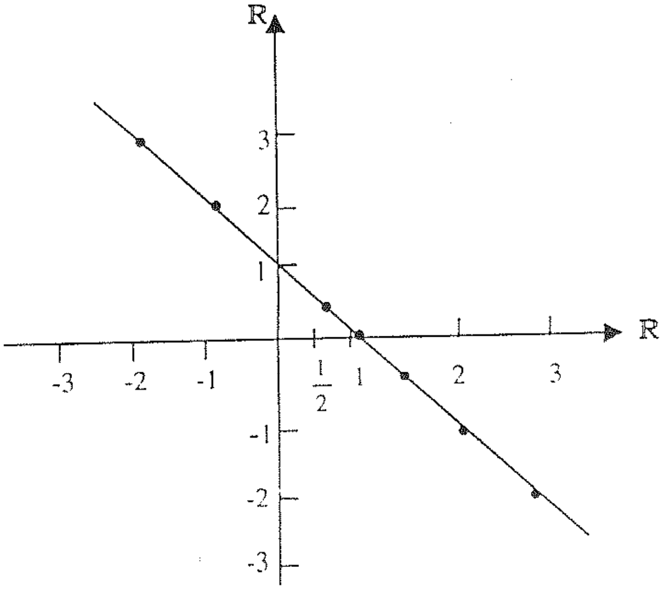
x	y
1	0
2	-1
3	-2
-1	2
-2	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
.	.
.	.
.	.

Esta tabla claramente representará sólo una muestra de algunos pares que satisfacen la ecuación $x + y = 1$. Por lo tanto, si dibujamos los puntos correspondientes en un plano cartesiano, sólo tendremos un pequeño bosquejo de lo que será la representación gráfica completa de la relación R. En este caso particular, el bosquejo es el siguiente:



Pero, la tabla de valores puede tener infinitos pares ordenados, uno para cada $x \in \mathbb{R}$. Correspondientemente, el gráfico asociado será una <u>línea contínua</u> que pasará por los 7 puntos ya dibujados. Si quisiéramos mayor información para dibujar esa línea contínua, deberíamos obtener más pares ordenados en la tabla.

En este particular ejemplo, los 7 puntos dibujados dan una buena idea de cómo debiera trazarse la línea contínua que los une. El resultado se muestra a continuación.



Al parecer, la línea contínua resultante es una <u>línea recta</u> y efectivamente es así. La relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + y = 1 \ \}$ queda representada por esa línea recta, lo que quiere decir que <u>todo</u> par (x, y) tal que $x + y = 1$, corresponderá exactamente a un <u>punto sobre la línea recta</u> y vice-versa.

En lo que sigue, iremos entregando más información útil con respecto a las relaciones y sus representaciones gráficas, principalmente para aquellas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

<u>DOMINIO DE UNA RELACION:</u>

Sea R una relación de A en B, es decir, $R \subseteq A \times B$

El <u>Dominio de R</u>, en símbolos Dom (R) , es el conjunto formado por todas las primeras componentes de los pares ordenados en la relación R. Claramente si un valor x es primera componente de un par, entonces deberá existir una segunda componente y de modo que $(x, y) \in R$.

En consecuencia se tiene: $\boxed{Dom(R) = \{x \in A / (\exists \ y \in B) \ ((x, y) \in R \ ) \ \}}$

De la definición anterior se tienen las siguientes consecuencias:

- $Dom(\mathrm{R}) \subseteq A$ (las primeras componentes deben pertenecer a A)
- $x \in Dom(\mathrm{R}) \Leftrightarrow (\exists y \in B)((x,y) \in \mathrm{R})$
- $x \notin Dom(\mathrm{R}) \Leftrightarrow (\forall y \in B)((x,y) \notin \mathrm{R})$

<u>EJEMPLO 90:</u>

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,35\}$ entonces en $A \times B$ se definieron las 7 relaciones siguientes:

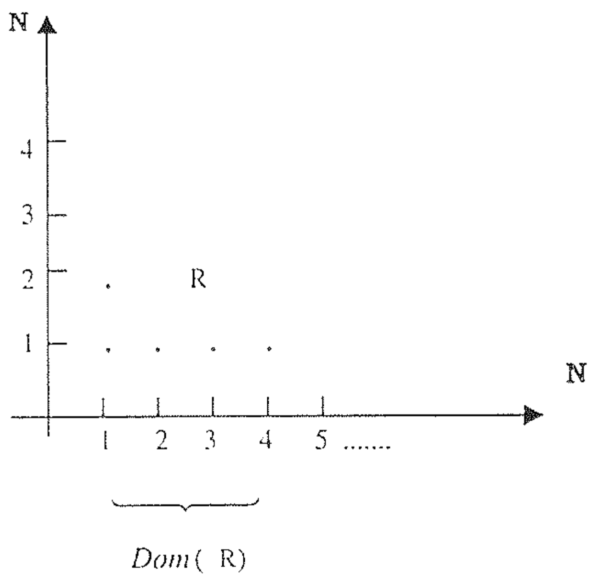
$\mathrm{R}_1 = \{(1,1),(1,3),(1,5)\} \Rightarrow Dom(\mathrm{R}_1) = \{1\}$
$\mathrm{R}_2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(3,3)\} \Rightarrow Dom(\mathrm{R}_2) = \{1,2,3\} = A$
$\mathrm{R}_3 = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1)\} \Rightarrow Dom(\mathrm{R}_3) = \{1,2,3\} = A$
$\mathrm{R}_4 = \phi \Rightarrow Dom(\mathrm{R}_4) = \phi$
$\mathrm{R}_5 = A \times B \Rightarrow Dom(\mathrm{R}_5) = A$
$\mathrm{R}_6 = \{(1,3),(1,5),(2,1),(2,3)\} \Rightarrow Dom(\mathrm{R}_6) = \{1,2\}$
$\mathrm{R}_7 = A \times B - \{(3,1)\} \Rightarrow Dom(\mathrm{R}_7) = \{1,2,3\} = A$

<u>EJEMPLO 91:</u>

$\mathrm{R} = \{(x,y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} / x + y^2 \leq 5\}$ es una relación de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{N}$

Expresando R por extensión resulta: $\mathrm{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

Luego, $Dom(\mathrm{R}) = \{1,2,3,4\}$



EJEMPLO 92:

Encontrar el dominio de R $=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ /\ y=\sqrt{x^2-6x+5}\ \}$

SOLUCION:

Según la definición de dominio, $Dom\,(\text{R})=\{x\in \mathbb{R}/\ (\exists\, y\in \mathbb{R})\ ((x,y)\in \text{R})\ \}$

$$=\{x\in \mathbb{R}/\ (\exists\, y\in \mathbb{R})\,(y=\sqrt{x^2-6x+5})\ \}$$

Obsérvese que debe tenerse que $y\in\mathbb{R}$, es decir, $\sqrt{x^2-6x+5}\in\mathbb{R}$.

Ello sólo es posible si $x^2-6x+5\geq 0$, una inecuación cuya solución es $S=(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$

$\therefore\ Dom\,(\text{R})=\{x\in\mathbb{R}\ /\ y=\sqrt{x^2-6x+5}\in\mathbb{R}\ \}=(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$

EJEMPLO 93:

Encontrar el dominio de las relaciones R , S , T siguientes:

(a) R $=\{(x,y)\in A\times B\ /\ x$ es divisor de $y\ \vee\ y$ es divisor de $x\ \}$, siendo :

$$A=\{1,2,3\}\quad y\quad B=\{1,3,5\}$$

(b) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=\dfrac{x-1}{x^2+x-3}\ \}$ (c) $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=\sqrt{\left|\dfrac{1}{1-x}\right|-1}\ \}$

SOLUCION:

(a) Expresando R por extensión se tiene R $=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(3,1),(3,3)\}$

Así, $Dom\,(\text{R})=\{1,2,3\}=A$

(b) $Dom\ S=\{x\in\mathbb{R}/\ (\exists\, y\in\mathbb{R})\left(y=\dfrac{x-1}{x^2+x-3}\right)\}\ =\ \{x\in\mathbb{R}\ /\ \dfrac{x-1}{x^2+x-3}\in\mathbb{R}\ \}$

Ahora bien, $\dfrac{x-1}{x^2+x-3}\in\mathbb{R}\iff x^2+x-3\neq 0$

Resolvamos entonces la ecuación $x^2+x-3=0$ para luego, por complemento, decidir que valores de x hacen $x^2+x-3\neq 0$.

$$x^2+x-3=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore\ Dom(S)=\left\{x\in \mathbb{R}\ /\ x\neq \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\ \wedge\ x\neq\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

$$=\mathbb{R}-\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

¿Qué hubiese sucedido en caso que $y=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$?

