uta
2011

UNIVERSIDAD DE TARAPACA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA BÁSICA

Apuntes de clases para el curso de INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO de Ingeniería con ejercicios propuestos, ejercicios resueltos y pruebas resueltas

AUTORAS:
M. MILAGRO CARO ARAYA
VERÓNICA ZAMUDIO REBOLLEDO

ARICA – CHILE
2011

Diseño: Abraham Lobos S.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

En este capítulo se estudia conceptos básicos de la geometría plana, aplicaciones, justificaciones de teoremas y corolarios, desarrollo de problemas y ejercicios resueltos, y pruebas de años anteriores. Se tratan temas que son el inicio para problemas que son tratados y resueltos en los cursos posteriores de cálculo , física, como el problema de la tangente a una curva, cálculo de áreas o en este mismo curso en los capítulos siguientes como ángulos entre rectas.

1.1 Conceptos elementales en Geometría

Son conceptos elementales (fundamentales) **punto**, **recta**, **plano**.

Punto

Es el primer objeto geométrico, y origen de todos los demás. No tiene dimensiones.

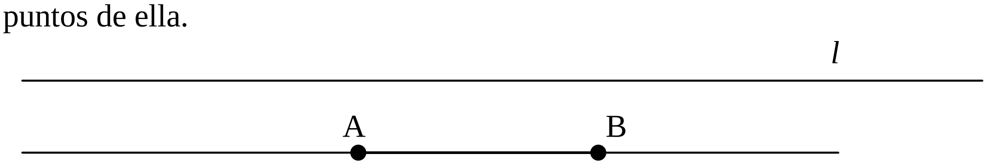
El Punto se representa por un pequeño círculo. •

Se nombran por una letra mayúscula.

Recta

Una recta no tiene ni origen ni fin. Su longitud es infinita. Carece de ancho.

Una recta se nombra por una letra minúscula, o por dos letras mayúsculas que representan dos puntos de ella.



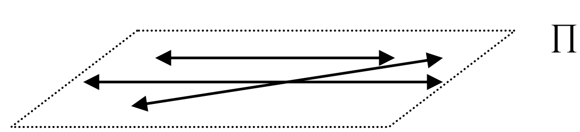
Recta por AB

Postulado 1. *Dos puntos determinan una y solo una línea recta*

Plano

Un plano es una superficie uniforme distribuida con rectas que se cruzan sobre ella.

Un plano se nombra con letras mayúsculas griegas.



Axiomas y postulados

Actualmente son considerados sinónimos, corresponde a proposiciones aceptadas de común acuerdo y que son el fundamento de todos los sigue en estudio, en este caso la Geometría , llamada geometría euclidiana en honor a Euclides, matemático griego del año 300 A.C. que desarrolló la geometría, que estudiaremos, en el texto llamado “Los Elementos”

Postulados relativos a la geometría:

1. Dos puntos determinan una y solo una recta.
2. Todo segmento puede prolongarse indefinidamente, estando sobre la misma recta.
3. Un círculo puede trazarse con cualquier centro y radio dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dados una recta *k* y un punto *P* fuera de ella, existe una y sólo una recta *m* que pasa por *P* y es paralela a *k*.

Axiomas, verdades generales, válidos no sólo en la geometría

1. Todos los objetos iguales a un mismo objeto son iguales entre sí.
2. Si objetos iguales se añaden a otros iguales, las sumas son de iguales.
3. Si objetos iguales se restan a otros iguales, las diferencias son de iguales.
4. Todas las figuras que pueden hacerse coincidir son iguales.
5. El todo es mayor que cada una de sus partes.

Teoremas

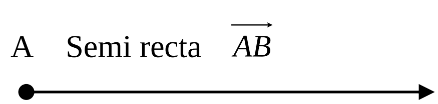
Los teoremas son proposiciones verdaderas que pueden ser demostradas.
Todo teorema consta de dos partes: **hipótesis** y **tesis**.
La hipótesis consiste en el conjunto de los datos o supuesto del teorema y la tesis consiste en la proposición que se pretende demostrar y es la consecuencia de hipótesis.
La **demostración** de un teorema consiste en una cadena de razonamientos lógicos que permite poner en evidencia la verdad de la proposición.

Definiciones

Las definiciones son proposiciones que permite describir el significado de nuevos conceptos, utilizando términos primitivos que se dejan sin definir.

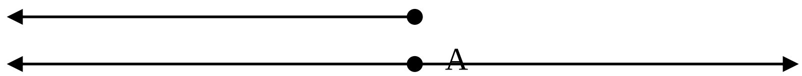
Ejemplos

1. **Semi-recta** o **rayo**. Es un subconjunto de la recta que tiene un origen, pero es infinito en el otro sentido.

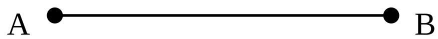


Semi recta $\overrightarrow{BA}$

recta



2. **Segmento.** Es un subconjunto de la recta limitado en ambos extremos. A todo segmento se le asocia una medida numérica, llamada **longitud** una vez que se ha elegido la unidad de medida.



Se nombra el segmento de recta AB, símbolo $\overline{AB}$

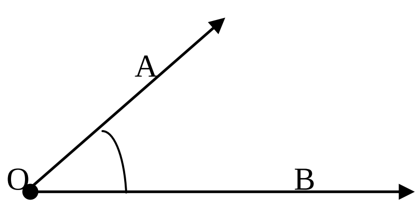
3. **Longitud del segmento** es la distancia entre sus extremos A y B

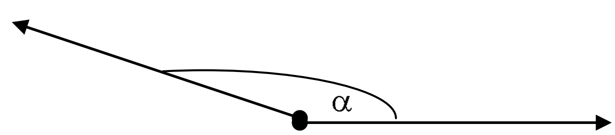
Resumen

Nombre	Figura	Símbolo
Recta AB o recta BA	A B	l o $\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BA}$
Semi-recta AB	A B	$\overrightarrow{AB}$
Semi-recta BA	A B	$\overleftarrow{BA}$
Segmento AB o BA	A B	$\overline{AB}$ o $\overline{BA}$

1.2 Ángulos

Es la unión de dos semi-recta que tienen un punto extremo en común. Las semirrectas se llaman **lados** y el punto común, **vértice**.





Los ángulos se denominan:

1) OAOB , NBOC o simplemente NO
2) Letras griegas minúsculas

Sistema de medición de ángulos

La medida de un ángulo está relacionada con la abertura que tienen los lados del ángulos. Para esto se considera la medida del ángulo en relación al giro de un rayo en torno a un punto, que es el vértice del ángulo. Este giro se mide desde la posición del rayo, cuando los dos lados coinciden, hasta la posición final, cuando ambos lados vuelven a coincidir.

El sistema de medición para medir ángulos es el **sistema sexagesimal** la unidad es el grado (º) .

El ángulo de posición inicial mide 0º.
Un giro completo mide 360º (ángulo completo) .

Grado sexagesimal es la medida de un ángulo que equivale a la 360^{ava} parte de un giro completo.

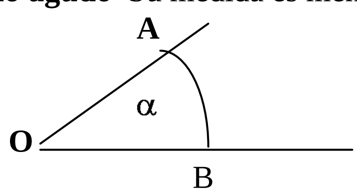
Los submúltiplos del grado son el **minuto** (') y el **segundo** ('')

1º = 60'   1' = 60''

Clasificación de los ángulos

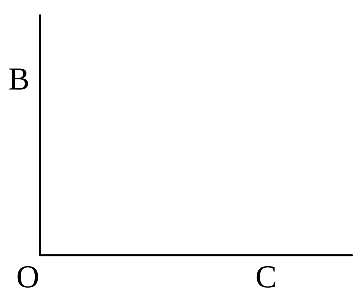
Según su medida, un ángulo puede ser.

a) **Ángulo agudo** Su medida es menor que 90º



NAOB < 90º , Nα < 90º

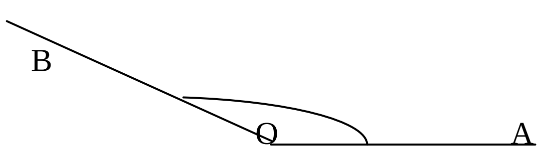
b) **Ángulo recto** su medida es 90º, es decir es la cuarta parte del ángulo completo. Se dice que sus lados son perpendiculares (⊥).



NBOC = 90º

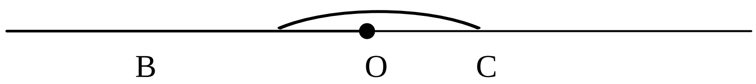
$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$

c) **Ángulo obtuso** su medida es mayor que 90º y menor que 180º.



90º <NBOA < 180º

d) **Ángulo extendido** su medida es 180º

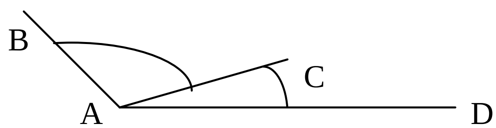


NBOC = 180º

Ángulos coplanares

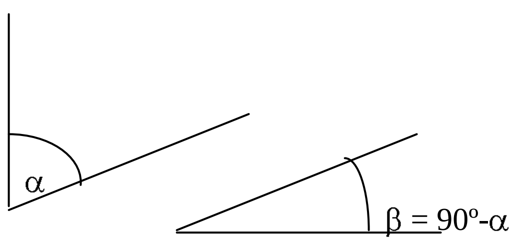
Dos o más ángulos se llaman coplanares, si están contenidos en el mismo plano.

a) **Ángulos adyacentes**: Dos ángulos son adyacentes si y sólo si tienen en común el vértice y un lado. (Sus interiores no se intersectan).



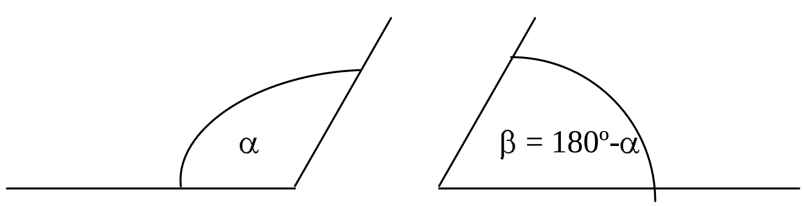
∡BAC y ∡CAD son adyacentes

b) **Ángulos complementarios:** Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90º.



α y β son ángulos complementarios

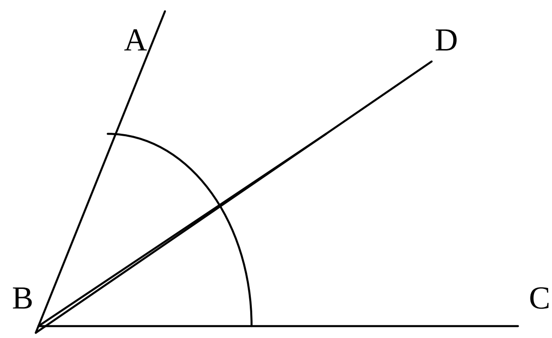
c) Ángulos suplementarios: Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180º.



α y β son ángulos suplementarios

Bisectriz

Bisectriz de un ángulo es el rayo que pasa por el vértice y divide al ángulo, en dos ángulos de igual medida.

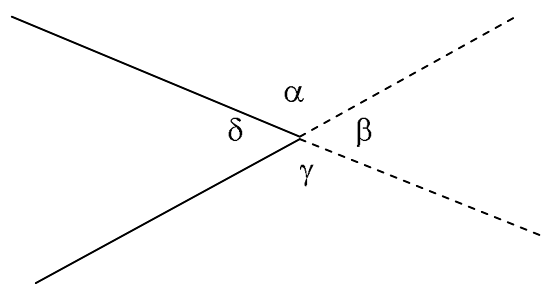


El rayo BD es bisectriz del $\measuredangle$ABC

Ángulos opuestos por el vértice

Definición

Dos ángulos son **opuestos por el vértices,** si los lados de uno están formados por la prolongación de los lados del otro.



δ y β son ángulos opuestos por el vértice
α y γ son ángulos opuestos por el vértice

Teorema

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

O también

Si α y γ , β y δ son ángulos opuestos por el vértice, entonces $\alpha=\gamma$ y $\beta=\delta$

Justifique usted este teorema

Aplicaciones

1. Calcule el complemento de los ángulos de 30°, 45°, 60° y 75°.

Sea α el complemento del ángulo que mide 30º, entonces $30º + \alpha = 90º$

$$\alpha = 90º - 30º = 60º$$

El complemento de del ángulo que mide 30º es un ángulo que mide 60º.

2. Calcule el suplemento de los ángulos de 120°, 135°, 150° y 165°.

Sea α el suplemento del ángulo que mide 120º, entonces $120º + \alpha = 180º$

$$\alpha = 180º - 120º = 60º$$

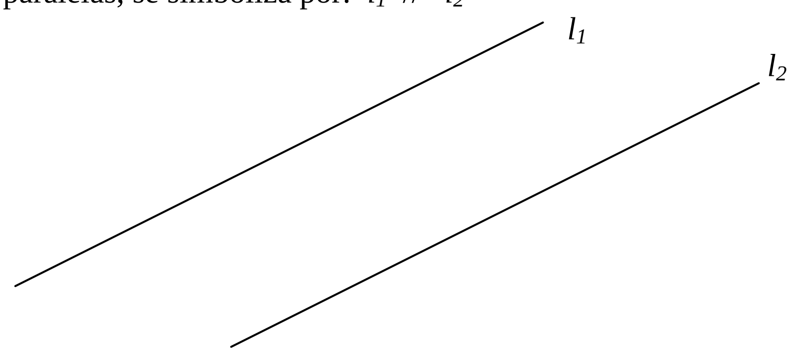
El suplemento de del ángulo que mide 120º es un ángulo que mide 60º.

Rectas paralelas

Definición

Dos rectas l_1 y l_2 son **paralelas** si y solo si están en un mismo plano y su intersección es el conjunto vacío.

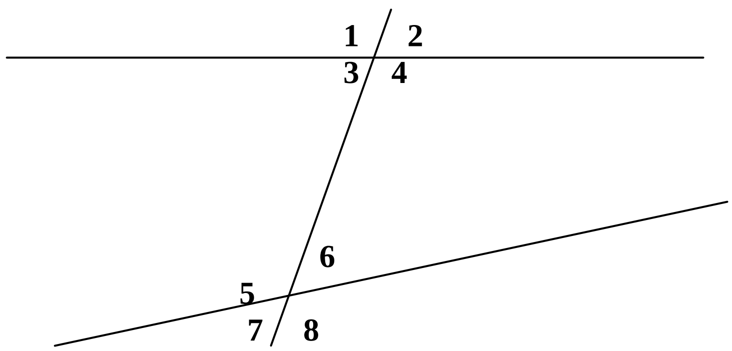
l_1 y l_2 son paralelas, se simboliza por: $l_1 \ // \ l_2$



Postulado fundamental de la geometría euclidiana (Quinto postulado de Euclides)

Por un punto exterior a una recta hay una y solo una paralela a la recta dada.

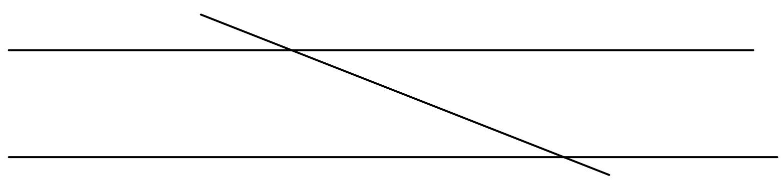
Ángulos formados por una transversal a dos rectas dadas



Los ángulos que forman se llaman:

a) **ángulos correspondientes**: 1 y 5, 3 y 7, 2 y 6,   4 y 8
b) **Ángulos alternos internos**: 3 y 6,   4 y 5
c) **Ángulos alternos externos**: 1y 8,   2 y 7.

El caso importante es el aquel en que las rectas son paralelas, cortadas por una transversal.

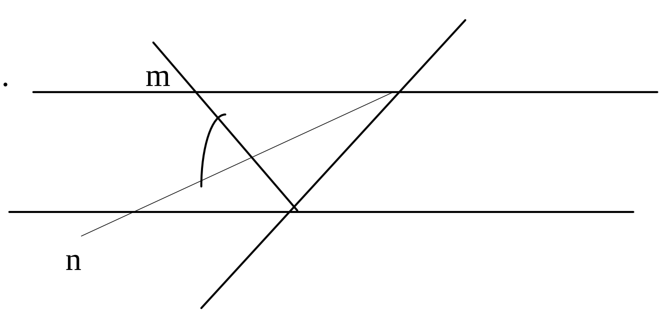


Teorema

1) Los ángulos correspondientes entre paralelas son de igual medida.
2) Los ángulos alternos internos entre paralelas son de igual medida.
3) Los ángulos alternos externos entre paralelas son de igual medida.

Ejercicios

1.

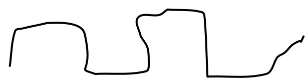


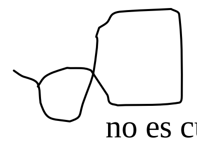
recta paralelas cortadas por la transversal *l*, m y n son bisectrices. Calcular la medida del ángulo formado por m y n.

1.3 Triángulos

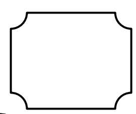
Curvas y polígonos

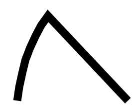
Una **curva simple** es la que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo punto.


Curva simple

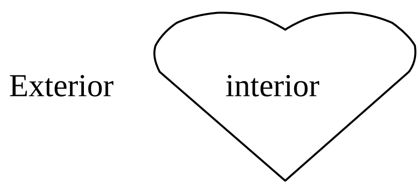

no es curva simple

Curva cerrada es aquella que tiene sus punto inicial y final localizado en el mismo lugar y también se dibuja sin levantar el lápiz del papel.

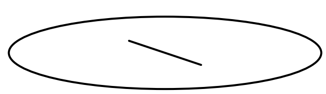

Curva cerrada

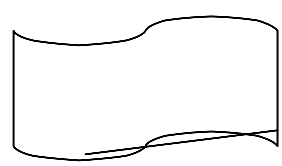

curva abierta

La curva cerrada divide al plano en dos regiones: región interior limitada por la curva y la región exterior ilimitada.



Una figura se dice <u>convexa</u> si para cualquier par de puntos A y B del interior el segmento $\overline{AB}$ está contenido en el interior de la figura.


Convexa


no convexa.

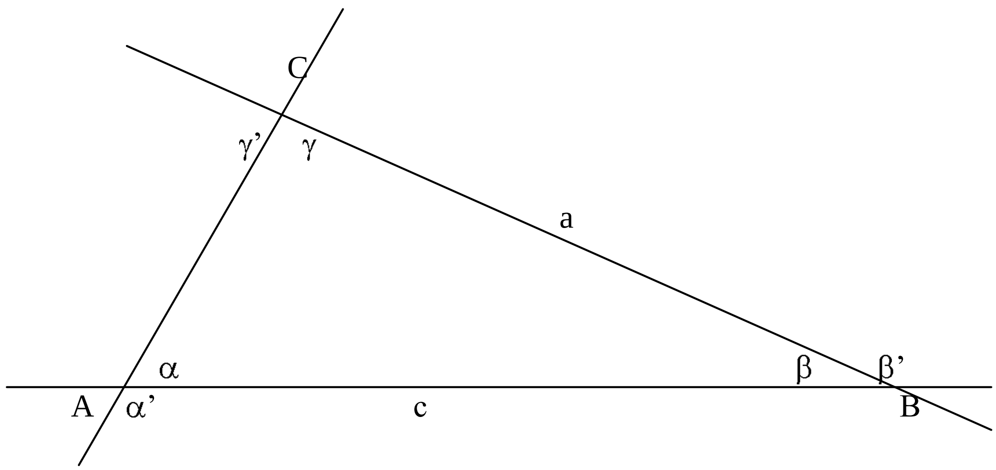
Polígonos

Un **polígono** es una curva cerrada simple constituida por segmentos.
Los segmentos se llaman **lados** , y los puntos en los que se encuentran los extremos de los segmentos son los **vértices** . Los polígonos se clasifican según el número de lados.

Número de lados	**Nombre**
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono

Triángulos

Un **triángulo** es un polígono de tres lados.



Vértices: A, B, C

Lados: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, , $\overline{AC} = b$

Ángulos interiores: NCAB=α, NABC=β, NBCA=γ

Ángulos exteriores: α' , β' , γ'

Propiedades fundamentales de los triángulos

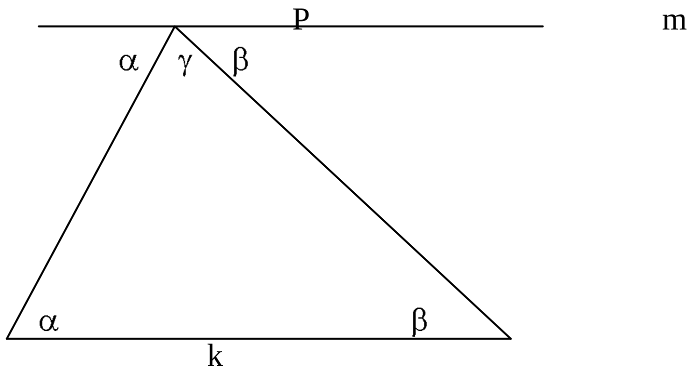
Teorema

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es 180º

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Postulado 5 de Euclides. Dados una recta k y un punto P fuera de ella, existe una y sólo una recta m que pasa por P y es paralela a k.

¡Error!



Teorema

En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

Represente gráficamente el teorema.

Corolario

La suma de los ángulos exteriores de un triángulo, es 360°.

Escriba el enunciado en forma matemática.

Teorema

En todo triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.

Intente justificar este teorema.

Clasificación de los triángulos

(Realice todos los gráficos)

Según sus ángulos

1. **Acutángulo**. 3 ángulos agudos.
2. **Rectángulo**. 1 ángulo recto. El lado mayor se llama hipotenusa, y los otros catetos.
3. **Obtusángulo**. 1 ángulo Obtuso.

Según sus lados

1. **Equilátero**. Tres lados iguales. Ángulos de 60°
2. **Isósceles**. 2 lados y dos ángulos iguales. El lado desigual se llama base.
3. **Escaleno** tres lados distintos

Elementos secundarios del triángulo.

1. Rectas y segmentos:

Alturas, Bisectrices, transversales de gravedad, simetrales (mediatrices), medianas.

2. Puntos:

Ortocentro, incentro, centro de gravedad (baricentro), circuncentro.

Altura: Es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas de un triángulo se denota h_a, h_b, y h_c.

Propiedad

Las tres alturas se interceptan en un único punto, llamado **Ortocentro**.

Bisectriz: Es la recta que pasa por un vértice y divide al ángulo interior, en dos ángulos congruentes. Las tres bisectrices interiores de un triángulo se denotan b_α, b_β y b_γ

Propiedad

Las tres Bisectrices se interceptan en un mismo punto llamado **incentro** , que equidista de los tres lados del triángulo.

Transversal de gravedad: Es el segmento cuyos extremos son el vértice y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Las transversales de gravedad de un triángulo se denotan t_a, t_b y t_c subíndice indica el lado al que llegan.

Propiedad

Las transversales de gravedad se interceptan en un mismo punto llamado **centro de gravedad** o **baricentro**.

Simetrales (mediatrices): Es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado del triángulo. Las simetrales se designan por $S_a,\ S_b\ y\ S_c$ el subíndice indica a que lado son perpendicular.

Propiedad

1. Las tres simetrales se interceptan en un mismo punto llamado **circuncentro** que equidista de los tres vértices del triángulo.

Mediana: es el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo. Las medianas de un triángulo se denotan por m_a, m_b y m_c el subíndice corresponde al vértice opuesto.

Propiedades

1. Todo triángulo tiene tres medianas.
2. Cada mediana es paralela al tercer lado.
3. Cada mediana mide la mitad de la longitud del lado al cual es paralela..

Problemas

1. ¿ Puede existir un triángulo equilátero rectángulo?
   ¿Y un triángulo rectángulo que sea isósceles?
   ¿ Existirá un triángulo obtusángulo isósceles?
   ¿ Podrá existir un triángulo acutángulo que sea también equilátero?

2. En un jardín tenemos tres árboles frutales, y queremos plantar otro que esté a la misma distancia de los otros tres. Haga un dibujo que represente esta situación, y encuentra con regla y compás, el punto donde plantar el cuarto árbol. ¿Cómo se llama este punto?

3. Dos de los lados de un triángulo miden 5 cm cada uno, y forman un ángulo de 90°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?

Ejercicios resueltos # 1

1. Un ángulo de x grado tiene la propiedad de que su complemento es igual a $\frac{1}{6}$ de su suplemento. ¿Cuánto mide x?

Solución

Si el ángulo es x^o

Su complemento es $90^o\text{-}x^o$

Su suplemento es $180^o\text{-}x^o$

Propiedad, complemento es igual a $\frac{1}{6}$ de l suplemento:

$$90^o\text{-}x^o = \frac{1}{6}\left(180^o - x^o\right)$$, se simplifican las unidades

$$6(90\text{-}x) = 180\text{-}x$$

$$540\text{-}6x = 180\text{-}x$$

$$540\text{-}180 = 6x\text{-}x$$

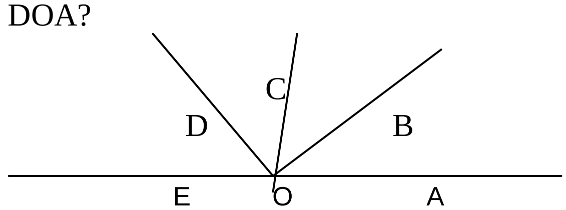
$$5x=360$$

$$x = \frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

El ángulo pedido mide 72º.

2. En la figura siguiente, $\overline{OC}$ es la bisectriz del ángulo BOD, y se sabe que el ángulo AOB mide 60º y que el ángulo DOE mide 80º. ¿Cuál es la medida del
   a) ángulo BOD?
   b) ángulo BOC?
   c) ángulo COE?
   d) ángulo DOA?



Solución

$\angle$DOC = $\angle$BOC , porque $\overline{OC}$ bisectriz de $\angle$DOB

a) $\angle$EOD + 2$\angle$DOC + $\angle$BOA = 180º , porque E, A, O son colineales

80º + 2$\angle$DOC + 60º =180º

2$\angle$DOC = 180º-140º

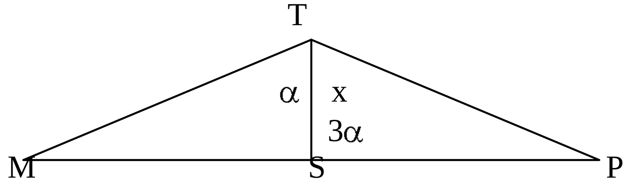
pero $2\angle DOC = \angle BOD = 40º$

b) $\angle BOC = 20º$, consecuencia de parte a)

c) $\angle$ COE = $\angle EOD + \angle DOC = 80º + 20º=100º$

d) $\angle DOA = \angle BOD + \angle BOA = 40º + 60º = 100º$

4. En el triángulo MPT, $\overline{TS} \perp \overline{MP}$. Si $\overline{MT} = \overline{TP}$. Determine la medida del ángulo x.



Solución

$\overline{TS} \perp \overline{MP}$., entonces $\angle MST = \angle TSP = 3\alpha = 90º$,

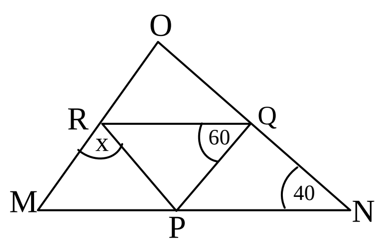
entonces $\alpha = 30º$

y $\angle TMS = \angle TPS$, porque $\overline{MT} = \overline{TP}$

luego $\angle TMS = 90º - \alpha = 60º$

finalmente $x = \alpha = 30º$

5. En la figura $\overline{MN} // \overline{RQ}$, $\overline{NO} // \overline{PR}$, $\overline{MO} // \overline{PQ}$, encuentre la medida de *x*



Solución

$\overline{NO} // \overline{PR}$, transversal $\overrightarrow{MO}$, entonces $x = \angle ROQ$ ángulos correspondientes.

$\overline{MO} // \overline{PQ}$, transversal $\overline{ON}$, entonces $x = \angle ROQ = \angle PQN$ ángulos correspondientes.

$\overline{MN} // \overline{RQ}$, transversal $\overline{PQ}$, entonces $\angle RQP = \angle QPN = 60$ son ángulos alternos internos.

Dado que $\angle QPN + 40 + \angle PQN = 180$

$$60 + 40 + \angle PQN = 180$$

Entonces $\angle PQN = 80$

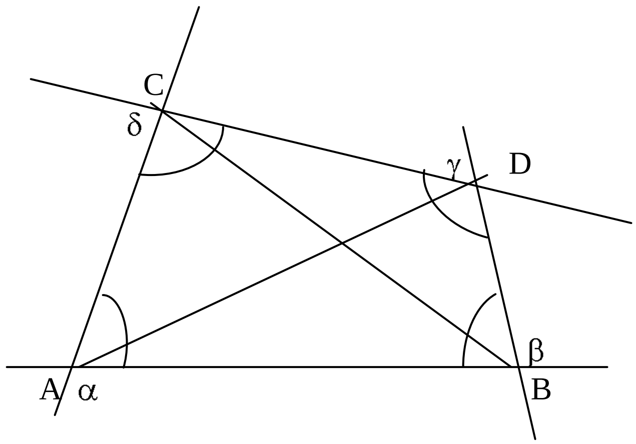
Por lo tanto ángulo x mide 80°

1.4 Cuadriláteros

Definición

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados.

Por lo tanto tiene cuatro ángulos interiores.



Notación

Vértices: A, B, C y D

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CA}$

Diagonales: $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

Ángulos interiores: $\angle$CAB, $\angle$ABD, $\angle$BDC y $\angle$DCA

Ángulos exteriores: α, β, γ y δ.

Propiedades de los cuadriláteros

Teorema

En todo cuadrilátero la suma de los ángulos interiores es 360°.

Represente gráficamente el teorema y justifíquelo.

Teorema

En todo cuadrilátero la suma de los ángulos exteriores es 360°.

Tarea

Clasificación de los cuadriláteros

Según el paralelismo existente entre sus lados opuestos, se clasifican en:

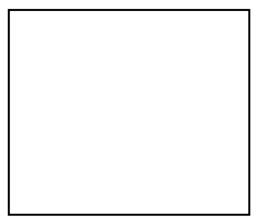
a) Paralelogramos, b) trapecios y c) trapezoides.

a) Paralelogramos

Son cuadriláteros que tienen dos pares de lados opuestos paralelos. Cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.

Cuadrado

Paralelogramo de ángulos interiores de 90° y cuatro lados congruentes.

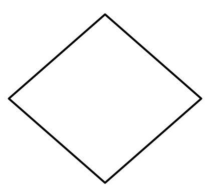


Rectángulo

Paralelogramo de ángulos interiores de 90° y sus lados adyacentes distintos.

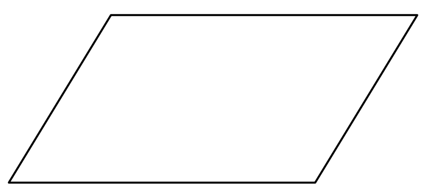
Rombo

Paralelogramo de cuatro lados congruentes.



Romboide

Paralelogramo de lados adyacentes distintos.



b) Trapecios

Cuadriláteros de solo dos lados paralelos, llamados **bases**.

Trapecio escaleno

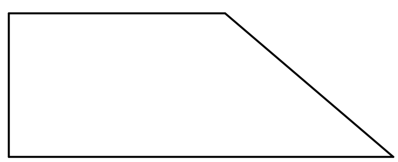
Sus lados no paralelos son distintos.

Trapecio isósceles

Sus lados no paralelos son con congruentes.

Trapecio rectángulo

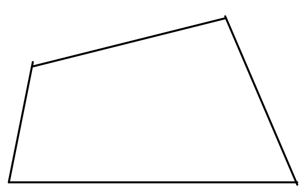
Un lado no paralelo es perpendicular a las bases.



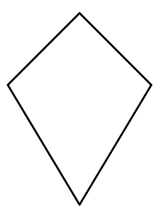
c) Trapezoide

Cuadriláteros que no tienen lados paralelos.

Trapezoide asimétrico



Trapezoide simétrico o **deltoide**.