Ahora la ecuación cuadrática $x^2+x+1=0$ <u>no</u> tiene raices reales, pues el discriminante es $\Delta=1-4=-3<0$

En tal caso, $Dom(S)=\mathbb{R}$

(c) $Dom(T)=\left\{\ x\in\mathbb{R}/\ (\exists\ y\in\ \mathbb{R})\left(y=\sqrt{\left|\dfrac{1}{1-x}\right|-1}\right)\right\}=\left\{\ x\in\mathbb{R}/\sqrt{\left|\dfrac{1}{1-x}\right|-1}\in\ \mathbb{R}\ \right\}$

Ahora bien, $\sqrt{\left|\dfrac{1}{1-x}\right|-1}\in\ \mathbb{R}\iff\left|\dfrac{1}{1-x}\right|-1\geq 0\quad\wedge\quad 1-x\neq 0$

Resolviendo la inecuación $\left|\dfrac{1}{1-x}\right|-1\geq 0$ tenemos:

$$\left|\frac{1}{1-x}\right|-1\geq 0\iff\left|\frac{1}{1-x}\right|\geq 1\iff\frac{1}{1-x}\geq 1\ \vee\ \frac{1}{1-x}\leq -1$$

$$\iff\frac{1}{1-x}-1\geq 0\ \vee\ \frac{1}{1-x}+1\leq 0\iff\underbrace{\frac{x}{1-x}\geq 0}_{(1)}\ \vee\ \underbrace{\frac{2-x}{1-x}\leq 0}_{(2)}$$

Para (1) :

	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
x	-	+	+
$1-x$	+	+	-
$\frac{x}{1-x}$	-	+	-

$\boxed{\therefore\ S_1 = [0,1)}$

Para (2) :

	$-\infty$ 1	1 2	2 $+\infty$
$2-x$	+	+	-
$1-x$	+	-	-
$\frac{2-x}{1-x}$	+	-	+

$\boxed{\therefore S_2 = (1,2]}$

$$\therefore\ \sqrt{\left|\frac{1}{1-x}\right| - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in [0,1) \cup (1,2]$$

Así, $Dom\,(T) = \left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{\left|\frac{1}{1-x}\right| - 1} \in \mathbb{R}\right\} = [0,1) \cup (1,2]$

Note que al determinar el Dominio de una relación como T, Ud., sabe qué parte del eje X quedará ocupado por el gráfico de la relación T. En este caso, sólo tendremos gráfico de T en $[0,1) \cup (1,2]$

RECORRIDO DE UNA RELACION:

Sea R una relación de A en B, es decir, $R \subseteq A \times B$

El recorrido de R , en símbolos Rec (R) , es el conjunto formado por todas las segundas componentes de los pares ordenados en la relación R.

Así, Rec (R) $= \{ y \in B / (\exists x \in A)((x, y) \in R) \}$

De la definición anterior se tiene:

- Rec (R) $\subseteq B$ (las segundas componentes deben pertenecer a B)
- $y \in$ Rec (R) $\Leftrightarrow (\exists x \in A)\ ((x, y) \in R)$
- $y \notin$ Rec (R) $\Leftrightarrow (\forall x \in A)\ ((x, y) \notin R)$

EJEMPLO 94:

El recorrido para cada una de las 7 relaciones del ejemplo 90 es:

$\text{Rec}(R_1)=\{1,3,5\}=B$; $\text{Rec}(R_2)=\{1,3\}$; $\text{Rec}(R_3)=\{1,3\}$
$\text{Rec}(R_4)=\phi$; $\text{Rec}(R_5)=B$; $\text{Rec}(R_6)=\{1,3,5\}=B$
$\text{Rec}(R_7)=\{1,3,5\}=B$

EJEMPLO 95:

Encontrar el recorrido de las siguientes relaciones:

(a) $R=\{(x,y)\in \mathbf{N}^2 \ / \ 3\leq |x-y|\leq 5\}$

(a) $S=\left\{ (x,y)\in \mathbb{R}^2 / \dfrac{x+y}{x-y}=2 \right\}$

(b) $T=\left\{ (x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y=x^2+x-2 \right\}$

(c) $M=\left\{ (x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ y=\sqrt{\dfrac{1+x}{x-2}} \right\}$

SOLUCION:

(a) Si $x\in \mathbf{N} \ \wedge \ y\in \mathbf{N}$ entonces $x-y\in \mathbf{Z}$, con lo cual $|x-y|\in \mathbf{N}\cup\{0\}$

$$\therefore \quad R=\{(x,y)\in \mathbf{N}^2 \ / \ 3\leq |x-y|\leq 5\}$$

$$=\{(x,y)\in \mathbf{N}^2 / \ |x-y|=3 \ \vee \ |x-y|=4 \ \vee \ |x-y|=5\}$$

$$=\{(4,1),(1,4),(5,2),(2,5),\ldots\ldots,(5,1),(1,5),(6,2),(2,6),\ldots,(6,1),(1,6),(7,1),(1,7),\ldots\}$$

$$\therefore \ \text{Rec}(R)=\mathbf{N}$$

(b) $\text{Rec}(S)=\{y\in \mathbb{R}/ \ (\exists x\in \mathbb{R})((x,y)\in S)\}=\left\{ y\in \mathbb{R}/(\exists x\in \mathbb{R})\left(\dfrac{x+y}{x-y}=2 \right)\right\}$

Pero, $\dfrac{x+y}{x-y}=2 \Leftrightarrow x+y=2\,(x-y)$ siempre que $x\neq y$

$$\Leftrightarrow x+y=2x-2y \Leftrightarrow 3y=x$$

$\therefore \text{Rec}(S)=\{y\in \mathbb{R}/ \ (\exists x\in \mathbb{R})(x=3y)\}=\{y\in \mathbb{R}/ \ 3y\in \mathbb{R}\}$

Sabemos que si $y\in \mathbb{R}$ entonces $3y\in \mathbb{R}$

$\therefore \text{Rec}(S)=\mathbb{R}$

(c) $\text{Rec}\,(T)=\{y\in \mathbb{R}/\ (\exists x\in \mathbb{R})\ (x,y)\in T)\ \}=\{y\in \mathbb{R}/(\exists x\in \mathbb{R})(y=x^2+x-2)\ \}$

Ahora, $y=x^2+x-2 \iff x^2+x-2-y=0$ (ecuación cuadrática en x)

$$\iff x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(2-y)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2+y)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{4y+9}}{2}$$

$$\therefore \text{Rec}\,(T)=\left\{y\in \mathbb{R}/\ (\exists\, x\in \mathbb{R})\left(\ x=\frac{-1-\sqrt{4y+9}}{2}\ \vee\ x=\frac{-1+\sqrt{4y+9}}{2}\ \right)\right\}$$

$$=\left\{\ (y\in \mathbb{R}/\ \frac{-1-\sqrt{4y+9}}{2}\in \mathbb{R}\ \ \vee\ \ \frac{-1+\sqrt{4y+9}}{2}\in \mathbb{R}\ \right\}$$

$$=\left\{\ y\in \mathbb{R}/\ 4y+9\geq 0\ \right\}=\left\{\ (y\in \mathbb{R}/\ y\geq -\frac{9}{4}\ \right\}$$

$$\therefore\ \text{Rec}\,(T)=\left[-\frac{9}{4},+\infty\right)$$

Esto nos indica que la parte del eje Y que contendrá la gráfica de T es el intervalo $\left[-\frac{9}{4},+\infty\right)$

(d) $\text{Rec}\,(M)=\left\{y\in \mathbb{R}/\ (\exists\, x\in \mathbb{R})\left(\ y=\sqrt{\frac{1+x}{x+2}}\ \right)\right\}$

Pero $y=\sqrt{\frac{1+x}{x-2}}$ nos dice que y es <u>no negativo</u>, por ser igual a una raíz cuadrada y sabemos que toda raíz cuadrada es positiva o cero. Luego, $y\in\ \mathbb{R}^+\ \cup\ \{0\}$

Además, $y=\sqrt{\frac{1+x}{x-2}} \iff y^2=\frac{1+x}{x-2} \iff y^2(x-2)=1+x$ $\quad$ ($si\ x\neq 2$)

$$\iff y^2\,x-2y^2=1+x \iff x(y^2-1)=1+2y^2 \iff x=\frac{1+2y^2}{y^2-1}=$$

$$\therefore\ \text{Rec}(M)=\left\{y\in \mathbb{R}^+\ \cup\ \{0\}\ /\ (\exists\, x\in \mathbb{R})\left(\ x=\frac{1+2y^2}{y^2-1}\ \right)\right\}$$

$$=\left\{\ y\in \mathbb{R}^+\ \cup\ \{0\}/\ \ \frac{1+2y^2}{y^2-1}\in \mathbb{R}\ \right\}=\left\{\ y\in \mathbb{R}^+\ \cup\ \{0\}/\ y^2-1\neq 0\ \right\}$$

Como $-1=0 \iff y=1\ \ \vee\ \ y=-1$ entonces

$$\text{Rec}\ (M) = \{\ y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ /\ y \neq \pm 1\ \} = (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) - \{1\} = [0,1) \cup (1,+\infty)$$

EJEMPLO 96:

Encontrar dominio, recorrido y bosquejo del gráfico de la relación :

$$\mathrm{R} = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ y = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}\ \right\}$$

SOLUCION:

(i) Dominio de R

$$Dom\ (R) = \left\{\ x \in \mathbb{R} /\ (\exists\ y \in \mathbb{R})\left(y = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}\ \right)\right\} = \left\{\ x \in \mathbb{R} / 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \in \mathbb{R}\ \right\}$$

$$= \left\{\ x \in \mathbb{R} /\ \frac{x+1}{x-3} \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 3\ \right\}$$

La solución de la inecuación $\dfrac{x+1}{x-3} \geq 0$ es $S = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$

Luego $\quad Dom\ (R) = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$

(ii) Recorrido de R.

$$\text{Rec}\ (R) = \left\{\ y \in \mathbb{R}\ /\ (\exists\ x \in \mathbb{R})\left(\ y = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}\ \right)\right\}$$

Ahora, $\ y = 1 - \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} \iff \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = 1 - y$

Como $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$ es una cantidad no negativa, tendremos $1 - y \geq 0$, o sea $\ y \leq 1$

Además, $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = 1 - y \iff \dfrac{x+1}{x-3} = (1-y)^2 \iff x + 1 = (x-3)(1-y)^2$

$$\iff x + 1 = x(1-y)^2 - 3(1-y)^2 \iff x\left[1 - (1-y)^2\right] = -1 - 3(1-y)^2$$

$$\iff x = \frac{-1 - 3(1-y)^2}{1-(1-y)^2} = \frac{1 + 3(1-y)^2}{(1-y)^2 - 1} = \frac{3y^2 - 6y + 4}{y^2 - 2y}$$

$$\therefore \ \operatorname{Rec}(R)=\left\{ y\in \mathbf{R}/\ y\leq 1 \ \wedge \ \frac{3y^2-6y+4}{y^2-2y}\in \mathbf{R} \right\}=\left\{ y\in \mathbf{R}\ /\ y\leq 1 \ \wedge \ y^2-2y\neq 0 \right\}$$

$$=\left\{ y\in \mathbf{R}/\ y\leq 1 \ \wedge \ y\neq 0 \ \wedge \ y\neq 2 \right\}=(-\infty,0)\cup(0,1]$$

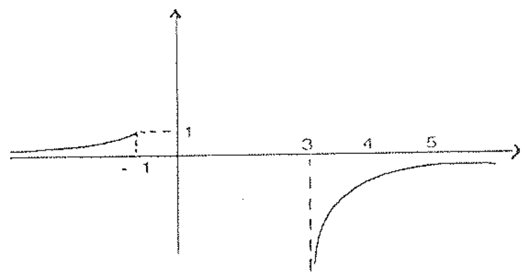
(iii) <u>Bosquejo del gráfico de R.</u>

Dado que $Dom(R)=(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$, el gráfico sólo ocupará esa parte del eje X.

Dado que $\operatorname{Rec}(R)=(-\infty,0)\cup(0,1]$, el gráfico sólo ocupará esta parte del eje Y

Una tabla de valores nos entrega puntos $(x,\ y)$ por donde la gráfica de R deberá pasar:

x	y
-4	0.3453
-3	0.4226
-2	0.5527
-1	1
3.5	-2
4	-1,236
4.5	-0.9148
5	-0.732



RELACION INVERSA:

Sea R una relación de A *en* B, o sea, $R\subseteq A\times B$. La <u>RELACION INVERSA</u> de R es una relación de B *en* A, denotada por R^{-1} (o sea $R^{-1}\subseteq B\times A$) y cuyos pares ordenados son los números que los de R, pero en orden inverso.

Luego $R^{-1}=\left\{ (x,y)\in B\times A\ /\ (y,x)\in R \right\}$

Tenemos las siguientes tres consecuencias inmediatas de esta definición:

- R es relación de A *en* B ssi R^{-1} es relación de B *en* A, es decir,
  $R\subseteq A\times B \iff R^{-1}\subseteq B\times A$)

- $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$

  Así por ejemplo, $(4, v) \in R \Leftrightarrow (v, u) \in R^{-1}$, es decir un par ordenado pertenece a R ssi el par inverso pertenece a R^{-1}

- $(x, y) \notin R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \notin R$

EJEMPLO 97:

Determinar las relaciones inversas para las relaciones del ejemplo 90.

SOLUCION:

$R^{-1} = \{(1,1), (3,1), (5,1)\}$; $R_2^{-1} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3)\}$

$R_3^{-1} = \{(1,1), (3,1), (1,2), (1,3)\}$; $R_4^{-1} = \phi$; $R_5^{-1} = B \times A$

$R_6^{-1} = \{(3,1), (5,1), (1,2), (3,2)\}$; $R_7^{-1} = \{(1,3)\}$

EJEMPLO 98:

Encuentre y grafique la relación inversa de la relación del ejemplo 91

SOLUCION:

$R = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \ / \ x + y^2 \leq 5 \} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (4,1)\}$

Observe que $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y^2 \leq 5$

$\Leftrightarrow$ (la primera componente + el cuadrado de la segunda componente es ≤ 5)

Luego, $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$

$\Leftrightarrow$ (la primera componente + el cuadrado de la segunda componente es ≤ 5)

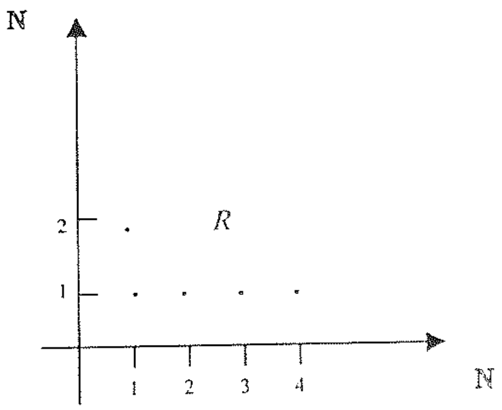
$\Leftrightarrow y + x^2 \leq 5$

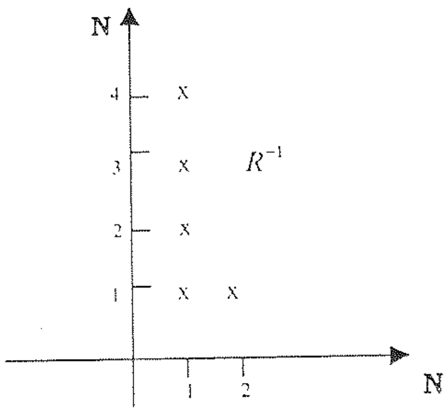
$\therefore R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \ / \ y + x^2 \leq 5 \}$

Concluímos que si $R = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \ / \ x + y^2 \leq 5 \}$ entonces

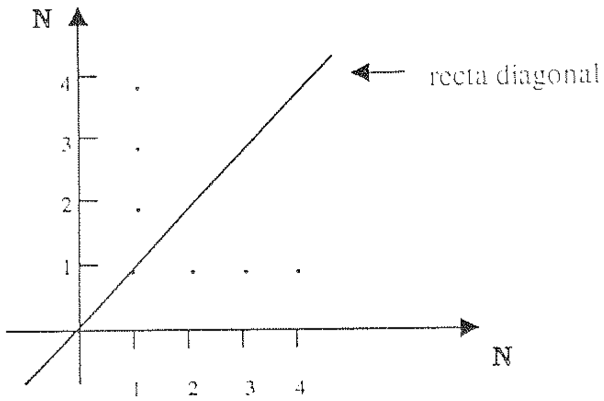
$$R^{-1} = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \; / \; (y, x) \in R \} = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \; / \; y + x^2 \leq 5 \}$$

Expresando R^{-1} por extensión se obtiene $R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ simplemente invirtiendo los pares ordenados de R.



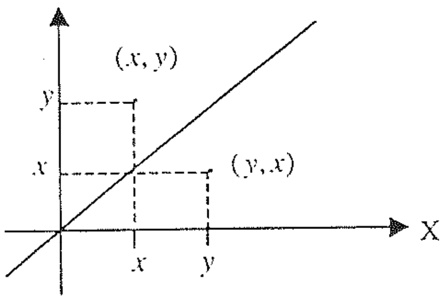


Si colocamos R y R^{-1} en un mismo diagrama,. Tendremos:

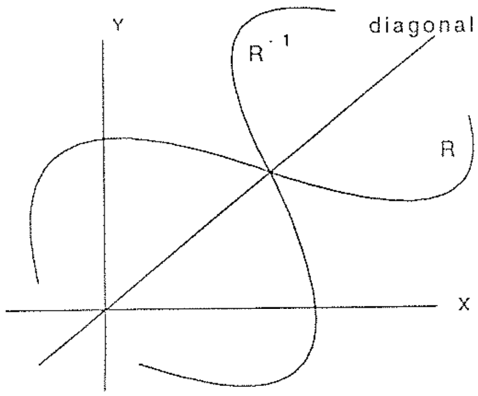


Observamos que los gráficos de R y R^{-1} son <u>simétricos</u> con respecto a la recta diagonal o bisetriz que se muestra en la figura.