Propiedades generales de los paralelogramos

En todos los paralelogramos

1. Los ángulos opuestos tienen igual medida.
2. Los ángulos consecutivos son suplementarios.
3. Los lados opuestos son de igual medida.
4. Las diagonales, se dimidian mutuamente.

En todos los cuadrados y rombos

1. Las diagonales son bisectrices de los ángulos interiores.
2. Las diagonales son perpendiculares.

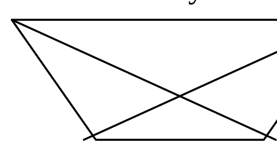
En todos los cuadrados y rectángulos

1. Las diagonales son de igual medida.

Propiedades de trapecios especiales

Trapecio isósceles

1. Un trapecio es isósceles si y solo si sus ángulos basales son iguales.



2. Las diagonales son de igual medida.

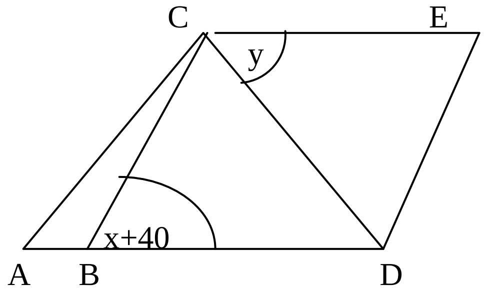
Definición

La mediana de un trapecio es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.

La longitud de la mediana es igual a la semi suma de las longitudes de las bases.

Ejercicios resueltos # 2

3. En la figura, 1ABC equilátero y BDEC un paralelogramo de lados iguales, determine el valor de: $x + y$



Solución

1ABC equilátero, entonces NABC=60°

Luego 60° + x + 40° = 180° , entonces x =80°

NBDC =NBCD , porque 3BDC isósceles y $\overline{BD} = \overline{BC}$

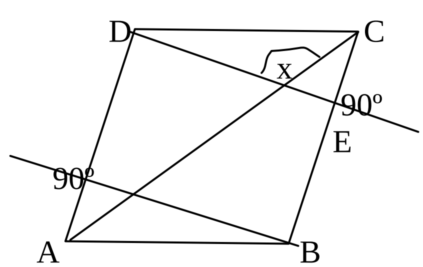
NDBC = 80° + 40° = 120°, luego NBDC = NBCD = 30°

NBCD = y = 30° , porque $\overline{CD}$ es bisectriz de NBCE

Por lo tanto x + y = 30° + 80° = 110°

El valor de x + y es 110°

4. En la figura siguiente, ABCD es un rombo, NBAD = 40º, encuentre la medida de x



Solución

Si NBAD = 40º, entonces NDAC = 20°, porque $\overline{AC}$ es bisectriz de NBAD

Y NACD = NDAC = 20°

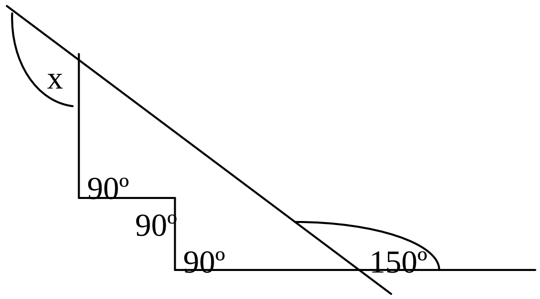
Sea $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ en 3DEC, NECD mide 40°, por ser ángulo opuesto a NBAD en un paralelogramo.

NEDC = 180°-NECD -NDEC = 180°- 40°- 90° = 50°

Ahora x = 180°-NACD-NEDC = 180°-20°-50° = 110°

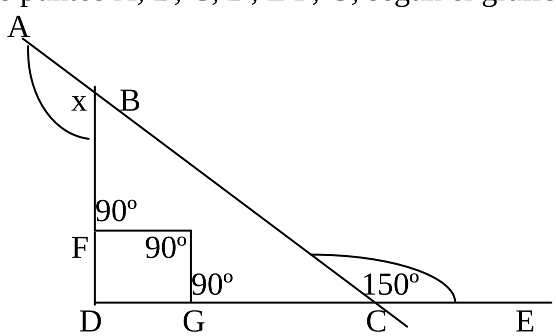
El ángulo x =110°

5. ¿Cuánto mide el ángulo x?



Solución

Se definen los puntos A, B, C, D, E F, G, según el gráfico



B, F, D puntos colineales y D, G, C puntos colineales

NDCB = 30º , por ser el suplemento de NECB = 150º

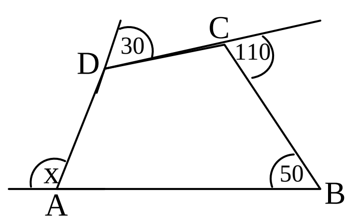
NBDC = 90°

Dado que x es ángulo exterior de 3BDC, entonces

X = 90° + 30° = 120°

El ángulo x mide 120°

4. En la figura ABCD es un trapezoide, determine la medida del ángulo x.



Solución

La suma de los ángulos exteriores de un paralelogramo es 360°

El ángulo exterior a NABC =50°, mide 130°, por lo tanto

30° + 110° + 130° + x = 360°

270° + x = 360°

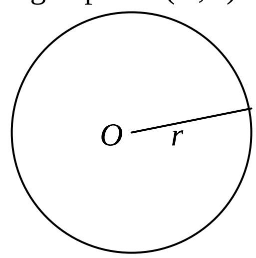
x = 90° , el ángulo x mide 90°

1.5 Circunferencia

Definición

Dado un punto O y una distancia r, la **circunferencia** de **centro** O y **radio** r, es el conjunto de puntos del plano y solo ellos, que están a la distancia r del punto O.

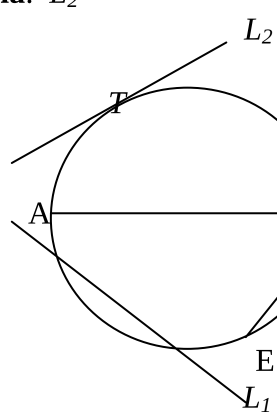
La circunferencia de centro O y radio r se designa por $C(O, r)$.



Elementos de la circunferencia

Además del centro y el radio, distinguen:

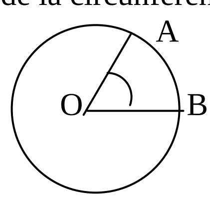
1. **Cuerda**: segmento que une dos puntos cualquiera de la circunferencia. $\overline{EF}$
2. **Diámetro** (d) : es la cuerda que pasa por el centro. Mide dos radios. $\overline{AB}$
3. **Arco**: es una porción de circunferencia comprendida entre dos puntos. Arco EF se designa EF
4. **Secante**: es la recta que intercepta ala circunferencia en dos puntos. L_1
5. **Tangente**: es la recta que intercepta a la circunferencia en un solo punto. Este punto se llama **punto de tangencia**. L_2



Ángulos en la circunferencia

1. Ángulo del centro (central)

Es el ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios

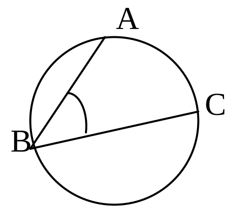


∡AOB , ángulo del centro

2. **Ángulo inscrito**

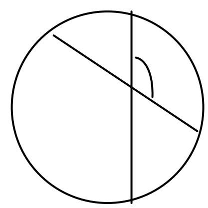
Es el ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados son cuerdas (secantes)

∡ABC , ángulo inscrito



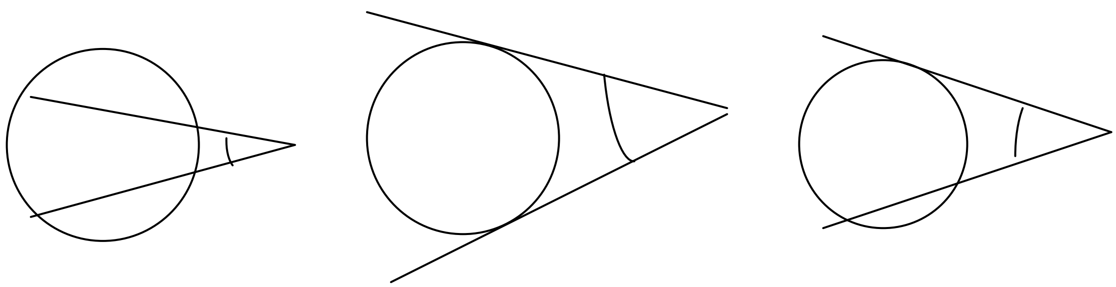
1. **Ángulo interior**

Es el ángulo formado por dos cuerdas



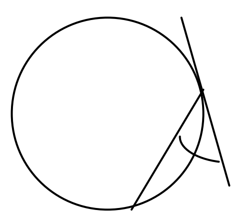
2. **Ángulo exterior**

Es el ángulo formado por dos secantes, o por dos tangentes, o por una secante y una tangente.



3. **Ángulo seminscrito**

Es el ángulo formado por una tangente y una cuerda.

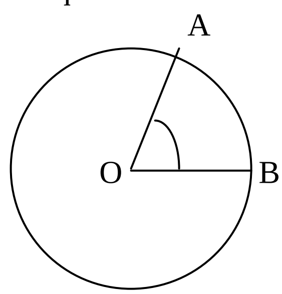


Propiedades Angulares

Medida angular del arco

Definición

La **medida de un arco** (de circunferencia) es la medida, expresada en grados sexagesimales, del ángulo del centro que subtiende dicho arco.

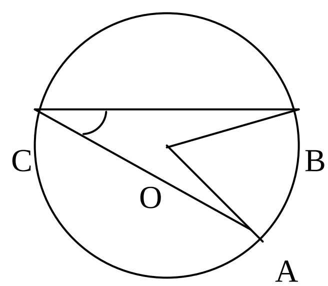


Medida angular de $\overset{\frown}{AB}$ = mNAOB

Medida del ángulo del centro

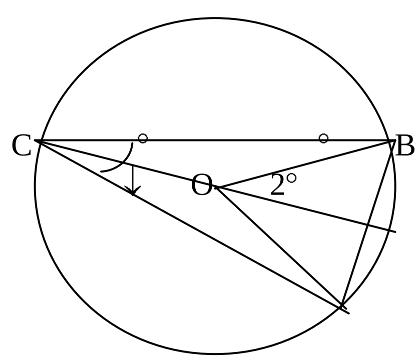
El ángulo del centro de una circunferencia tiene igual medida, en grados sexagesimales, que el arco correspondiente y recíprocamente.

Medida del ángulo inscrito



NBCA inscrito y subscribe el mismo arco que NBOA del centro, se observa que los ángulos no son de igual medida, ¿qué relación existe entre estos ángulos?

Se traza el diámetro que pasa por los puntos O y C, se determina el punto D



2↓ D
↓

A

Ángulo del centro NAOB = NBOD + NDOA

Ángulo inscrito NACB =1ACO + NBCO

Por otra parte, 1AOC y 1BOC son isósceles, $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB}$ (son radios)

Entonces NCAO =NACO = ↓ y

NOCB = NOBC = °

NBOD es ángulo exterior del 1BOC

por lo cual NBOD =2°

NDOA es ángulo exterior de 1AOC

por lo cual NDOA =2↓

finalmente

NAOB = NBOD + NDOA =2° + 2↓ =2 (↓ + °) =2 (NACO + NOBC)= 2NACB

NAOB =2NACB

o también

$$\text{NACB}=\frac{1}{2}\,\text{NAOB}$$

lo cual permite enunciar el siguiente

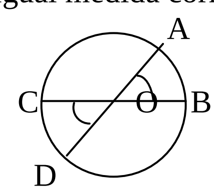
Teorema

El ángulo inscrito en una circunferencia tiene por medida la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

Corolarios

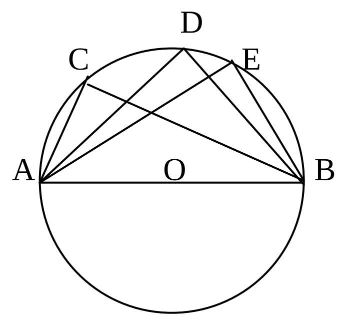
En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. A ángulos del centro de igual medida corresponden arcos de igual medida y recíprocamente.



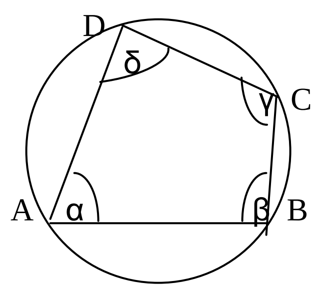
NAOB, NDOC ángulos del centro,
NAOB = NDOC , opuestos por el vértice, por lo tanto $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

2. A ángulos inscritos de igual medida corresponden arcos de igual y recíprocamente.
3. Todos los ángulos inscritos en un mismo arco, son de igual medida
4. Todo ángulo inscrito en una semi circunferencia es recto.



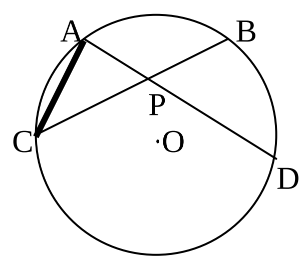
$\measuredangle$ABO ángulo extendido que determina $\overset{\frown}{AB}$ y los ángulos $\measuredangle$ACB, $\measuredangle$ADB, $\measuredangle$AEB subtienden el mismo arco, por lo tanto miden 90º.

5. Los ángulos opuesto de un cuadrilátero inscritos en una circunferencia son suplementarios.



$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180º$

Medida del ángulo interior



$$\measuredangle CPD = \frac{\angle COD + \angle AOB}{2}$$

$\measuredangle$CAD = $\overset{\frown}{CD}$/2 , $\measuredangle$ACB = $\overset{\frown}{AB}$/2 , $\measuredangle$CPD exterior 1ACP por lo tanto

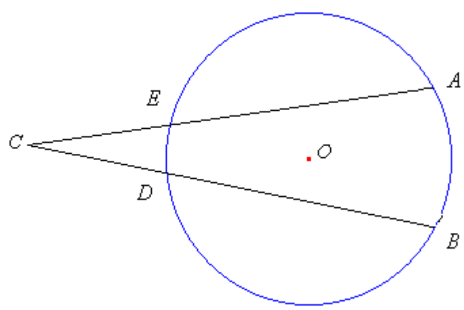
$\measuredangle$CPD = ($\overset{\frown}{CD}$ + $\overset{\frown}{AB}$)/2

Teorema

La medida de un ángulo interior de una circunferencia es igual a la semi suma de los arcos que intersecta en la circunferencia dicho ángulo.

Medida del ángulo exterior

La medida de un ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos centrales comprendidos entre sus lados.

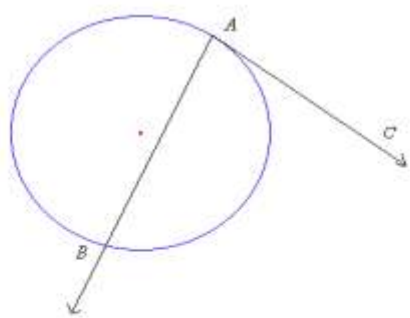


$$\angle ACB = \frac{\angle AOB - \angle EOD}{2}$$

Escriba el ángulo exterior usando arcos.

Medida del ángulo seminscrito

La medida del ángulo seminscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre los lados del ángulo.



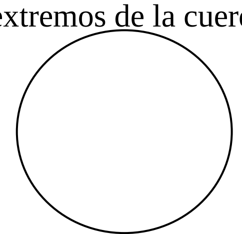
Escriba la expresión matemática de este enunciado.

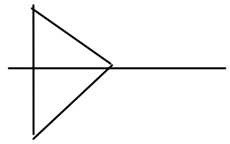
Propiedades de los elementos de la circunferencia

Teorema

Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide el ángulo y el arco en dos partes congruentes.

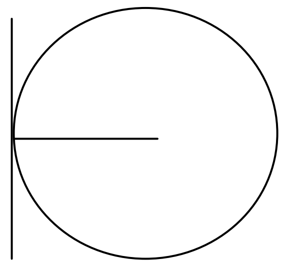
Todo diámetro perpendicular a una cuerda es simetral a esta y bisectriz del ángulo del centro comprendido entre los extremos de la cuerda.





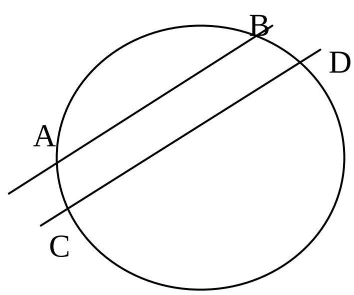
Teorema

La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.



Teorema

Dos rectas paralelas intersectan en una circunferencia arcos congruentes.



$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{BD}$$

Teorema

En una circunferencia, cuerdas congruentes equidistan del Centro.

Teorema

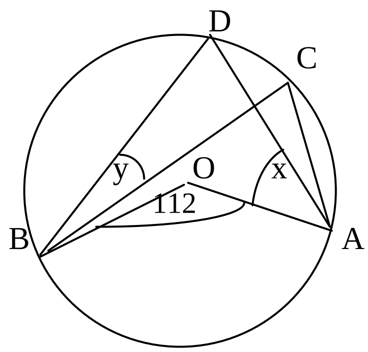
Dos cuerdas congruentes, equidistan del centro.

Teorema

La simetral de toda cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

Ejercicios resueltos # 3

1. Determine los valores de x e y según el siguiente diagrama, sabiendo que $\overline{BC}$ es bisectriz de NDBO y que NDBO = NOAD



Solución

NBDA y NBCA subtienden el mismo arco que el ángulo central NBOA,

Por lo tanto NBDA =NBCA =56°

Ángulo y = NCBO , $\overline{BC}$ bisectriz de NDBO

NOAD = x =2y

Consideremos los triángulos 1BOD , 1AOD los dos son isósceles de bases $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ respectivamente, entonces

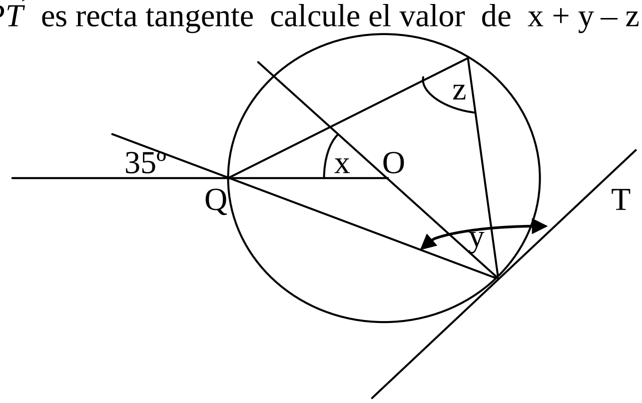
NDBO = NODB = 2y y NOAD = NADO = x = 2y,

pero NODB + NADO = NBDA = 56º = 2y + 2y

4y =56º $\Rightarrow$ y = 14º

por lo tanto y = 14º , x = 28º.

2. En la figura $\overleftrightarrow{PT}$ es recta tangente calcule el valor de x + y – z



P

Solución

NOQP = 35° por ser opuesto por el vértice

3QPO isósceles base $\overline{PQ}$, entonces NOQP = 35° = NQPO

PT recta tangente, $\overrightarrow{OP}$ diámetro, luego NOPT = 90°

Entonces $y = 90° + 35° = 125°$

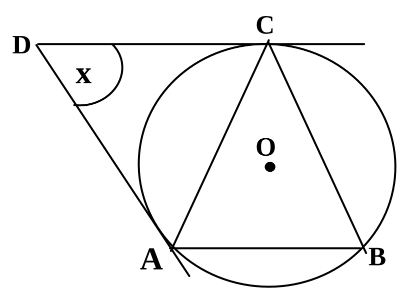
Ángulo x es ángulo exterior de 3QOP, entonces $x = 70°$

E l ángulo z es ángulo inscrito que subtiende el mismo arco que NQOP = 110°

Por lo cual $z = 55°$

Entonces $x + y – z = 70° + 125° - 55° = 140°$

3. En la figura, 1ABC es equilátero, rectas DA y DC son tangentes, determine el valor de x



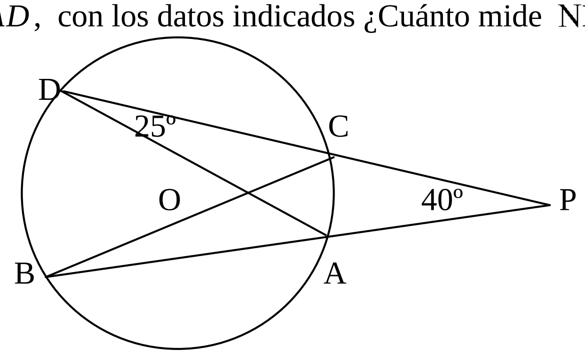
Solución

1ABC equilátero, cada lado determine un ángulo del centro de 120º ,

el arco AC mide 120º, los ángulos semi inscritos NDCA y NDAC miden cada uno 60º,

por lo tanto 1ADC es equilátero y ángulo x mide 60º.

4. En la figura las Rectas PB y PD son secantes a la circunferencia de centreo O. Si se trazan las cuerdas $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, con los datos indicados ¿Cuánto mide NBCP?



Solución

NABC subtiende el mismo arco que NADC , por lo tanto NABC =25º, entonces

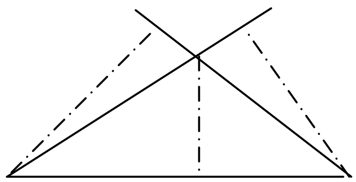
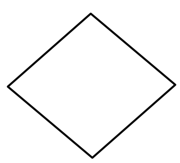
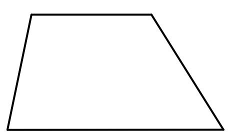
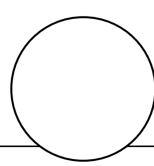
NBCP = 180º - 25º - 40º = 115º.

La medida de es NBCP = 115º

1.6 Perímetros y áreas

Perímetro: es la medida del contorno de una figura.
Superficie (plana): es el conjunto de puntos del plano encerrados por una figura geométrica plana.
Área: es la medida de una superficie.

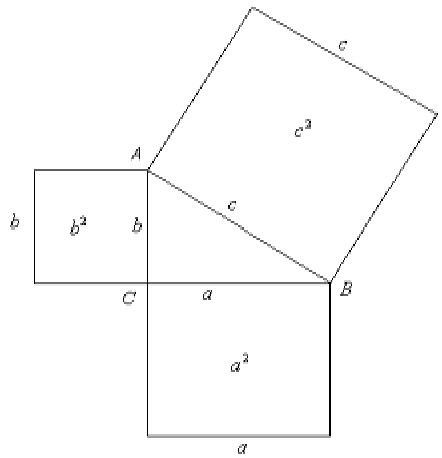
Represente los elementos de las figuras en los dibujos respectivos

Figura y sus elementos	Representación	Perímetro	Área
Cuadrado Lado: a		4a	a^2
Triángulo Lados: a, b, c Altura: h_a, h_b, h_c	 c	a + b + c	$\frac{ah_a}{2}$
Rectángulo Lados: a, b		2a + 2b	ab
Paralelogramo Lados: a, b Altura: h		2a + 2b	ah
Rombo Lado: a Diagonales: e, f		4a	$\frac{ef}{2}$
Trapecio Bases: a, c Lados: b, d Altura: h		a + b + c + d	$\frac{(a+c)h}{2}$
Círculo Radio: r		2πr	πr^2

Tarea: Averiguar las fórmulas para un polígono regular de n lados.

Teorema de Pitágoras

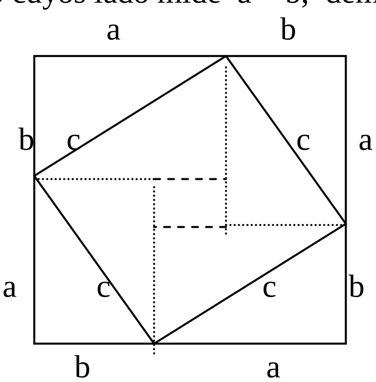
Un triángulo es rectángulo si y solo si el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



3ABC rectángulo en C si y solo si $c^2 = a^2 + b^2$

Problema

Con el cuadrado cuyos lado mide a + b, demuestre el Teorema de Pitágoras



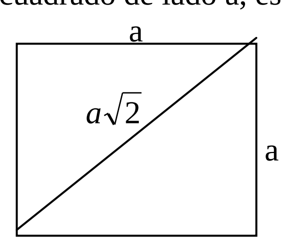
$$4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = c^2$$

$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$

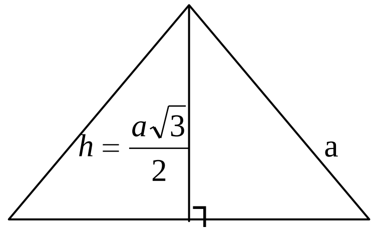
$c^2 = a^2 + b^2$

Corolarios

1. La diagonal de un cuadrado de lado a, es $a\sqrt{2}$.



2 La altura de un triángulo equilátero de lado a es $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

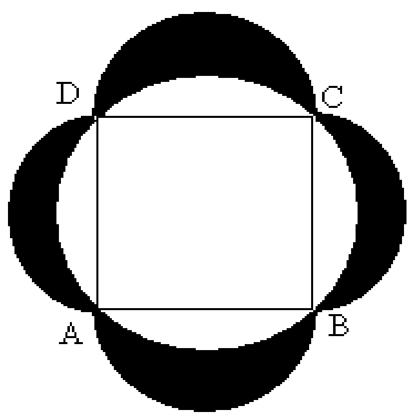


Ejercicios

1. Calcular el área de un rectángulo 12 cm de largo y diagonal de 13 c.
2. Si el lado de un cuadrado aumenta al doble, ¿qué pasa con su área?
3. Se aumenta la base de un triángulo al doble y al altura permanece constante, ¿qué sucede con el área?
4. Si el perímetro de un cuadrado se duplica, entonces su área:
5. Si el radio de una circunferencia se duplica, ¿qué pasa con su perímetro?
6. A la circunferencia de la figura se le inscribió y circunscribió un cuadrado. Si se sabe que el área del cuadrado inscrito es 4 cm^2, ¿qué área tiene el cuadrado mayor.
7. Una escalera de 6 pies de longitud se coloca contra una pared con la base a 2 pies de la pared ¿A qué altura del suelo está la parte más alta de la escalera?

Ejercicios resueltos # 4

1. Sobre los lados del cuadrado ABCD de lado 4 cm de la fig, se han construido cuatro semicircunferencias. ¿ Cuál es el área sombreada?



Solución

Cada semicircunferencia tiene diámetro 4, es decir radio 2 y por lo tanto tiene área

$\dfrac{2^2\pi}{2} = 2\pi$ cm^2

El área de las cuatro semicircunferencias es 8π cm^2

A este valor hay que restar: el área comprendida entre la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y el cuadrado ABCD de lado 4

Área del cuadrado ABCD: 16 cm^2

La circunferencia tiene diámetro $\overline{AC}$, que es hipotenusa de 3ABC, isósceles, rectángulo en B,

$\overline{AB} = \overline{BC} = 4$,

según Teorema de Pitágoras $\overline{AC}^2 = 4^2 + 4^2 = 32 cm^2 \Rightarrow \overline{AC} = 4\sqrt{2}\, cm$

luego el radio de la circunferencia es $2\sqrt{2}\, cm$

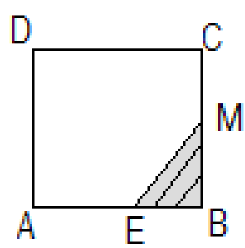
El área de la circunferencia es $\left(2\sqrt{2}\right)^2 \pi = 8\pi\, cm^2$

El área comprendida entre la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y el cuadrado ABCD de lado 4 es:

$8\pi\, cm^2 - 16\, cm^2$

El área pedida es 8π cm^2 – ($8\pi\, cm^2 - 16\, cm^2$) = 16 cm^2

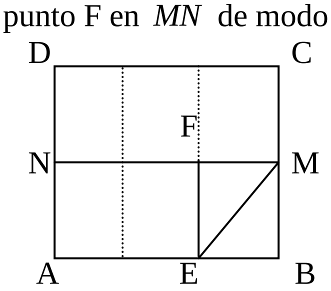
2. En la figura. ABCD: cuadrado. $\overline{AE} = 2\overline{EB}$; $\overline{BM} = \overline{MC}$. Si el área del Δ EBM es 5 cm^2 . ¿Cuál es el área de la zona NO sombreada del cuadrado?



Solución

Dado que $\overline{BM} = \overline{MC}$, sea N el punto media de $\overline{AD}$, forma dos rectángulos congruentes, ABMN y NMCD.

Se determina el punto F en $\overline{MN}$ de modo que $\overline{EF} // \overline{BM}$,



El rectángulo EBMF tiene el doble de área que 3EBM = 5 cm^2

Área de rectángulo EBMF es 10 cm^2

El rectángulo AEFN tiene lados $\overline{EF} = \overline{BM}$, $\overline{AE} = 2\overline{EB}$

Área de rectángulo AEFN es 20 cm^2

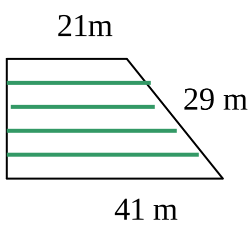
El área del rectángulo NMCD es 30 cm^2

El área del rectángulo ABCD es 60 cm^2

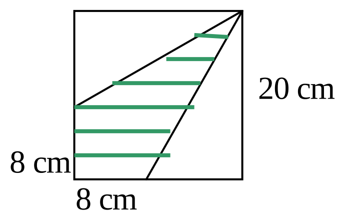
El área de la región No achurada es 60 cm^2-5cm^2 =55 cm^2

3. Calcule el área de las figuras achuradas

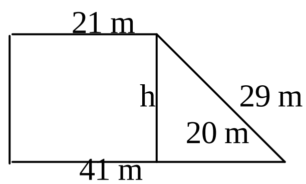
a)



b)



a) Solución



La altura del trapecio es h, aplicando Teorema de Pitágoras,

$$h = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{841 - 400} = \sqrt{441} = 21$$

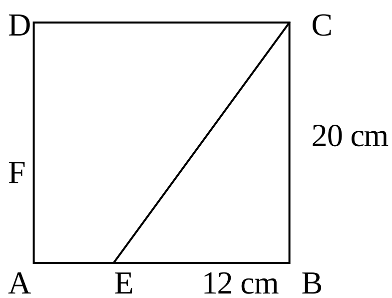
El área del trapecio es la semi suma de las base por la altura:

$$\frac{(41+21)21}{2} = \frac{62*21}{2} = 31*21 = 651cm^2$$

(También puede ser el área del cuadrado más el área del triángulo)

b) Solución

La región pedida es simétrica respecto de la diagonal del cuadrado ABCD ,



Sean E y F puntos tales que $\overline{AE} = 8\,cm$ y $\overline{AF} = 8\,cm$

3EBC rectángulo en B de área es $\dfrac{20*12}{2} = 120\ \text{cm}^2$

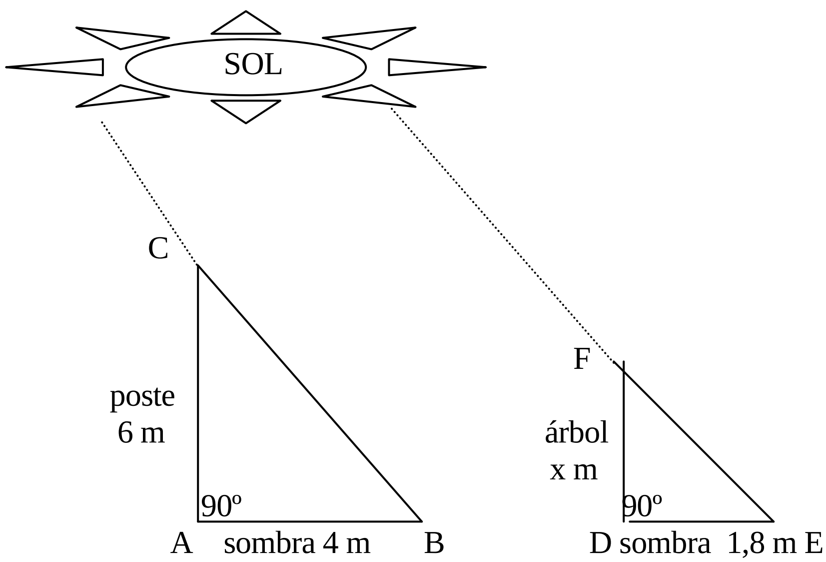
3FCD rectángulo en D de área 120 cm^2

Área del cuadrado ABCD es 20*20 = 400 cm^2

Área pedida es 400 cm^2 – 240 cm^2 = 160 cm^2

4. Un poste vertical de 6 metros de alto, proyecta una sombra de 4 metros. ¿ Cuál es la altura de un árbol que a la misma hora, proyecta una sombra de 1,8 metros ?