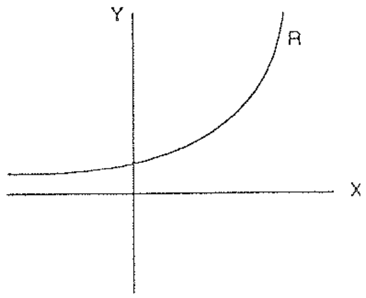
Lo anterior no es casualidad y obedece al hecho que los pares ordenados (x, y) e (y, x) son simétricos, como se muestra a continuación:

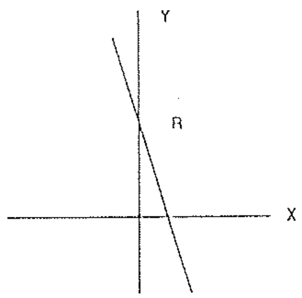


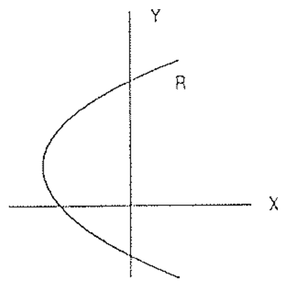
El siguiente diseño muestra los gráficos de una relación R y su inversa obtenido por simetría con respecto a la diagonal.



Trate Ud., de trazar a mano alzada y siguiendo el método anterior, las gráficas de R^{-1} en los siguientes casos:







<u>EJEMPLO 99:</u>

Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y las relaciones de A *en* B siguientes:

$R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,3)\}$; $S = \{(2,3), (2,1), (3,1), (1,3)\}$; $T = \{(3,1), (3,5), (1,5), (2,1)\}$

Calcular : $R \cup S$; $(R \cap T) \cup S$; $R^{-1} \cap S^{-1}$; $(R \cap S)^{-1}$

$Dom\,(R^{-1})$; $\text{Rec}((R \cap T) \cup S)$; R^c ; $[(T \cap S)^c]^{-1}$

SOLUCION:

(a) $R \cup S = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,3), (2,1), (3,1)\}$
(b) $R \cap T = \{(1,5)\} \Rightarrow (R \cap T) \cup S = \{(1,5), (2,3), (2,1), (3,1), (1,3)\}$
(c) $R^{-1} = \{(1,1), (3,1), (5,1), (3,2)\}$; $S^{-1} = \{(3,2), (1,2), (1,3), (3,1)\}$

$\therefore\ R^{-1} \cap S^{-1} = \{(3,1), (3,2)\}$

Además, $Dom\,(R^{-1} \cap S^{-1}) = \{3\}$ y $\text{Rec}\,(R^{-1} \cap S^{-1}) = \{1,2\}$

(d) $R \cap S = \{\, (1,3), (2,3), \} \Rightarrow (R \cap S)^{-1} = \{(3,1), (3,2)\}$

Observe de (c) y (d) que $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1} = \{(3,1), (3,2)\}$

Ello no es casualidad y lo demostraremos en seguida.

(e) $Dom\,(R^{-1}) = \{1,3,5\} = B$
(f) Del cálculo en (b) se tiene $\text{Rec}((R \cap T) \cup S) = \{5, 3, 1\} = B$
(g) Si $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,3)\}$ entonces R^c representa al complemento de R, tomando como universo $U = A \times B$

$\therefore\ R^c = \{(2,1), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\}$

(h) $T \cap S = \{(3,1), (2,1)\}$

$\therefore (T \cap S)^c = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$

$\therefore [(T \cap S)^c]^{-1} = \{(1,1), (3,1), (5,1), (3,2), (5,2), (3,3), (5,3)\}$

En el ejemplo (d) anterior se observó que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ ¿Es esto siempre verdadero? Trataremos de demostrarlo, como igualdad entre conjuntos.

Sea $(x, y) \in (R \cap S)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R \cap S \Leftrightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \in S$

$\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$

$$\therefore \quad \boxed{(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}}$$

¿Será verdadero que $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$? Trate Ud., de demostrarlo.

Demuestre además que $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$

EJERCICIO 39.

1) Encuentre el dominio de las siguientes relaciones:

(a) $R = \{(x,y) \in A \times B \ / \ x + y \leq 5\}$, donde $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5\}$

(b) $R = \{(x,y) \in R^2 \ / \ 2x + 3y = 1\}$

(c) $R = \{(x,y) \in R^2 \ / \ x^2 - y^2 = 1\}$

(d) $R = \{(x,y) \in R^2 \ / \ y = \sqrt{|1 - x| - 2}\}$

2) Encuentre el recorrido de las siguientes relaciones:

(a) $R = \{(x,y) \in A \times B \ / \ x^2 - y^2 \geq 0\}$, donde $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5\}$

(b) $R = \{(x,y) \in R^2 \ / \ 3x - y = 6\}$

(c) $R = \{(x,y) \in R^2 \ / \ y = x^2 - 5x + 4\}$

(d) $R = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ y = x + \frac{1}{x}\right\}$

3) Considere las siguientes relaciones en $A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(x,y) / \ |x - y| \geq 2\}$

$S = \{(x,y) / \ 3 \leq x^2 + y^2 \leq 10\}$

$T = \{(x,y) / \ x = 1 \ \vee \ y = 1\}$

Calcule :

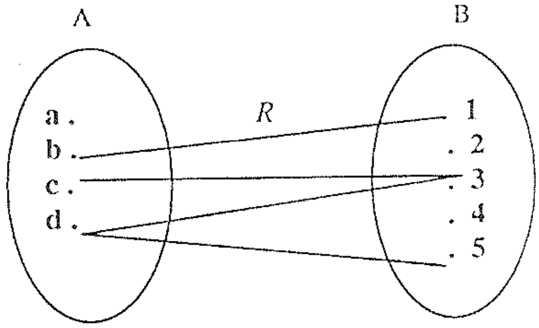
$R \cup S$; $R^{-1} \cup (S \cap T)^{-1}$; $R^C \cup S^C$; $(R \cap S)^C$; $\left(R^C\right)^{-1}$; $\left[(R \cup S)^C\right]^{-1} \cap T^{-1}$;

$Dom\left[(R \cap S)^{-1}\right]$; $Rec\left[\left(R^{-1} \cap S^{-1}\right)^C\right]$

FUNCIONES.

Corresponde ahora estudiar un tipo muy importante de relaciones, son las llamadas FUNCIONES. Para introducir este nuevo concepto, consideraremos los siguientes ejemplos de relaciones dadas por sus gráficos:

1)

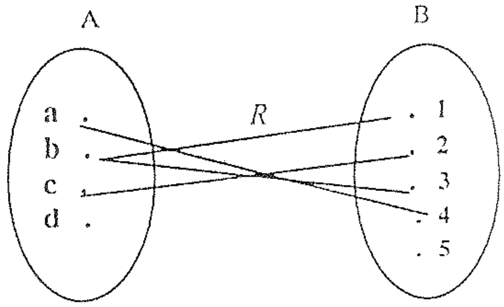


En este caso, $R = \{(b,1), (c,3), (d,3), (d,5)\}$
Aquí tenemos dos situaciones que queremos destacar:

(i) El elemento "a" del conjunto A, no tiene pareja en B.
(ii) El elemento "b" del conjunto A, tiene a "1" como pareja en B
(iii) El elemento "c" del conjunto A, tiene a "3" como pareja en B
(iv) El elemento "d" del conjunto A, tiene a "3" y a "5" como parejas en B

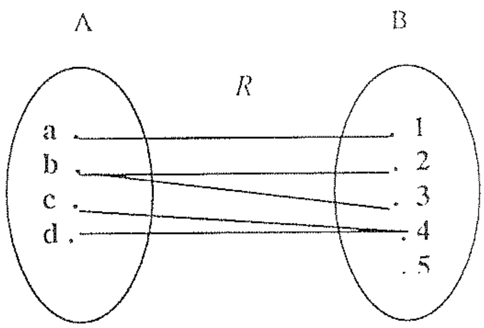
En una <u>función</u>, no permitiremos que suceda lo que en (i) o en (iv), vale decir, <u>todo</u> elemento en A tendrá pareja en B y esa pareja será además <u>única.</u>

2)



En este ejemplo, vemos que "d" no tiene pareja en B. Esta relación <u>no será función.</u>

3)



En este ejemplo, todos los elementos de A tienen pareja en B, pero sucede que el elemento "b" tiene dos parejas, lo que será prohibido para una función.

Observe, sin embargo, que el elemento 4 de B es pareja de "c" y de "d", pero eso no está prohibido en una función. Tenemos en consecuencia, la siguiente definición de función.

Sea A y B dos conjuntos y sea R una relación de A en B. Se dirá que R es FUNCION de A en B si todo elemento de A tiene una única pareja en B.

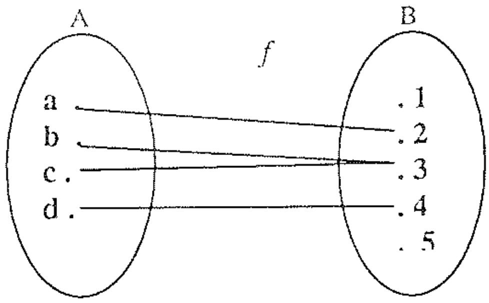
En símbolos, decimos:

$$\boxed{R \text{ es función de A en B ssi } (\forall x \in A)(\exists! y \in B)((x, y) \in R)}$$

ALGUNAS NOTACIONES Y CONSIDERACIONES:

- De ahora en adelante, una función se denotará por letras como $f, g, h, \ldots$ en vez de R que usábamos para relación.
- Si en una función f, "x" e "y" forman pareja, es decir (x, y) es un par ordenado que pertenece a f, diremos que "y" es la imagen de "x" y escribimos $y = f(x)$

Así por ejemplo, consideremos la siguiente función de A en B:



$$f = \{(a,2), (b,3), (c,3), (d,4)\}$$

Como $(a,2) \in f$, escribimos $f(a) = 2$ y leemos "la imagen de a es 2" (para ser más precisos, se debiera decir, "la imagen de a, mediante f, es 2")

Así también tenemos:

$f(b) = 3$, o sea, que la imagen de b es 3
$f(c) = 3$, o sea, que la imagen de c es 3 y
$f(d) = 4$, o sea, que la imagen de d es 4

- Si f es una función de A en B, podemos escribir $f : A \to B$
  Así, el ejemplo anterior puede denotarse como:

$$f : A \to B \text{ tal que } f(a) = 2,\ f(b) = 3,\ f(c) = 3,\ f(d) = 3$$

- Si $f : A \to B$ es una función, tenemos que $Dom(f) = A$ y $Rec(f) \subseteq B$.
  En efecto, como todo elemento de A debe tener imagen en B, entonces todo elemento de A formará algún par ordenado en la función f y por tal razón $Dom(f) = A$.
  Además, las imágenes en B serán segundas componentes de los pares en la función. Todas las imágenes conforman $Rec(f)$ pero podrían haber elementos de B que no son imágenes para ningún elemento de A, tal como el caso de "5" en el ejemplo anterior. Por tal razón $Rec(f) \subseteq B$. Evidentemente en algunos casos podríamos tener $Rec(f) = B$

EJEMPLO 100.

¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones de A en B, siendo $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{2,4,6,8,9,10\}$?

(a) $R = \{(1,2), (2,6), (3,9)\}$
(b) $S = \{(1,6), (2,9), (3,6), (2,10), (4,8)\}$
(c) $T = \{(1,2), (2,3), (3,6), (4,8)\}$
(d) $f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$

SOLUCION:

(a) El elemento "4" de A no tiene imagen en R
(b) El elemento $2 \in A$ tiene dos imágenes en B; $(2,9) \in S \wedge (2,10) \in S$
(c) El elemento $2 \in A$ tiene imagen 3 en T, pero $3 \notin B$

En consecuencia R, S y T no son funciones de A en B.

(d) En f, todo elemento de A tiene imagen y además es única.

Aquí, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$

Ahora sí, f es función de A en B.
Note Ud., que la imagen de cada elemento de A es el doble del número (la imagen de 1 es2, la imagen de 2 es 4, etc.)

Hemos encontrado así, una manera más simplificada y más general de definir esta función f, a saber:

$$f : A \to B \text{ tal que } f(x) = 2x$$

Al escribir $f(x) = 2x$ estamos diciendo que la imagen de un elemento x es su doble $2x$ y con ello estamos indicando las 4 imágenes anteriores de una sola vez.

EJEMPLO 101.

Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \mathbf{N}$ y $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2 + 1$.
Según como f ha sido definida, la imagen de cada x será $x^2 + 1$, o sea, su cuadrado más 1.

Luego, $f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow f(2) = 5$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow f(3) = 10$$

$$f(4) = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17 \Rightarrow f(4) = 17$$

$$f(5) = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26 \Rightarrow f(5) = 26$$

Así, cada elemento de A tiene una única imagen que pertenece a B.

$\therefore$ f es función de A en B

EJEMPLO 102.

Sea $g : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ definida por $g(n) = \sqrt{n}$ ¿Es g función?
La imagen de 1 es $g(1) = \sqrt{1} = 1 \in \mathbf{Z}$, pero la imagen de 2 es $g(2) = \sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$
Luego g no es función de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{Z}$
Sin embargo, si cambiamos $\mathbf{Z}$ por $\mathbb{R}$, tendremos:

$$g : \mathbf{N} \to \mathbb{R} \text{ definida por } g(n) = \sqrt{n}$$

Ahora si, cada número natural n, tendrá imagen $\sqrt{n} \in \mathbb{R}$
Además, la imagen es única pues $\sqrt{n}$ representa un único número real.
Esta función g modificada es una función.

EJEMPLO 103.

Sea $h : \mathbf{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \sqrt{1 - x}$. ¿Es h función?

Como sabemos, para que h sea función todo elemento $x \in \mathbb{R}$ debiera tener imagen $h(x) \in \mathbb{R}$.

Pero, $h\ (x) = \sqrt{1-x} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Esto nos dice que la imagen $h\ (x) \in \mathbf{R}$ ssi $x \leq 1$, o sea que hay infinitos números $x \in \mathbf{R}$ que no tendrán imagen en $\mathbf{R}$, como por ejemplo $x = 2,\ x = \sqrt{5}$, etc.

$\therefore\ h$ no es función

Sin embargo, podríamos "reparar" este defecto. Para ello podemos disminuir o restringir el conjunto $A = \mathbf{R}$, haciendo $A = (-\infty, 1]$.

Tenemos entonces $h : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $h\ (x) = \sqrt{1-x}$. Con ello nos hemos asegurado que $Dom\ (h) = A = (-\infty, 1]$ ¿Cómo podemos ahora verificar la unicidad, es decir, que cada elemento $x \in (-\infty, 1]$ tenga una única imagen?

La idea es expresar simbólicamente que un elemento x no tenga dos (o más) imágenes diferentes, o lo que es lo mismo, que dos elementos iguales $(x = x')$ tengan imágenes también iguales $(f(x) = f(x'))$. En consecuencia, la <u>unicidad</u> de la imagen se traduce en que:

$$\boxed{(\forall\ x, x' \in Dom\ (h))(x = x' \Rightarrow f(x) = f(x'))}$$

En el ejemplo actual.

$$x = x' \Rightarrow -x = -x' \Rightarrow 1-x = 1-x' \Rightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x'} \Rightarrow h\ (x) = h(x')$$

Con esto tenemos ahora que $h : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $h\ (x) = \sqrt{1-x}$ es función.

Debemos entender la fórmula $h\ (x) = \sqrt{1-x}$ como un modelo de cálculo de imágenes; la imagen de un número o expresión (aquí representado por x) se obtiene restándolo de 1 y luego tomando raiz cuadrada.

Así tenemos : $h(-3) = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$h\ (0) = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

$$h\ (-\sqrt{2}) = \sqrt{1-(-\sqrt{2}} = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.5538$$

$h\ (r) = \sqrt{1-r}$ (expresa lo mismo que $h\ (x) = \sqrt{1-x}$, sólo que en la variable r)

$h\ (1-r) = \sqrt{1-(1-r)} = \sqrt{r}$ (siempre que $r \geq 0$)

$h\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \sqrt{1-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \sqrt{-\dfrac{1}{x}}$ (siempre que $x < 0$)

EJEMPLO 104.

Si $f\left(\dfrac{3-x}{2}\right)=x^2$, determinar $f(x)$ y $f(x-1)$

SOLUCION:

Ahora no tenemos $f(x)$ sino $f\left(\dfrac{3-x}{2}\right)$. De hecho si hacemos $x=5$ resultará $f\left(\dfrac{3-5}{2}\right)=5^2$, es decir $f(-1)=25$, pero no se obtuvo $f(5)$ ¿Cómo obtener $f(x)$ a partir de $f\left(\dfrac{3-x}{2}\right)$?

Aquí usamos una variable auxiliar u; haciendo $u=\dfrac{3-x}{2}$ y despejando x tenemos $2u=3-x$, es decir, $x=3-2u$

$$\therefore\ f\left(\frac{3-x}{2}\right)=x^2 \Leftrightarrow f(u)=(3-2u)^2=9-12u+4u^2$$

Así, $f(u)=4u^2-12u+9$ (la variable u se puede cambiar por otra cualquiera)

$$\therefore\ f(r)=4r^2-12r+9 \quad \textit{nos dice lo mismo que} \quad f(t)=4t^2-12t+9$$

y también $f(x)=4x^2-12x+9$

Así, $f(x-1)=4(x-1)^2-12(x-1)+9$

EJEMPLO 105.

Sea $f:A\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-1}}$, siendo $A\subseteq\mathbb{R}$

Determinar el mayor conjunto A posible, de modo que f sea función.

SOLUCION:

El mayor conjunto A es exactamente $A=Dom(f)$

$$Dom(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /(\exists\ y\in\mathbb{R})\left(y=\sqrt{\frac{1-x}{x^2-1}}\right)\right\}$$

Aquí conviene resaltar el hecho que la imagen de "x" es a veces denotado por "y" en vez de $f(x)$, o sea que se puede escribir $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-1}}$ en vez de $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-1}}$. En general, se escribe $y=f(x)$ para indicar que "y" es la imagen de "x" a través de la función f.