Solución



1ABC ~1DEF, porque

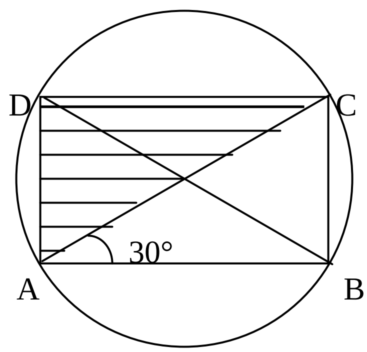
NCAB =NDFE = 90º, NACD = NDFE, entonces

$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$ reemplazando los valores

$\dfrac{6}{4} = \dfrac{x}{1{,}8} \Rightarrow x = \dfrac{6*1{,}8}{4} \Rightarrow x = 2{,}7$

por lo tanto la altura del árbol es 2,7 m

5. ABCD rectángulo NBAC = 30°. Si $\widehat{AC}$ es una semicircunferencia de radio 3cm, Calcule el área de la superficie achurada.



$\overline{AC} = 6cm$, sea M = $\overline{AC} \cap \overline{BD}$

NDAM = 60° es el complemento de NBAC = 30°

3AMD es equilátero de lado 3 cm

Luego área del 3AMD es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Área de la semicircunferencia es: $\frac{9\pi}{2}$

Área del sector circular, de arco $\widehat{AD}$ es $\frac{1}{3} * \frac{9\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Rectángulo de lados 3 y $\sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Área 3ACD es: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

1.7 Proporcionalidad y semejanza

Definición

Se llama **razón entre dos segmentos** $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ a la razón (cuociente) entre las medidas de dichos segmentos expresadas en las mismas unidades de longitud.

a) Si la razón entre los segmentos es un número racional, los segmentos se dicen **conmensurables**.
b) Si la razón entre los segmentos es un número irracional, los segmentos se dicen **inconmensurables**.

Ejemplos

a) La razón entre el lado de un cuadrado y su perímetro.

Consideremos un cuadrado de lado a, su perímetro es 4a, la razón es $\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$

b) La razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.

Consideremos una circunferencia de radio r, su perímetro (longitud) es 2πr, la razón es $\frac{2\pi r}{2r}=\pi$.

c) La razón entre la altura de un triángulo equilátero y su lado.

Consideremos un triángulo equilátero de lado a, su altura es $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, la razón es $\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Proporciones

Definición

Se llama **proporción** a la igualdad de dos razones.

Si las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ es una proporción, y se dice que las cantidades a, b, c y d son **proporcionales**.

La proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, también se escribe $a:b=c:d$. En ambos casos se lee:” a es a b como c es a d”. Las cantidades a y d, se llaman **extremos** y las cantidades b y c son los **medios**.

Teorema

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow bc = ad \quad , \quad \text{con} \quad b \neq 0 \quad \text{y} \quad d \neq 0$$

Semejanza

Definición

Dos polígono de igual número de lados son **semejantes s**i y solo si sus ángulos correspondientes son de igual medida y sus lados correspondientes son proporcionales.

Ejemplos:

1. Todos los cuadrados son semejantes (ángulos iguales y lados proporcionales).
2. Todas las circunferencias son semejantes.

Definición de escala*:* el concepto de escala es equivalente al de razón de semejanza, es la razón métrica entre un plano o maqueta y aquello a lo que representa.
La notación usual en los mapas es la siguiente 1:1000 que significa que 1cm en el mapa es en realidad 1000cm = 10m. Es equivalente a una razón de semejanza k = 1000.

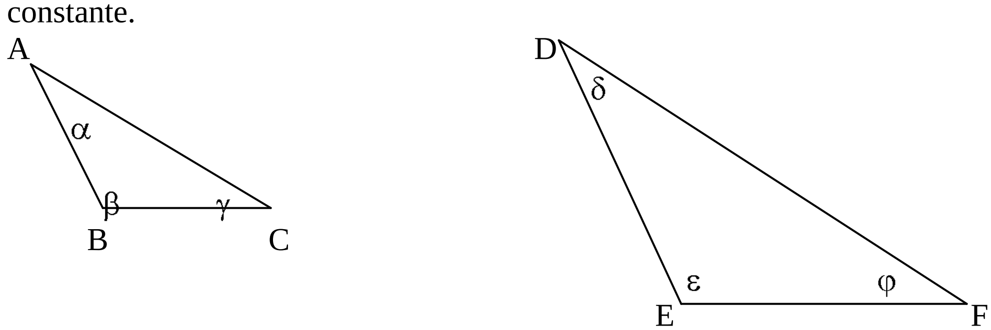
Semejanza de triángulos

Definición

Dos triángulos son semejantes si y solo si existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices, de modo que:

a) sus ángulos correspondientes, son de igual medida.

b) La razón entre las longitudes de los pares de lados correspondientes es constante.

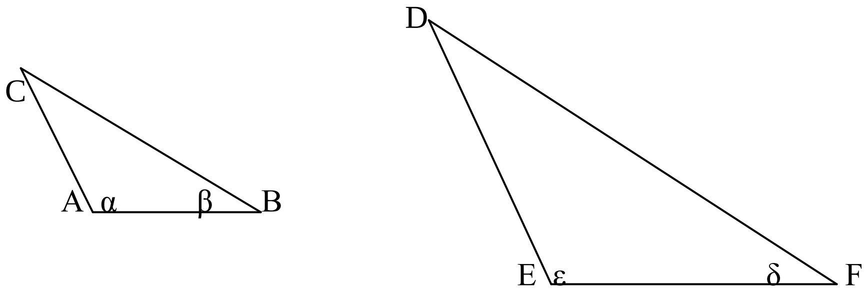


1ABC ~ 1DEF $\Leftrightarrow$ $\alpha = \delta$, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = \varphi$ y $\frac{\overline{AB}}{DE} = \frac{\overline{BC}}{EF} = \frac{\overline{CA}}{FD}$

Criterios de semejanza de triángulos

Teorema (AA)

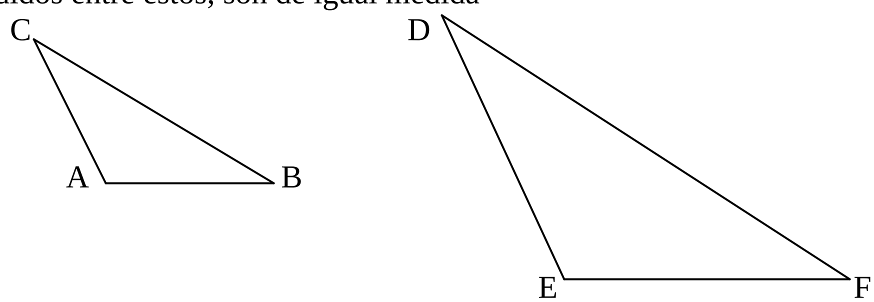
Si dos triángulos tienen un par de ángulos iguales, entonces son semejantes.



3ABC, 3EDF $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \delta$ $\Rightarrow$ 3ABC ~ 3EDF

Teorema (LAL)

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos, son de igual medida



3ABC, 3EDF, $\frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$ y NCAB = NDEF $\Rightarrow$ 3ABC ~ 3EDF

Teorema (LLL)

Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.

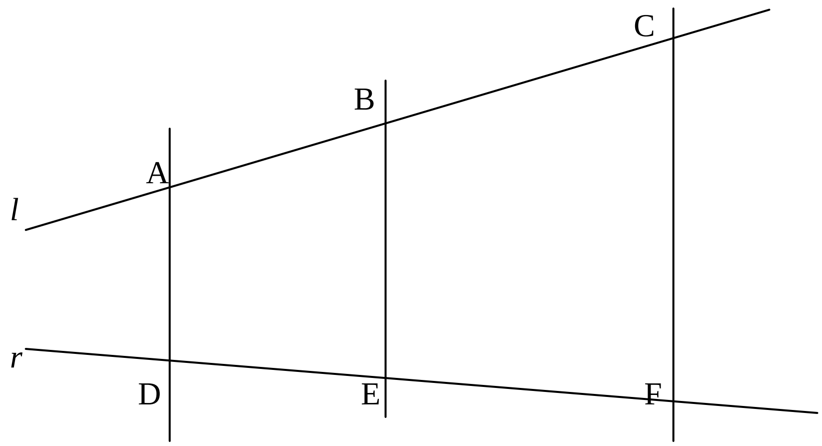
3ABC, 3EDF, $\frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FE}}$ $\Rightarrow$ 3ABC ~ 3EDF

Si dos triángulos son semejantes, entonces sus perímetros y las medidas de sus elementos secundarios son proporcionales.

Ejercicio. La razón entre sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

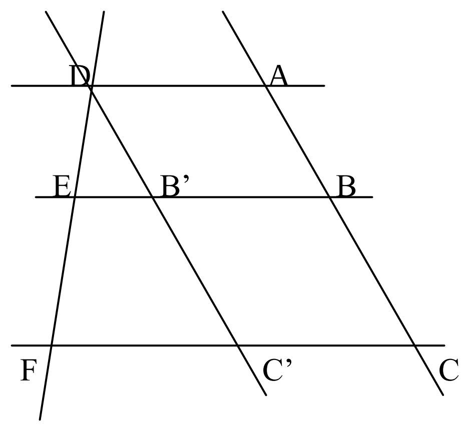
Teorema de Thales

Si dos rectas se cortan por tres o más rectas paralelas, los segmentos determinados en una rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra recta.



Dos rectas l y r cortadas por las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{CF}$, entonces $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$

Demostración



Por D se traza una paralela a la recta r , determinándose los puntos B', C' , entonces

$\overline{DB'} = \overline{AB}$, $\overline{B'C'} = \overline{BC}$, NEB'D = NEBA, NFC'B' = NFCB

En 3FC'D y 3EB'D ,

se tiene NDEB' = NDFC' y NEB'D = NFC'D por ser correspondiente entre paralelas

y Teorema AA 3FC'D ~ 3EB'D

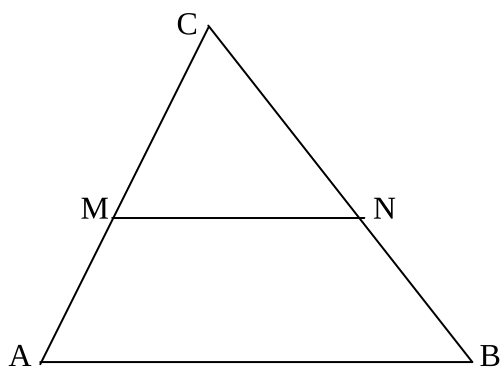
por lo tanto

1) $\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{D{\acute{}}C'}}{\overline{DB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

2) $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

Teorema particular de Thales

Toda paralela a un lado de un triángulo y que intercepte a los otros dos, determina en ellos segmentos proporcionales.

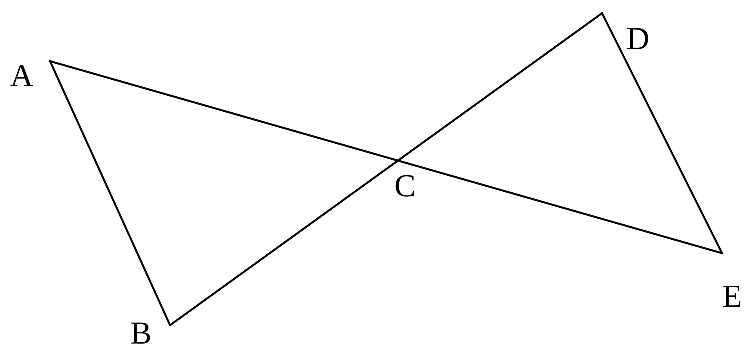


En 3ABC, $\overline{MN} // \overline{AB}$, entonces

1) $\frac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}$

2) $\frac{\overline{CA}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{NB}}$

3) $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$



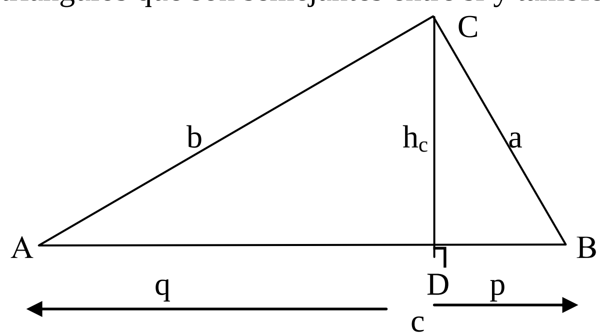
$\overline{AB} // \overline{DE}$, NBAC = NDEC, NABC = NEDC son alternos internos entre paralelas NACB =NECD son opuestos por el vértice, por lo tanto 3ABC ~ 3EDC, entonces

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}}$$

Proporciones en el triángulo rectángulo

Teorema

En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos triángulos que son semejantes entre sí y también semejantes al triángulo original.



3ABC rectángulo en C , se tiene que $\overline{CD} \perp \overline{AB} = h_c$, $\overline{AD} = q$ y $\overline{DB} = p$, entonces

3ABC ~ 3ACD ~ 3CBD

Teorema de Euclides

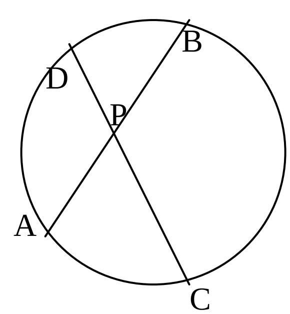
En todo triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$\frac{h_c}{p} = \frac{q}{h_c} \Leftrightarrow h_c^2 = pq$$

Proporciones en la circunferencia

Teorema de las cuerdas

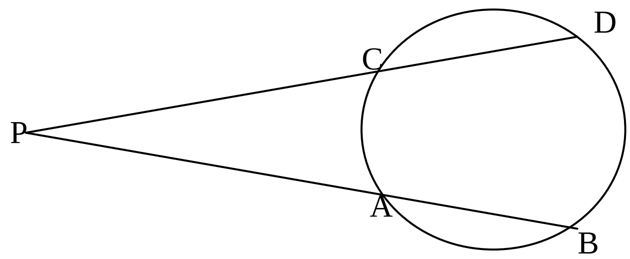
Si dos cuerdas se cortan en el interior de la circunferencia, el producto de los segmentos determinados en cada una de ellas, por el punto de intersección, es constante.



$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$

Teorema de las secantes

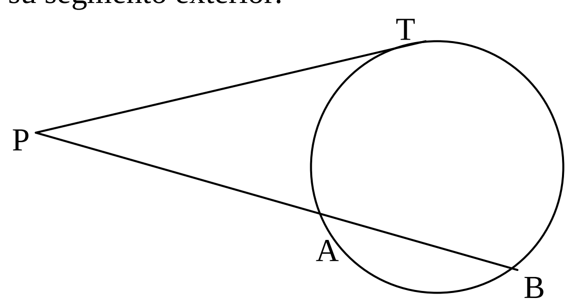
Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes a ella, el producto de cada secante entera, por su segmento exterior es constante.



$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$

Teorema de la tangente y de la secante

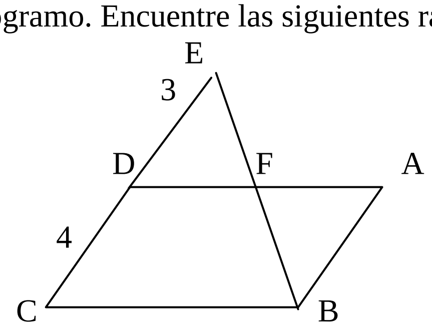
Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante entera y su segmento exterior.



$$\overline{PT}^{2}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$$

Ejercicios

1. ABCD es un paralelogramo. Encuentre las siguientes razones



a) área(3DEF) : área(3CEB) ; b) área (3ABF) : área(3DEF)

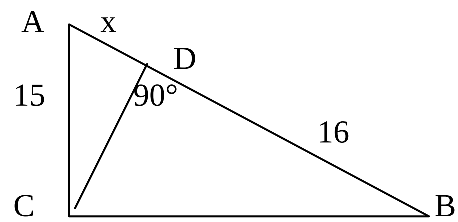
2. En el mismo instante en que una persona de 1,8 m proyecta una sombra de 2,4 m de largo, en una plataforma de lanzamiento cercana, un cohete proyecta una sombra de 48 m de largo. Determine la altura del cohete,

3. Una persona camina 7 Km hacia al norte, después 3 Km hacia al este y, luego, 3 Km hacia al sur. ¿A qué distancia está del punto de partida?

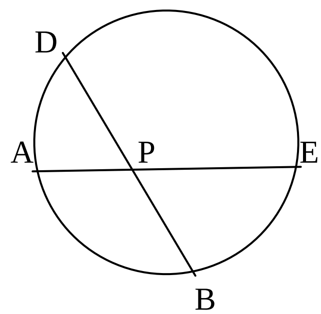
4. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 51 y la longitud de un cateto es 24. Calcule el área del triángulo.

5. 3ABC rectángulo en C , b=12 cm, a=5 cm, c=13 cm, calcule h_c.

6. Según la figura, determine el valor de x



7. En la figura adjunta, $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ son cuerdas que se cortan en P tales que $\overline{AP} = 3cm$, $\overline{PE} = 4cm$ y $\overline{DP} : \overline{PB} = 3:1$, calcule $\overline{DB}$.



1.8

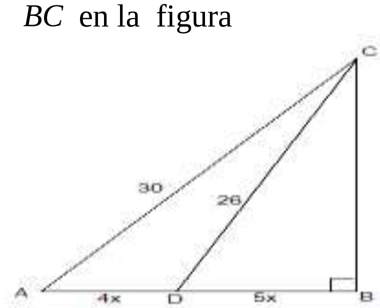
Universidad de Tarapacá

Ingeniería

Introducción al Cálculo Resolución de Prueba # 1

29 de Abril de 2009

1. ¿Cuál es la longitud de $\overline{BC}$ en la figura



Solución

1ABC, 1DBC rectángulos en B, a ambos se aplica teorema de Pitágoras, respectivamente.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$

reemplazando los valores, $\overline{BC}^2 = 30^2 - (9x)^2 = 900 - 81x^2$

$$\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DB}^2$$

reemplazando los valores, $\overline{BC}^2 = 26^2 - (5x)^2 = 676 - 25x^2$

igualando los valores para $\overline{BC}^2$

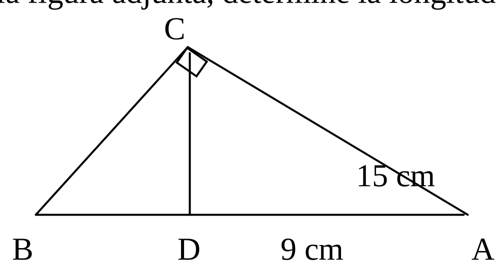
$900 - 81x^2 = 676 – 25x^2 \Rightarrow 56x^2 = 224 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

$$\overline{BC}^2 = 676 - 25x^2 = 676 - 100 = 576$$

$$\overline{BC} = \sqrt{576} = 24$$

luego $\overline{BC} = 24$

2. De acuerdo a la figura adjunta, determine la longitud de $\overline{DB}$



Solución

Se calcula la longitud de $\overline{CD}$ en el 1DAC rectángulo en D, por teorema de Pitágoras

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$$

$\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa en el 1BAC rectángulo en C, por teorema de Euclides

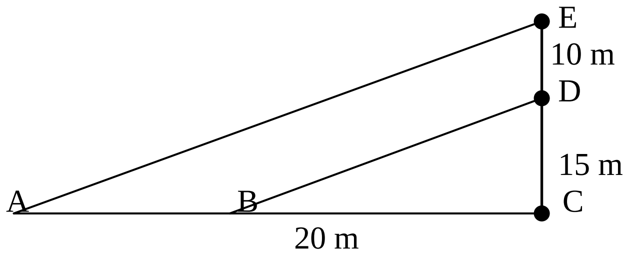
$$\overline{CD}^2 = \overline{BD} * \overline{DA} \Rightarrow 144 = \overline{BD} * 9 \Rightarrow \overline{BD} = 16$$

luego $\overline{DB} = 16\ cm$

3. Una torre de dos piso proyecta una sombra de 20 metros; si el primer piso tiene una altura de 15 m y el segundo piso una altura de 10 m. ¿Cuánto mide la sombra proyectada por el segundo piso?

Solución

Haciendo un diagrama del problema



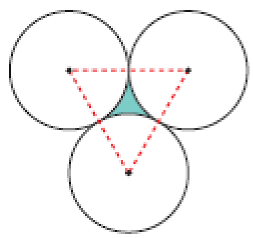
Sean $\overline{AC}$ la sombra, $\overline{AC} = 20\,m$, $\overline{CD} = 15\,m$ el primer piso, $\overline{DE} = 10\,m$ el segundo piso, $\overline{AB} = x$ sombra del segundo piso.

$\overline{AE} // \overline{BD}$ son las líneas que producen las sombras, y se cumple el Teorema de Thales

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} \quad \text{reemplazando} \quad \frac{20}{x} = \frac{25}{10} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20*10}{25} = 8$$

por lo tanto la sombra proyectada por el segundo piso es 8 m.

4. Calcule el área del triángulo curvilíneo comprendido entre tres circunferencias tangentes y cuyo radio mide 5 cm.



Solución

Sea A, B, y C los centros de las circunferencias, entonces

1ABC es equilátero de lado 10 cm y su altura es $\frac{10}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

área de 1ABC es $\frac{10*5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\,cm^2$

a este número hay que restar, el triple del área del sector circular de radio 5 y ángulo central de 60º.

El área de una de estas circunferencias es 25π cm^2 . El ángulo central del sector circular es 60º, es decir $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$, entonces el área del sector circular es $\frac{25\pi}{6}$ cm^2 El área pedida es:

$$25\sqrt{3} - 3\frac{25\pi}{6} = 25\sqrt{3} - 25\frac{\pi}{2} = 25\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) cm^2 = 4{,}05 \text{ cm}^2.$$

CAPITULO 2

TRIGONOMETRÍA

Es el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Esto se realiza a través de las llamadas razones trigonométricas para los ángulos.

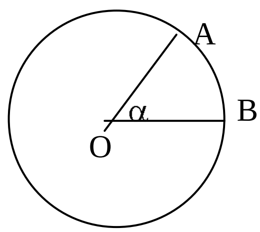
Trigonometría es una palabra de origen griego, "trígono" que significa triángulo y "metron", medida, es decir, la trigonometría corresponde a "medida de triángulos".

2.1 Medición de ángulos

a) Sistema sexagesimal, ya conocido.
b) El radián

El radián

Se define **radián**, como el arco de circunferencia que mide lo mismo que el radio.



El ángulo α es un radián, porque la longitud del $\overleftrightarrow{AB} = \overline{OA}$

Si un ángulo central subtiende un arco de circunferencia que es la mitad de la longitud del radio de la respectiva circunferencia, entonces el ángulo mide 0,5 (radianes) o $\frac{1}{2}$, o medio radián. **El radián es un número real.**

Debido a la proporcionalidad de la circunferencia y el radio, el ángulo medido en radianes es independiente de la circunferencia elegida, es decir, el radián está bien definido.

Equivalencia entre las medidas sexagesimales y radianes

360º corresponde a 2π radianes, o bien: 180º corresponde a π radianes

$$\frac{360^{o}}{2\pi} = \frac{medida\,en\,grados}{medida\,en\,radianes}$$

o bien

$$\frac{180^{o}}{\pi} = \frac{medida\,en\,grados}{medida\,en\,radianes}$$

esta proporción permite relacionar grados con radianes

Ejercicios

1. Exprese en radianes los ángulos:

a) 45°, b) 30°, c) 105°, d) 22° 30', e) 18°

2. Exprese en grados sexagesimales la medida de los siguientes ángulos (en radianes)

a) 3 /4, b) 7 /45, c) 5 /27, d) 5 /24, e) 0,3927, f) 1

3. En una circunferencia de 16 m de radio, un arco mide 2 m. Hallar su ángulo central correspondiente en grados sexagesimales y en radianes.

4. ¿Cuántos radianes mide el ángulo central de un decágono regular? ¿Y de un pentágono?

5. Exprese en radianes los siguientes ángulos:
a) 30°, b) 72°, c) 90°, d) 127°, e) 200°, f) 300°
Exprese el resultado en función de π y luego en forma decimal.

6. Pase a grados los siguientes ángulos:

a) 2 rad, b) 0,83 rad, c) $\frac{\pi}{5}$ rad, d) $\frac{5\pi}{6}$ rad, e) 3,5 rad, f) π rad

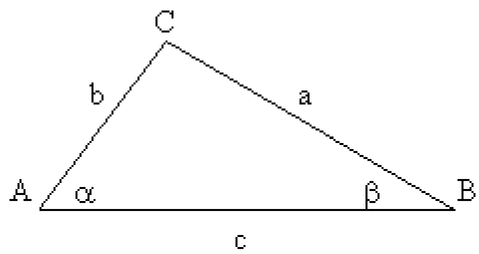
7. Complete la siguiente tabla de cada uno de los ángulos.

Grados	0°	30°		60°	90°		135°	150°		210°	225°		270°
Radianes			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2\pi}{3}$			π			$\frac{4\pi}{3}$	

Grados			330°	360°
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$		

2.2 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Consideremos el triángulo ABC, rectángulo en C, de la figura y trabajemos con los ángulos α y β de él.



seno de $\alpha = \text{sen}\alpha = \dfrac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$

coseno de $\alpha = \cos\alpha = \dfrac{cateto\,adyacente}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$

tangente de $\alpha = \tan\alpha = \dfrac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente} = \dfrac{a}{b}$

cotangente de $\alpha = \cot\alpha = \dfrac{cateto\,adyacente}{cateto\,opuesto} = \dfrac{b}{a}$

secante de $\alpha = \sec\alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\,adyacente} = \dfrac{c}{b}$

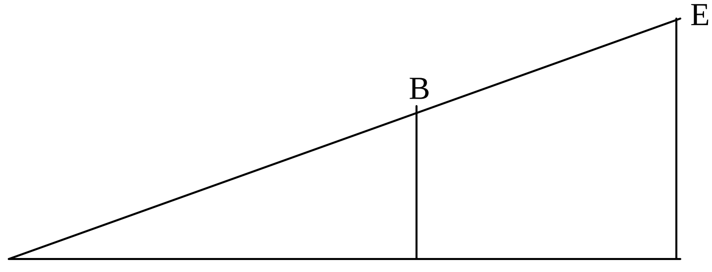
cosecante de $\alpha = \csc\alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\,opuesto} = \dfrac{c}{a}$

Del mismo modo, para el ángulo β se obtiene las razones trigonométricas siguientes:

seno de $\beta = \text{sen}\,\beta = \dfrac{b}{c}$ coseno de $\beta = \cos\beta = \dfrac{a}{c}$ tangente de $\beta = \tan\beta = \dfrac{b}{a}$

cotangente de $\beta = \cot\beta = \dfrac{a}{b}$ secante de $\beta = \sec\beta = \dfrac{c}{a}$ cosecante de $\beta = \csc\beta = \dfrac{c}{b}$

¿Dependen los valores de las razones trigonométricas definidas de las medidas del triángulo?



α

A C D

Observando las definiciones se puede destacar que:

1. a) $\tan\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, b) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, c) $\csc\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$, e) $\cot an\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

2. a) sen α = cos β b) cos α = sen β c) tan α = cot β

   d) cot α = tg β e) sec α = cosec β f) cosec α = sec β

3. Y dado que $\alpha + \beta = 90º$,1 ABC rectángulo en C,

Entonces $\beta = 90º - \alpha$, que al reemplazarlo en las igualdades anteriores se obtiene:

a) sen α = cos $(90º - \alpha)$ b) cos α = sen $(90º - \alpha)$ c) tg α = cot $(90º - \alpha)$

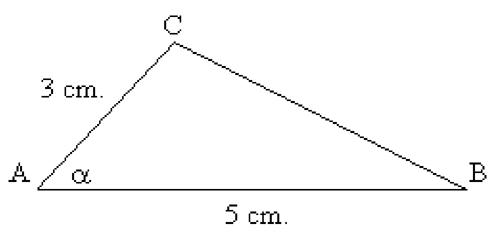
d) cot α = tg $(90º - \alpha)$ e) sec α = cosec $(90º - \alpha)$ f) cosec α = sec $(90º - \alpha)$

4. Las razones trigonométricas seno y coseno son números menores que 1 y mayores que cero, porque en un triángulo rectángulo los catetos son menores que la hipotenusa. (Hasta el momento)

Si α es un ángulo agudo, entonces $0 < sen\alpha < 1$ y $0 < cos\alpha < 1$

Ejemplo

Determinar todas las razones trigonométricas para el ángulo α, en el siguiente triángulo



El valor del cateto BC se calcula aplicando del teorema de Pitágoras

$\overline{BC} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$, $\overline{BC} = 4cm$

2.3 Identidades trigonométricas básicas

Demuestre que: $\cos^2 x + sen^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

Ejercicios

1. Demuestre, utilizando para ello las definiciones de las razones trigonométricas dadas, las siguientes relaciones:

   a) $sen\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ b) $\cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$

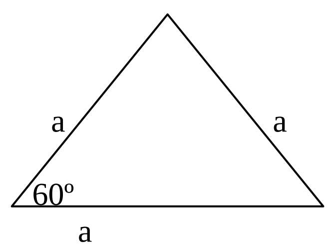
2. Si α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y sen α = 1/3, determine tg α y sen(90 - α).
3. Sabiendo que sen 28º = 0,469; calcula:
   a) cos 28º, b) tg 28º, c) cosec 28º,
4. Si sen β= p, determina cos β
5. Si cos α = α, determina cot α.
6. Calcular las siguientes expresiones:
   a) 5 cos α - 2 sen α + cot α, si sen α = 0,6.
   b) 2 sen α + cos α - 2 cosec α, si sec α = 2.

2.4 Razones trigonométricas de ángulos especiales

Se calculan las razones trigonométricas para ángulos que midan 30º, 45º y 60º.

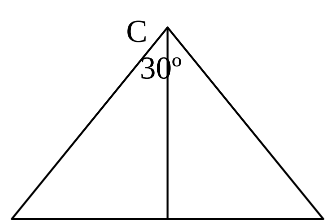
Razones trigonométricas para 30º y 60º

Utilizando un triángulo equilátero de lado a unidades.