Así, $Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-1}} \in \mathbb{R} \right\}$

Pero, $\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-1}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

$\therefore Dom\,(f) = (-\infty, -1)$

Luego el mayor conjunto A buscado es $A = (-\infty, -1)$
Ahora verificamos la unicidad de imagen para cada $x \in (-\infty, -1)$

$$x = x' \Rightarrow -x = -x' \Rightarrow 1-x = 1-x'$$

También $x = x' \Rightarrow x^2 = (x')^2 \Rightarrow x^2 - 1 = (x')^2 - 1$

$$\therefore x = x' \Rightarrow 1-x = 1-x' \wedge x^2-1 = (x')^2 - 1 \Rightarrow \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{1-x'}{(x')^2-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{1-x'}{(x')^2-1}} \Rightarrow f(x) = f(x')$$

Así, la imagen de cada $x \in (-\infty, -1)$ es <u>única.</u>

Luego: $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ definida por $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-1}}$ es función.

<u>EJEMPLO 106.</u>

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y^2 + y = x + 2$. ¿Es f una función?

<u>SOLUCION:</u>

No hay duda que f es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; sus elementos son pares ordenados, como por ejemplo $(-2, 0)$. Ahora podemos apreciar que la expresión que relaciona "x" con su imagen "y" viene dada por $y^2 + y = x + 2$, es decir, no tiene la forma $y = f(x)$ donde "y" está <u>despejada</u> en términos de "x". Cuando "y" aparece despejada en términos de x se dice que "y es <u>función explícita</u> de x", por ejemplo : $y = \sqrt{1-x}$ o $y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{1+x}}$.

En cambio, cuando "y" no viene despejada en términos de "x", se dice que "y es función implícita de x", tal como en el caso actual $y^2 + y = x + 2$.

En algunos casos podremos despejar "y" cuando viene dada en forma implícita y así llevarla a su forma explícita. En el ejemplo actual hacemos lo siguiente:

$$y^2 + y = x + 2 \iff y^2 + y - (x+2) = 0 \quad \text{(ecuación cuadrática en } y\text{)}$$

$$\iff y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(x+2)}}{2} \iff y = \frac{-1 \pm \sqrt{4x+9}}{2}$$

La igualdad $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4x+9}}{2}$ es la forma explícita equivalente a $y^2 + y = x + 2$

En esta forma explicita podemos observar la presencia de dos signos $\pm$ frente a la raíz cuadrada. Esto quiere decir que para un determinado valor de x (siempre que $4x + 9 \geq 0$), tendremos asociados dos valores como imagen, uno tomando signo + y otro tomando signo –

Por ejemplo si $x = 0$, tendremos $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$, o sea $y_1 = -2$ e $y_2 = 1$. Así, f no es función.

¿Podemos reparar esta situación? Efectivamente se puede, aún cuando la reparación es un tanto drástica y consiste en "eliminar" esa duplicidad de signos, es decir, en vez de tomar $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4x+9}}{2}$, quedarnos con $y = \dfrac{-1 + \sqrt{4x+9}}{2}$ (también podría elegirse $y = \dfrac{-1 - \sqrt{4x+9}}{2}$)

Lo que nos queda $y = \dfrac{-1 + \sqrt{4x+9}}{2}$ no será equivalente con $y^2 + y = x + 2$; hemos "cortado" la mitad de la gráfica de $y^2 + y = x + 2$, pero al menos ahora tendremos unicidad de imágenes.

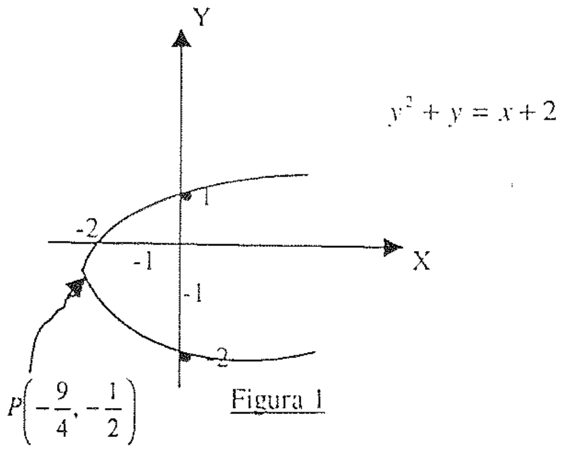


Figura 1

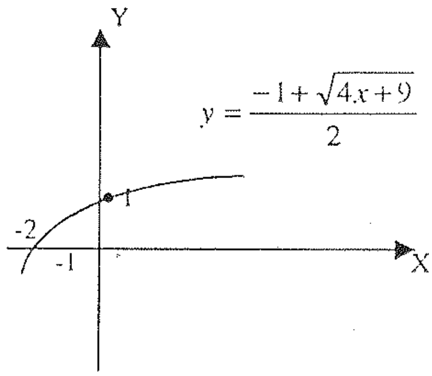


Figura 2

En la figura 1 se ha dibujado la gráfica de $y^2 + y = x + 2$; allí se aprecia que para algunos valores de x podemos tener 2 imágenes, por ejemplo $(0, 1)$ y $(0, -2)$.

En la figura 2 se ha cortado la gráfica justo en el punto $P\left(-\frac{9}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ que es donde se comienza a tener duplicidad de imágenes.

Ninguna línea vertical puede cortar al gráfico de una función en más de 1 punto

Ahora que hemos cambiado la ecuación $y^2 + y = x + 2$ por $y = \dfrac{-1+\sqrt{4x+9}}{2}$, nos preguntamos ¿Cuál es el dominio de esta relación?

$$Dom\,(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; (\exists\, y \in \mathbb{R})\left(y = \frac{-1+\sqrt{4x+9}}{2}\right)\right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-1+\sqrt{4x+9}}{2} \in \mathbb{R} \right\}$$

lo que resulta de colocar la condición $4x + 9 \geq 0$, es decir, $x \geq -\frac{9}{4}$.

Así, $Dom(f) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

$$\therefore\; f : \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } y = \frac{-1+\sqrt{4x+9}}{2} \text{ es función.}$$

<u>EJEMPLO 107.</u>

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1-x}}$

a) Determinar el mayor conjunto A para que f sea función.
b) Determinar además el recorrido de f y bosquejar el gráfico.

<u>SOLUCION:</u>

$$A = Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; (\exists\, y \in \mathbb{R})\left(y = \frac{x-3}{\sqrt{1-x}}\right)\right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-3}{\sqrt{1-x}} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\frac{x-3}{\sqrt{1-x}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - x > 0 \quad \Leftrightarrow x < 1$$

$$\therefore\; A = Dom\,(f) = (-\infty, 1)$$

La verificación de unicidad se deja como ejercicio al estudiante.

$\therefore \quad f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1-x}}$ es una función.

Además si $x < 1$ entonces $x - 3 < 0$ y $\sqrt{1-x} > 0$ por lo tanto $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1-x}} < 0$

(las imágenes serán todas negativas).

(b) $\operatorname{Rec}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \,/\, (\exists\, x \in Dom\,(f)\,)\left(y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1-x}} \right) \right\}$

Note Ud., que ahora x debe pertenecer a $Dom(f)$, además de ser un número real.

$$y = \frac{x-3}{\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow \sqrt{1-x}\;\; y = x - 3 \Leftrightarrow (1-x)y^2 = (x-3)^2 \Leftrightarrow y^2 - x\, y^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 6)x + (9 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(y^2-6) \pm \sqrt{(y^2-6)^2 - 4(9-y^2)}}{2} = \frac{6 - y^2 \pm \sqrt{y^4 - 8y^2}}{2} = \frac{6 - y^2 \pm y\sqrt{y^2-8}}{2}$$

Ahora, $x \in Dom\,(f) \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{6 - y^2 \pm y\sqrt{y^2-8}}{2} < 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6 - y^2 + y\sqrt{y^2-8}}{2} < 1 \quad \vee \quad \frac{6 - y^2 - y\sqrt{y^2-8}}{2} < 1$$

La primera condición en ambas inecuaciones es $y^2 - 8 \geq 0$, pues de otro modo, x no sería número real.

$y^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left(y - \sqrt{8}\right)\left(y + \sqrt{8}\right) \geq 0$ cuya solución es $\left(-\infty, -\sqrt{8}\right] \cup \left[\sqrt{8}, +\infty\right)$.

Como anticipamos en (a), $y < 0$ por lo tanto tendremos $y \leq -\sqrt{8}$.