Sus tres ángulos miden 60º

Se traza la altura h_c



a $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ h_c a

60º

A a/2 D

El triángulo ADC, es rectángulo en D, $\measuredangle$CAD = 60º, , $\measuredangle$ACD = 30º, la altura es

$$h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Luego

1. sen 30º = $\dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$ = cos 60º; porque sen α = cos(90 - α)

2. cos 30º = $\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ = sen 60º

3. tg 30º = $\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ = cot 60º

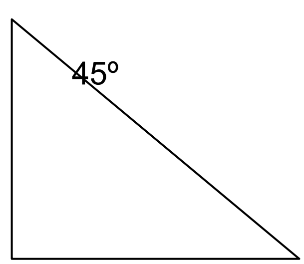
4. cot 30º = $\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$ = tg 60º

5. sec 30º = $\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ = cosec 60º

6. cosec 30º = $\dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2$ = sec 60º

Razones trigonométricas para 45º

Para determinar las razones trigonométricas de 45º, se utiliza un triángulo rectángulo isósceles de catetos *a*.



a c

45º

a

Se obtiene primero la longitud de la hipotenusa, por Pitágoras,

$c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

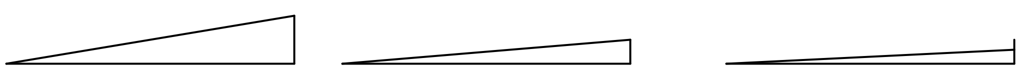
1. sen 45º = $\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ = cos 45º

2. tg 45º = $\frac{a}{a} = 1$ = cot 45º

3. sec 45º = $\frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$ = cosec 45º

Razones trigonométricas para 0° y 90°

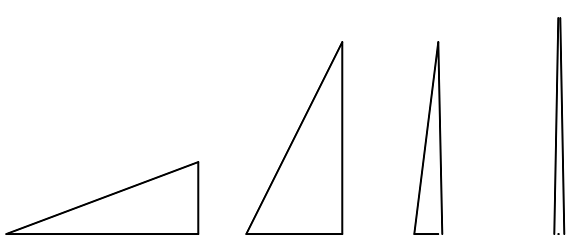
Para 0º



Se puede observar que mientras más pequeño es el ángulo, su medida es cercana a a cero, la hipotenusa tiende a ser igual en longitud al cateto adyacente y el cateto opuesto tiende a tener longitud cero, por lo cual se acepta que

cos0º =1 y sen0º = 0

Para 90º



Se puede observar que mientras más cercano a noventa grados es el ángulo, la hipotenusa tiende a ser igual en longitud al cateto opuesto y el cateto adyacente tiende a tener longitud cero, por lo cual se acepta que

$$\text{sen}90º = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{y} \quad \cos 90º = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Tabla resumen de razones trigonométricas

grados	radianes	seno	coseno	Tan = $\frac{sen}{\cos}$	Cosec = $\frac{1}{sen}$	Sec = $\frac{1}{\cos}$	Cotan = $\frac{1}{\tan}$
0	0	0	1	0	∞	1	∞
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	1	∞	0

Ejercicios

1. Calcular las siguientes expresiones trigonométricas

a) $\frac{sen45° + \tan 45°}{sen45° - \tan 45°}$ (Respuesta: -3 - $\sqrt{2}$)

b) (sec 30º + sen 60º)^2 (Respuesta: 49/12)

c) $\frac{\cos 60° + \cot 60°}{sen60° - \cos 30º}$

2. Sabiendo que $senx = \frac{3}{5}$, calcule sin hallar el valor de cosx, tan x, secx

3. Calcular las razones trigonométricas que faltan para 0º y 90º

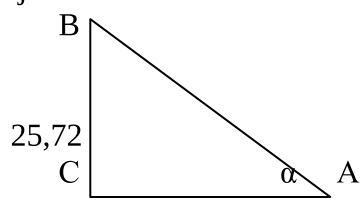
2.5 Resolución de triángulos rectángulos

Se entiende por **resolver un triángulo** al cálculo de las medidas de los lados y de los ángulos, a partir de datos dados. En este caso del triángulo se conoce la medida del ángulo mayor, 90° y los demás son agudos.

Ejemplo

1. Resolver el triángulo rectángulo si $\alpha = 36°20'$, $a = 25,72$

Consideremos un dibujo



Sen $\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow$ sen36°21'$=\dfrac{25,72}{c}$ $\Rightarrow c = \dfrac{25,72}{sen 36°21'} = \dfrac{25,72}{0,5924819} = 43,4117$

Por ser triángulo rectángulo en C, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

b = $\sqrt{43,4117^2 - 25,72^2} = 34,9772236$,

$\beta = 53°40'$

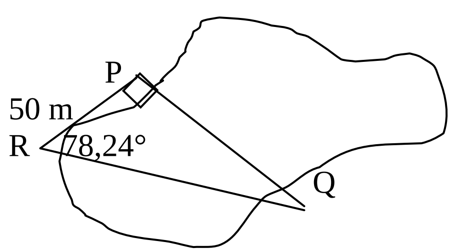
Resolver los siguientes triángulos:

a) $a = 574,16$, $\beta = 56°20'$
b) $c = 625,3$, $\alpha = 58°43'$
c) $b = 4218$, $c = 6759$

Problemas que se resuelven con ayuda de trigonometría

Ejemplo

Para calcular la distancia de una a otra orilla de un lago, un topógrafo elige dos puntos P y Q, uno en cada orilla y opuestos entre sí. En la orilla que contiene a P, se elige otro punto R a 50 m de P, de modo que el segmento rectilíneo PR es perpendicular con el segmento rectilíneo PQ. El ángulo PRQ mide 78,24°, ¿cuál es la distancia entre ambas orillas



Este es un típico problema de trigonometría.

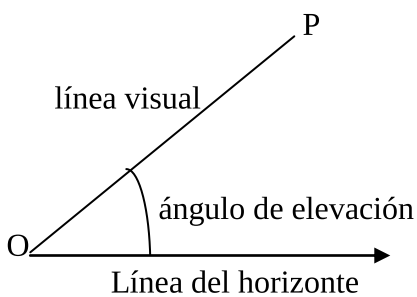
Desarrollo

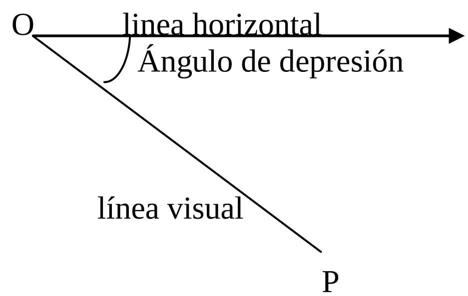
$$\text{Tan}78{,}24° = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{PQ}}{50} \Rightarrow \overline{PQ} = 50 * 4{,}80348 = 420{,}017\ m$$

Definición

Sea O un punto fijo de observación a otro punto P, el segmento OP se llama visual de P. El ángulo que forma una línea horizontal y la visual se llama **ángulo de elevación de P**, si P está sobre el horizonte.

Si P se encuentra bajo la horizontal, el ángulo se llama **ángulo de depresión de P.**





Ejercicios

1. Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24,6 m tiene un arco correspondiente a 70°.

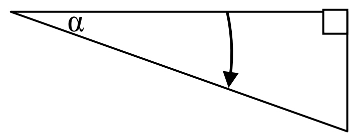
2. Pedro y Ana ven desde las puertas de sus casas una torre de televisión, bajo ángulos de 45° y 60°. La distancia entre sus casas es de 126 m y la antena está situada entre sus casas. Hallar la altura de la torre.

3. Se tiene un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r. Demostrar que el perímetro y el área de este polígono son, respectivamente:

$$2nrsen\frac{\pi}{n}, \frac{1}{2}nr^2 sen\frac{2\pi}{n}$$

4. Un árbol quebrado por el viento, forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Cuál era la altura del árbol, si la parte que ha caído hacia el suelo forma un ángulo de 50° y la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 20 m?

2.6 Razones trigonométricas de ángulos negativos



El ángulo tiene medida negativa, en el sentido de las agujas del reloj, entonces

a) el cateto opuesto al ángulo tiene asociado un signo negativo,
b) el cateto adyacente y la hipotenusa no han cambiado de orientación, tiene asociado un número positivo.

Esto trae como consecuencia que:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\,\text{sen}\alpha\ ,\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\ ,\quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Escriba las razones cosecante, secante y cotangente.

2.7 Razones trigonométricas para suma, resta de ángulos

Teorema

a) $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$
b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$
c) $sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha$
d) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$

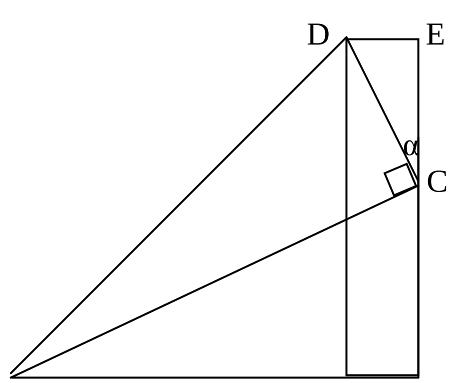
Demostración de a)

Dados 1ABC, 1ACD rectángulos en B y en C, respectivamente

CE prolongación de BC

DF // BE

$\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle DAC = \beta$



β

A α B

F

NDCE = α, porque NACE es exterior 3ABC y NACE = 90° + α , N = 90°

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}+\overline{EC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}-\overline{DE}}{\overline{AD}}=-=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha+(-\beta))=sen\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha sen(-\beta)$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$$

Ejemplos

1. sen75° = sen(30° + 45°) = sen30°cos45° + sen45°cos30° =
   $$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{6}\right)}{4}$$

2. cos 15° = cos(45°-30°) = cos45°cos30° + sen45°sen30°
   $$\cos 15°=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

3. sen135° = sen(90° + 45°) = sen90°cos45° + sen45°cos90° = cos45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. cos150° = cos(90°+ 60°) = cos90°cos60°- sen90°cos60° = -cos60° = $-\frac{1}{2}$

5. Completar la siguiente tabla

grado	radian	sen	cos	tan	cosec	sec	tan
0°	0						
30°	$\frac{\pi}{6}$						
45°	$\frac{\pi}{4}$						
60°	$\frac{\pi}{3}$						

90°	$\frac{\pi}{2}$						
120°	$\frac{2\pi}{3}$						
135°	$\frac{3\pi}{4}$						
150°	$\frac{5\pi}{6}$						
180°	π						
210°	$\frac{7\pi}{6}$						
225°							
240°							
270°							
300°							
315°							
330°							
360°							

Fórmulas para ángulos dobles , ángulos medio.

1. De la fórmula para la suma de dos ángulos se obtiene fórmulas para ángulos dobles y ángulos medidos. Por ejemplo de

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \bullet \cos\beta + \cos\alpha \bullet sen\beta$$

haciendo $\beta = \alpha$ se tiene

$sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha \bullet \cos\alpha + \cos\alpha \bullet sen\alpha$

$$sen(2\alpha) = 2sen\alpha \bullet \cos\alpha$$

2) Demuestre: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

2. De $\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$

Haciendo $2\alpha = t \Rightarrow \alpha = \frac{t}{2}$

$\cos t = 1 - 2sen^2\left(\frac{t}{2}\right)$

despejando sen $2sen^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos t \Rightarrow sen^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}$

finalmente $sen\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$

cambiando t por α

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

3. Demuestre que: $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$$tg(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$$

4. **Fórmula general de reducción:**

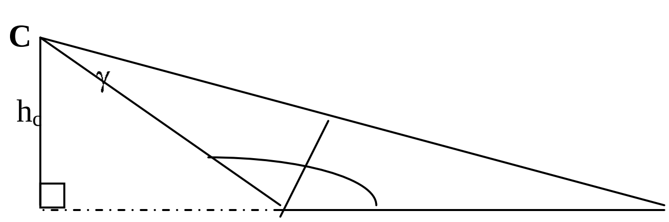
Toda razón trigonométrica de (n·90° $\pm\alpha$), donde α es un ángulo cualquiera, es numéricamente igual a:

i) la misma razón de α si n es par.
ii) la correspondiente corrazón de α si n es impar.

En cada caso, el signo algebraico es igual al signo que tiene la razón dada en el cuadrante al que pertenece (n. 90° $\pm\alpha$) cuando α es un ángulo agudo positivo.

2.8 Teorema del seno

¿Qué pasa si el triángulo no es rectángulo?
Si el triángulo no es rectángulo, hay dos resultados básicos que permiten resolver problemas trigonométrico.
Si consideramos un triángulo cualquiera ABC. La altura h_c con respecto al lado AB, determina el punto D, en la prolongación de AB.



b h$_a$ a

α β

D A c B

De la definición se tiene que

$$sen\alpha = \frac{h_c}{b} \;\Rightarrow\; bsen\alpha = h_c\,,$$

$$sen\beta = \frac{h_c}{a} \;\Rightarrow\; asen\beta = h_c$$

luego $$bsen\,\alpha = asen\beta$$

entonces $$\boxed{\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b}}$$

Se traza la altura h_a, ahora se tiene

$$sen\gamma = \frac{h_a}{b} \;\Rightarrow bsen\gamma = h_a$$

$$sen\beta = \frac{h_a}{c} \;\Rightarrow csen\beta = h_a$$

luego

$$bsen\gamma = csen\beta$$

entonces

$$\boxed{\frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}}$$

En resumen $$\boxed{\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}}$$

Este resultado se llama **Teorema del seno**.

Ejercicios

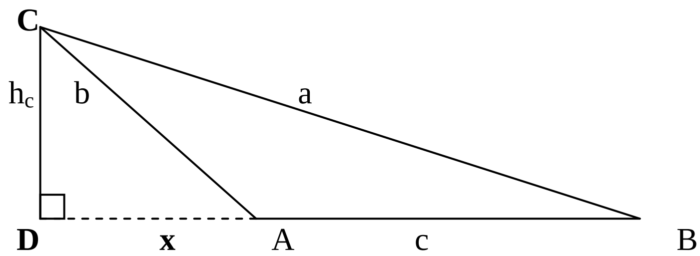
1) a = 7 ; b = 9 ; $\alpha = 60^\circ$

2) c = 1.2 ; a = 1.7 ; $\gamma = 120^\circ$

3) $\alpha = 53º$ $\beta = 75º$ c = 30,5 cm.

4) $\alpha = 48º$ $\gamma = 68º$ c = 47,2 mm

2.9 Teorema del coseno



En 1DBC rectángulo en D

$$a^2 = h_c^2 + (c + x)^2 = h_c^2 + c^2 + 2xc + x^2$$

pero en 1DAC, $x^2 = b^2 - h_c^2$ y $\cos(180^o - \alpha) = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = -b\cos\alpha$

reemplazando en a^2

$$a^2 = h_c^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha + b^2 - h_c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Llamado **Teorema del coseno**

De modo similar se pueden obtener fórmulas para los otros dos lados

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma$$

Las fórmulas también pueden escribirse como sigue

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ejercicios

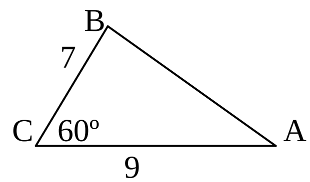
Calcule lo pedido en los siguientes triángulos

a) a = 7 ; b = 9 ; $\gamma = 60^\circ$; c = ? b) c = 1.2 ; a = 1.7 ; $\beta = 120^o$; b = ?

c) a = 80 ; b = 57 ; c = 61 ; β = ?