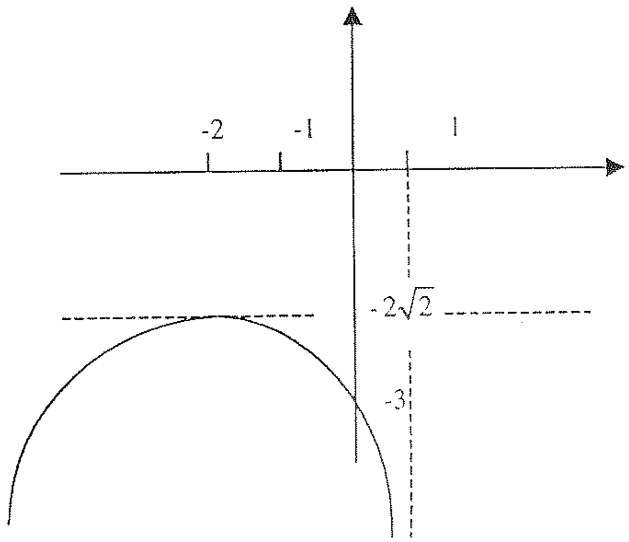
Verifiquemos finalmente que se satisface por lo menos una de las dos inecuaciones anteriores para $y \leq -\sqrt{8}$.

$$\frac{6 - y^2 + y\sqrt{y^2-8}}{2} < 1 \Leftrightarrow 6 - y^2 + y\sqrt{y^2-8} < 2 \Leftrightarrow -y^2 + y\sqrt{y^2-8} < -4 \Leftrightarrow y\sqrt{y^2-8} < y^2 - 4$$

Se tiene $y < 0$, además $y^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 8 \Leftrightarrow y^2 - 4 \geq 4 > 0$ entonces $y\sqrt{y^2-4} < y^2 - 4$ es Verdadera para $y \leq -\sqrt{8}$.

En consecuencia $\quad \operatorname{Rec}(f) = \left(-\infty, -\sqrt{8}\right] = \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right]$

Usando la información obtenida: $Dom(f) = (-\infty, 1)$, $Rec(f) = \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right]$ y una tabla de valores tenemos el siguiente bosquejo del gráfico de f :



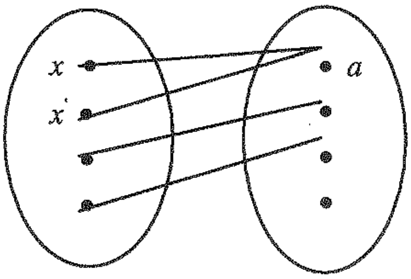
x	y
0	-3
0.5	-3.5355
0.9	- 6.64
-0.5	-2.8577
-1	$-2\sqrt{2}$
-2	-2.8867

FUNCION INYECTIVA.

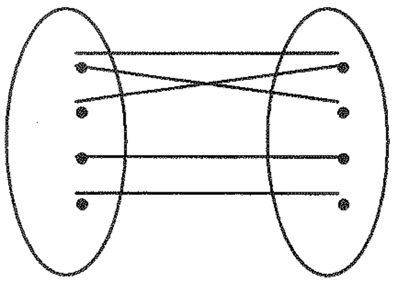
Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es INYECTIVA o UNO A UNO (simbolizamos 1-1) si no pueden haber dos o más elementos de A con una misma imagen en B, vale decir, si dos imágenes en B son iguales entonces los elementos en A son también iguales.

Simbólicamente escribimos: $\boxed{f : A \to B \ \ es\ 1-1\ \ ssi\ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$

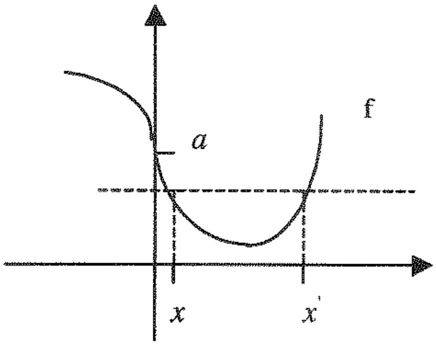
Note Ud., que la implicación usada en esta definición es contraria a aquella que empleamos para definir la unicidad de imágenes.



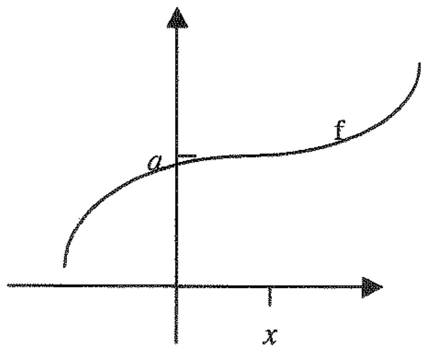
función no inyectiva
(x y x' *tienen imagen* a)



función inyectiva



función no inyectiva
(x y x' *tienen imagen* a)



función inyectiva

El gráfico de una función inyectiva <u>no</u> puede ser cortado en más de 1 punto por ninguna línea Horizontal

<u>EJEMPLO 108</u>

Demostrar que $f : \mathbb{R}-\{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = \dfrac{x+3}{x-4}$ es inyectiva.

<u>SOLUCION:</u>

Basta verificar la implicación : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

En efecto, $f(x) = f(x') \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-4} = \dfrac{x'+3}{x'-4} \Rightarrow (x+3)(x'-4) = (x-4)(x'+3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot x' - 4x + 3x' - 12 = xx' + 3x - 4x' - 12 \Rightarrow -4x + 3x' = 3x - 4x' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4x - 3x = -3x' - 4x' \Rightarrow -7x = -7x' \Rightarrow x = x'$$

EJEMPLO 109

Demostrar que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 1 + x - x^2$ no es inyectiva.

SOLUCION:

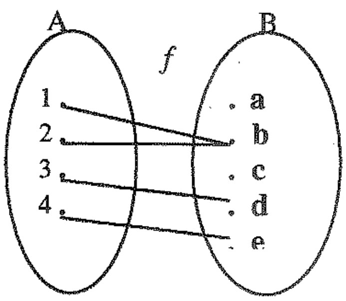
Procediendo según la definición de inyectividad tendremos:

$f(x) = f(x') \Rightarrow 1 + x - x^2 = 1 + x' - (x')^2 \Rightarrow x(x-1) = x'(x'-1)$, pero de aquí no podemos implicar $x = x'$ (la implicación contraria es Verdadera). Verifique Ud., con $x = 1$ y $x' = 0$. O bien, observe que $f(1) = 1$ y $f(0) = 1$, o sea los elementos 1 y 0 del dominio, tienen la misma imagen 1.

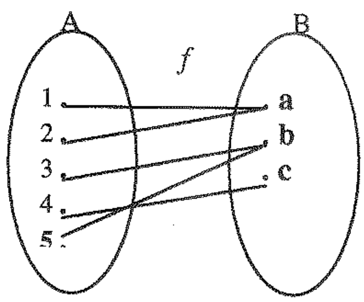
Construya Ud. una tabla detallada de valores y bosqueje luego el gráfico de f.

FUNCION EPIYECTIVA:

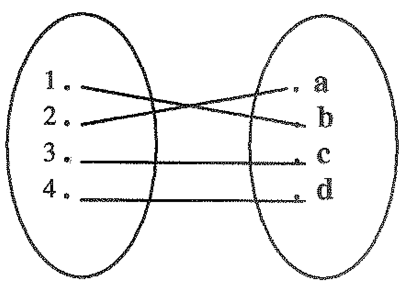
Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Diremos que f es EPIYECTIVA o SOBREYECTIVA si $\mathrm{Rec}\,(f) = B$.
Esta definición de epiyectividad exige que todo elemento $y \in B$ sea imagen de algún $x \in A$
Decimos que y es imagen de x, como también que x es pre-imagen de y.



función no epiyectiva
(a y c no tienen pre-imagen)



función epiyectiva pero no inyectiva



función epiyectiva e inyectiva

Notemos los siguientes hechos en estos 3 últimos gráficos:

- En el primero, tenemos $f : \{(1,b),(2,b),(3,d),(4,e)\}$
  La relación inversa es $f^{-1} = \{(b,1),(b,2),(d,3),(e,4)\}$ no es función de B *en* A pues b tiene dos imágenes. Además no es función pues hay elementos en B sin imagen en A.

- En el segundo, tenemos $f = \{(1,a),(2,a),(3,b),(4,c),(5,b)\}$
  La relación inversa es $f^{-1} = \{(a,1),(a,2),(b,3),(c,4),(b,5)\}$ que no es función de B *en* A pues a tiene dos imágenes.

- En el tercero, $f = \{(1,b),(2,a),(3,c),(4,d)\}$

  La relación inversa es $f^{-1} = \{(b,1),(a,2),(c,3),(d,4)\}$ que ahora si es función de B *en* A pues *todo* elemento de B tiene única imagen en A.

Esto último fue posible gracias a que $f : A \to B$ es inyectiva y epiyectiva, lo que llamaremos ahora BIYECTIVA.

$f : A \to B$ es BIYECTIVA si f es INYECTIVA y EPIYECTIVA

El resultado anterior se puede resumir así:

$f : A \to B$ es función biyectiva ssi $f^{-1} : B \to A$ es función biyectiva

Luego, debe quedarnos claro que:

- Toda función f, por ser relación, tiene definida su relación inversa f^{-1}.
- Esa relación inversa f^{-1} será función ssi f es biyectiva.
- Además f^{-1} será función biyectiva también.

EJEMPLO 110.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+4}$

a) Determinar A y B de modo que f sea biyectiva
b) Encuentre en tal caso, la función inversa f^{-1}

SOLUCION:

a) $Dom(f)=\left\{ x\in \mathbb{R}/(\exists\, y\in \mathbb{R})\left(y=\dfrac{2x-1}{3x+4}\right)\right\}=\left\{ x\in \mathbb{R}\,/\,\dfrac{2x-1}{3x+4}\in \mathbb{R} \right\}=$

$$=\left\{ x\in \mathbb{R}/\ 3x+4\neq 0 \right\}=\left\{ x\in \mathbb{R}/\ x\neq -\frac{4}{3}\right.$$

$$\therefore\ A=Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{4}{3}\right\}$$

Verificaremos la <u>unicidad</u> de imágenes:

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\Rightarrow 2x=2x'\Rightarrow 2x-1=2x'-1 \\ x=x'\Rightarrow 3x=3x'\Rightarrow 3x+4=3x'+4 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2x-1}{3x+4}=\frac{2x'-1}{3x'+4}\Rightarrow f(x)=f(x')$$

$$\mathrm{Rec}(f)=\left\{ y\in \mathbb{R}\ /\ \exists\, x\in Dom(f)\ \wedge\ y=\frac{2x-1}{3x+4}\right\}$$

Pero $y=\dfrac{2x-1}{3x+4}\ \Leftrightarrow\ 3xy+4y=2x-1\ \Leftrightarrow\ x(3y-2)=-1-4y$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{-1-4y}{3y-2}\qquad \Leftrightarrow\ x=\frac{1+4y}{2-3y}$$

Además, $x\in Dom(f)\Leftrightarrow x\in \mathbb{R}-\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\Leftrightarrow x\in \mathbb{R}\ \wedge\ x\neq -\dfrac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{\frac{1+4y}{2-3y}\in \mathbb{R}}_{(1)}\ \wedge\ \underbrace{\frac{1+4y}{2-3y}\neq -\frac{4}{3}}_{(2)}$$

Veamos (1):

$$\frac{1+4y}{2-3y}\in \mathbb{R}\quad \Leftrightarrow\ 2-3y\neq 0\quad \Leftrightarrow\quad y\neq \frac{2}{3}$$

Veamos (2): $\dfrac{1+4y}{2-3y}=-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 3(1+4y)=-4(2-3y)\Leftrightarrow 3+12y=-8+12y\Leftrightarrow 3=-8$ (Falso)

$$\therefore\ \frac{1+4y}{2-3y}\neq -\frac{4}{3}$$

$$\therefore B = \operatorname{Rec}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \ / \ \frac{1+4y}{2-3y} \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

En consecuencia: $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \to \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ es <u>función</u> y como $B = \operatorname{Rec}(f)$ tenemos que f es <u>función epiyectiva.</u>

Analicemos ahora la inyectividad de f

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2x'-1}{3x'+4} \Rightarrow 6xx' + 8x - 3x' - 4 = 6xx' - 3x + 8x' - 4$$

$$\Rightarrow 8x - 3x' = -3x + 8x' \Rightarrow 11x = 11x' \Rightarrow x = x'$$

$\therefore f$ es <u>inyectiva</u>

Así, se concluye que $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \to \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ definida por $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$ es función biyectiva.

b) La determinación de f^{-1} es simple una vez que se ha calculado $\operatorname{Rec}(f)$

$$f^{-1} = \{(y,x) \ / \ (x,y) \in f\} = \{(y,x) \ / \ f(x) = y\} = \left\{ (y,x) \ / \ y = \frac{2x-1}{3x+4} \right\}$$

$$= \left\{ (y,x) \ / \ x = \frac{1+4y}{2-3y} \right\}$$

$$\therefore f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1+4y}{2-3y} \quad \text{o bien} \quad f^{-1}(x) = \frac{1+4x}{2-3x}$$

Así, $f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \to \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$ queda definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{1+4x}{2-3x}$

<u>EJEMPLO 111.</u>

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ definida por $y = \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+1}}$

a) Encontrar A y B de modo que f sea biyectiva

b) Encontrar f^{-1}

SOLUCION:

a)

- $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (\exists\, y \in \mathbb{R}) \left(y = \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+1}} \right) \} = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+1}} \in \mathbb{R} \right\} =$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{5x-2}{x+1} \geq 0 \right\}$$

$$= (-\infty, -1) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right) \text{ (Verifique Ud., resolviendo la inecuación)}$$

$$\therefore \ A = Dom(f) = (-\infty, -1) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

- Demuestre Ud., la unicidad de las imágenes.

- $Rec\,(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \ / \ (\exists\, x \in Dom\, f) \left(y = \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+1}} \right) \right\}$. Note que $y = \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+1}} \geq 0$

$$y = \sqrt{\frac{5x-2}{x+1}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{5x-2}{x+1} \quad \text{(ya sabemos que } y \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow y^2(x+1) = 5x-2 \Leftrightarrow x(y^2-5) = -y^2-2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2+2}{5+y^2}$$

Pero, $x \in Dom\ (f) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right) \Leftrightarrow x < -1 \ \vee \ x \geq \dfrac{2}{5}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{y^2+2}{5-y^2} < -1}_{(1)} \ \vee \ \underbrace{\frac{y^2+2}{5-y^2} \geq \frac{2}{5}}_{(2)}$$

Puede Ud., verificar que la solución de (1) es $S_1 = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ y la solución de (2) es $S_2 = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

Luego $x \in Dom(f) \Leftrightarrow y \in (S_1 \cup S_2) \cap \mathbb{R}_0^+$

$$\Leftrightarrow y \in (\mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}) \cap \mathbb{R}_0^+$$

$$\Leftrightarrow y \in \mathbb{R}_0^+ - \{\sqrt{5}\}$$

$\therefore \operatorname{Rec}(f) = [0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

Así, $f : (-\infty, -1) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right) \to [0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ definida por $y = \sqrt{\frac{5x-2}{x+1}}$ es función biyectiva.

- INYECTIVIDAD.

$$f(x) = f(x') \iff \sqrt{\frac{5x-2}{x+1}} = \sqrt{\frac{5x'-2}{x'+1}} \Rightarrow \frac{5x-2}{x+1} = \frac{5x'-2}{x'+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5xx' + 5x - 2x' - 2 = 5xx' - 2x + 5x' - 2$$

$$\Rightarrow 5x - 2x' = -2x + 5x' \Rightarrow 7x = 7x' \Rightarrow x = x'$$

$\therefore f : (-\infty, -1) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right) \to [0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ definida por $y = \sqrt{\frac{5x-2}{x+1}}$ es biyectiva

b) Determinación de f^{-1}

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

$$y = \sqrt{\frac{5x-2}{x+1}} \iff y^2 = \frac{5x-2}{x+1} \iff y^2x + y^2 = 5x - 2 \iff x(y^2 - 5) = -y^2 - 2 \iff x = \frac{y^2+2}{5-y^2}$$

$\therefore\ x = f^{-1}(y) = \frac{y^2+2}{5-y^2}$, o bien ; $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{5-x^2}$

$\therefore\ f^{-1} : [0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty) \to (-\infty, -1) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ está definida por $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{5-x^2}$

EJERCICIO 40.

1.- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

¿Cuáles de las siguientes son funciones de A en B?

(a) $f = \{(1,3), (2,5), (3,5), (4,9)\}$

(b) $f = \{(1,4),(2,3),(3,7),(4,9),(5,9)\}$

(c) $f = \{(1,1),(2,3),(3,10),(4,9),(5,1)\}$

(d) $f = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5)\}$

Escriba Ud., otras 5 funciones de A en B.
Escriba Ud., 5 funciones de A en B que sean inyectivas.
¿Puede Ud., definir una función epiyectiva de A en B?
¿Puede Ud., definir una función biyectiva de A en B?

2.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 5$

a) Calcule $f(3)$; $f(-1)$; $f(\sqrt{2})$; $f(0)$

b) Encuentre, si es que existe, un valor de x tal que $f(x) = 1$ ¿Cuáles son todos esos valores?

c) Encuentre, si es que existe, un valor de x tal que $f(x) = -7$

d) Calcule $f(\sqrt{x})$; $f(1-x)$; $f(a^2-1)$; $f\left(\frac{1}{a}\right)$; $f\left(x - \frac{1}{x}\right)$

3.- Si $f(1-3x) = 2+x$, determine $f(x)$

4.- Si $f(1-x^2) = x$, determine $f(1+x)$ (Obtenga primero $f(x)$)

5.- Sea $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{2x-3}{2x+4}$, siendo $A, B \subseteq \mathbb{R}$

(a) Determine A y B para que f sea función biyectiva.

(b) Encuentre en tal caso f^{-1}

6.- Repita el ejercicio 5 para las expresiones:

(a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}$ (c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

(d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (f) $f(x) = \frac{x}{x-3}$

Bosqueje los gráficos de las funciones obtenidas.