Resolución de a)

Hacer un modelo gráfico



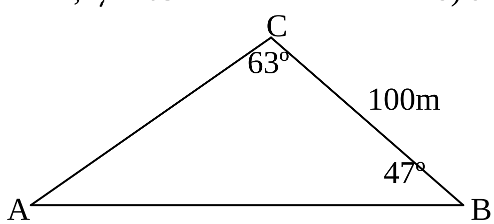
por teorema del coseno $c^2=49+81-2\cdot 7\cdot 9\cos 60º = 130- 126 \cdot 0{,}5 = 130-63 = 67$

$$c = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} = 7{,}93$$

Ejercicios Resueltos # 5

1. Resuelva los siguientes triángulos:

a) a = 100 m, $\beta = 47^{o}$, $\gamma = 63^{o}$ b) b = 17 m, $\alpha = 70^{o,}$ $\gamma = 35^{o}$



α=180º - β - γ = 180º - 63º - 47º = 70º

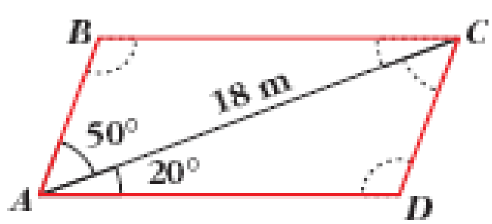
aplicando teorema del seno

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} \quad \text{y} \quad \frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\gamma}{c}$$

$$\frac{sen70^{o}}{100} = \frac{sen47^{o}}{b} \Rightarrow b = \frac{100 * sen47^{o}}{sen70^{o}}$$

$$\frac{sen70^{o}}{100} = \frac{sen63^{o}}{c} \Rightarrow c = \frac{100 * sen63^{o}}{sen70^{o}}$$

2. Calcular el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:



En 1ABC, $\measuredangle$C = 20º , $\measuredangle$B = 110º, AB = c, BC = a

$$\frac{sen110^o}{18}=\frac{sen50^o}{a} \Rightarrow \quad a=\frac{18sen50^o}{sen110^o}=\frac{18*0,766}{0,939}=14,68 \text{ m}$$

$$\frac{sen110^o}{18}=\frac{sen20^o}{c} \Rightarrow c=\frac{18sen20^o}{sen110^o}=\frac{18*0,342}{0,939}=6,56 \text{ m}$$

$$sen70^o=\frac{h}{c} \Rightarrow h=csen70^o=6,56*0,939=6,16 \text{ m}$$

$$\overline{BD}=\sqrt{c^2+a^2-2ac\cos 70^o} \Rightarrow BD=\sqrt{6,56^2+14,68^2-2*6,56*14,68*\cos 70^o}=$$

$$BD=\sqrt{192,66}=13,88 \text{ m}$$

área = base·altura,

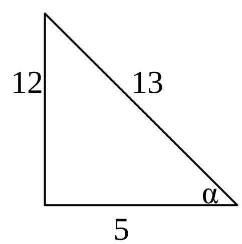
área = 14,68*13,88 = 203,76 m^2

3. Si $\sec\alpha=\frac{13}{5}$, determine, sin usar calculadora:

a. $\frac{sen\alpha+15\cot g\alpha}{1-26\cos\alpha}=$

Solución

En el triángulo rectángulo:



$$\sec\alpha=\frac{13}{5} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{5}{13}$$

El otro cateto es $90\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$

$$\frac{sen\alpha+15\cot g\alpha}{1-26\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{13}+15\frac{5}{12}}{1-26\frac{5}{13}}=\frac{\frac{12}{13}+\frac{25}{4}}{1-10}=\frac{\frac{48+325}{52}}{-9}=-\frac{373}{52*9}=-\frac{373}{468}=-0,79700$$

b. $4tg(90°-\alpha)+3sen(90°-\alpha)=$

Solución

tg(90°- α) = ctgα , sen(90°-α)=cosα

$$4tg(90° - \alpha) + 3sen(90° - \alpha) = 4\frac{5}{12} + 3\frac{5}{13} = \frac{5*13 + 3*15}{3*13} = \frac{65+45}{39} = \frac{110}{39} = 2{,}8205$$

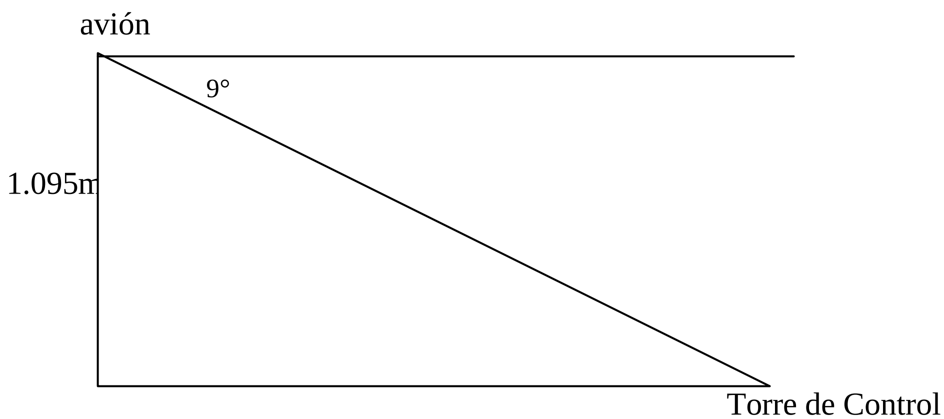
4. Calcular el valor de: $\dfrac{3tg^2 30° + sen^2 60° - \cos ec^2 45°}{(1+3sen30°)(4+5\cos 0°)} =$

Solución

$$\frac{3tg^2 30° + sen^2 60° - \cos ec^2 45°}{(1+3sen30°)(4+5\cos 0°)} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(1+3\frac{1}{2}\right)\left(4+5*1\right)} =$$

$$\frac{3\frac{3}{9} + \frac{3}{4} - 2}{\frac{5}{2}9} = \frac{1 - 2 + \frac{3}{4}}{\frac{45}{2}} = \frac{-1 + \frac{3}{4}}{\frac{45}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{45}{2}} = -\frac{1}{90}$$

5. En un instante dado, el altímetro de una avioneta registra 1.095 m de altitud. El piloto ve la torre de control del aeropuerto con un ángulo de depresión de 9º. ¿A qué distancia del aeropuerto vuela el aparato?



$$sen9° = \frac{1.095}{x} \Rightarrow x = \frac{1095}{sen9°} = \frac{1095}{0{,}1564} = 7001{,}28 \text{ m}$$

El aparato está a 7001,28 m del aeropuerto.

6. Demostrar que $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan\alpha$

Solución

$$\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}+\tan\beta}{1-\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\tan\beta}=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta+\tan\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)}{1+\tan\alpha\tan\beta}}{\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta-(\tan\alpha-\tan\beta)\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}=$$

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta+\tan\beta+\tan\alpha\tan^2\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}=\frac{\tan\alpha(1+\tan^2\beta)}{1+\tan^2\beta}=\tan\alpha$$

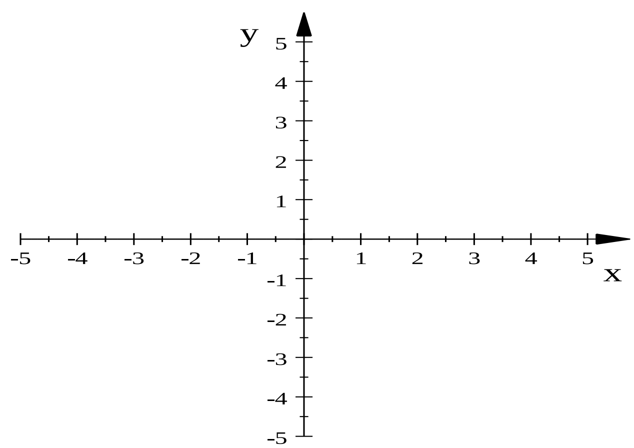
CAPÍTULO 3

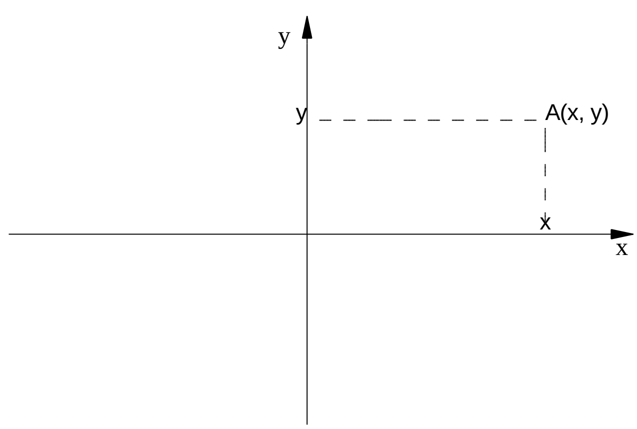
La recta en el plano

En este capítulo se sigue estudiando geometría, pero incorporando el álgebra elemental, lo cual enriquece las ideas geométricas anteriores con una visión distinta, una recta ya no será una línea que no tiene principio ni fin, ahora habrá una ecuación que la represente.

3.1 Sistema de coordenadas

Los números reales se representan como puntos en una línea recta, la recta numérica. Para especificar un punto en un plano se usa un **sistema de coordenadas rectangulares** que se forma al interceptar perpendicularmente dos rectas numéricas en el origen. Una de las rectas se representa horizontalmente y es llamada el **eje de abscisas o eje** *X*. La otra recta se representa verticalmente y se llama el **eje de ordenadas** o **eje** *Y*.





A un punto **A** en el plano, se le asigna un **par ordenado** de números reales (x, y), de los cuales, el primero, x , es el punto en el eje x intersecado por una recta vertical que pasa por el punto **A**; el segundo de los números, y, es el punto en el eje y, intersecado por una recta

horizontal que pasa por el punto **A**. El par ordenado (x , y) son las **coordenadas** de **A** y cada uno de los números en el par ordenado se llama **componente** o **coordenada.** Note que el orden en que escribimos los componentes del par ordenado es muy importante.
Para cada par de números reales (x , y), existe solamente un punto en el plano que le corresponde y, recíprocamente, para cada punto en el plano existe sólo un par ordenado (x , y) que le corresponde. Por eso se dice que **existe una correspondencia "uno a uno" entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales**.

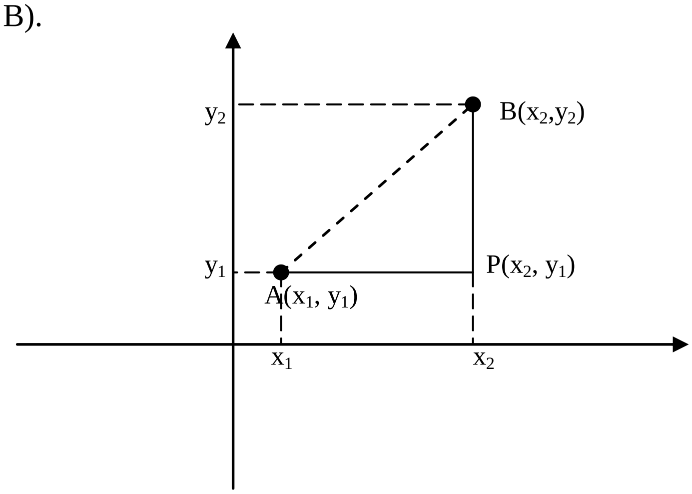
Definición

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son **iguales** si solo si sus respectivas componentes son iguales.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

3.2 Distancia entre dos puntos y el punto medio

El teorema de Pitágoras establece que para un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos equivale al cuadrado de la *hipotenusa*.
Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la distancia entre los puntos A(x_1, y_1) y B(x_2 , y_2) .
La *distancia* entre dos puntos A, B del plano, es la longitud del segmento definido por ellos y se denota d(A, B).



Se quiere calcular d(A, B), longitud de $\overline{AB}$

1APB rectángulo en P , entonces $\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$

$\overline{AP} = x_2 - x_1$, $\overline{PB} = y_2 - y_1$, reemplazando

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

entonces

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

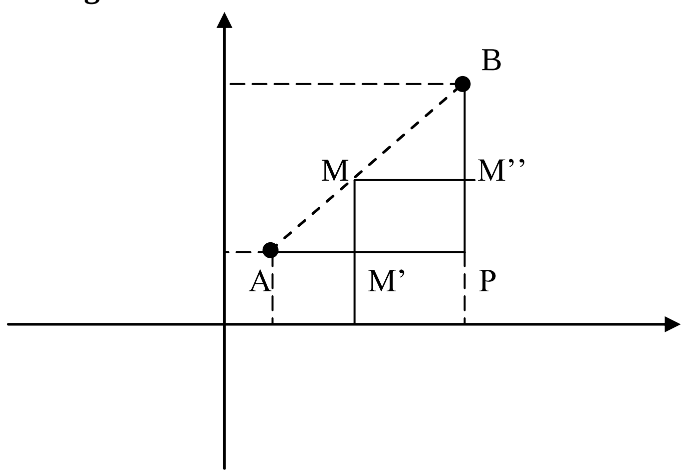
$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejercicio

Calcule la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a) (1 , 0) y (0 , 2) ; b) (-2 , -3) y (4 , 5) ; c) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y (0 , 0)

3.3 Punto medio de un segmento



Se desea determinar las coordenadas del punto medio M entre los puntos A(x_1, y_1) y B(x_2 , y_2) .

La condición es $\overline{AB} = 2\overline{AM}$

Sean (x, y) las coordenadas de M

Por Teorema de Thales $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AM'}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{PM''}}{\overline{PB}} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{AP}} = \frac{1}{2} \quad \overline{AP} = 2\overline{AM'}$$

$\overline{AP} = x_2 - x_1$, $\overline{AM'} = x - x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 = 2x - 2x_1 \Rightarrow x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

por otra parte

$$\frac{\overline{PM''}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2} \quad \overline{PB} = 2\overline{PM''}$$

$\overline{PB} = y_2 - y_1$, $\overline{PM''} = y - y_1 \Rightarrow$ $y_2 - y_1 = 2y - 2y_1 \Rightarrow$ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Se puede enunciar el siguiente

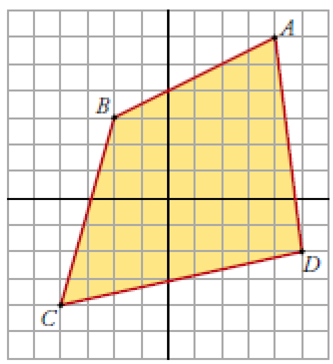
Teorema

Las coordenadas del punto medio M entre los puntos A(x_1, y_1) y B(x_2 , y_2), son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejercicio

1. Compruebe que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?
2. Compruebe, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 6)$ es rectángulo. Halle su perímetro y su área.
3. Calcule las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.

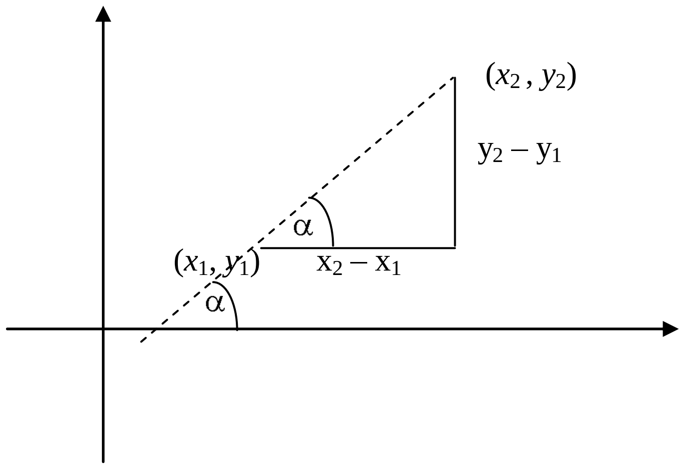


3.4 Pendiente por dos puntos

La pendiente *m* de un segmento que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2 , y_2) se expresa con la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_2 \neq x_1$$

Es fácil verificar que el valor de la pendiente calculado con esta fórmula no cambia si usamos cualesquiera otros dos puntos en la misma recta.



La pendiente m es la tangente del ángulo de inclinación α del segmento de extremos (x_1, y_1) y (x_2 , y_2) (respecto de la recta $y = y_1$, recta paralela al eje X).

Ejemplos

1. La pendiente del segmento de extremos puntos (1,-3) y (4, 0) es

$$m = \frac{0-(-3)}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

2. Compruebe, que los puntos dados están alineados:

   a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

Solución

$$m_{\overline{AB}} = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3} \qquad m_{\overline{BC}} = \frac{8-3}{19-4} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Ejercicios

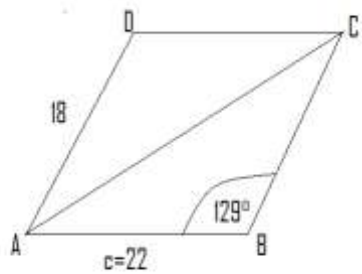
1. Compruebe, que los puntos dados están alineados:

   $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

2. Calcule m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.

Ejercicios resueltos # 6

1 De la figura, ABCD paralelogramo. Resolver el triángulo ABC



Solución

3ABC , NABC = 129° , c= 22, a= 18

Aplicando teorema del coseno $b^2 = a^2 + c^2 – 2accos129°$

Cos 129° = -0,6293

$b^2 = 22^2 + 18^2 – 2*22*18*(-0,6293)$

$b^2 = 484 + 324 + 498,4056 = 1306,4056$

b=36,1442

Por teorema del seno $\dfrac{sen\alpha}{a} = \dfrac{sen129°}{b}$

$$\frac{sen\alpha}{18} = \frac{0,7771}{36,1442}$$

$$sen\alpha = \frac{18 * 0,7771}{36,1442} = \frac{13,9868}{36,1442} = 0,38699$$

α=23,76°

β = 180° - 23,76° - 129° = 27,24°

Luego: a = 18, b = 36,1442, c = 22, α = 23,76°, β = 27,24° , γ=129°

2 Demostrar que los puntos A(2, -2) , B(-8, 4) y C(5,3) son los vértices de un triángulo rectángulo, además:

Solución

$$\overline{AB} = d\left((2,-2),(-8,4)\right) = \sqrt{(2-(-8))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136}$$

$\overline{AB} = 2\sqrt{34}$

$$\overline{AC} = d\left((2,-2),(5,3)\right) = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$\overline{AC} = \sqrt{34}$

$\overline{BC} = d\left((-8,4),(5,3)\right) = \sqrt{(-8-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{169+1} = \sqrt{170}$

$\overline{BC} = \sqrt{170}$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 136 + 34 = 170$

El triángulo es rectángulo de hipotenusa $\overline{BC}$

a) Encontrar la longitud de la transversal t_c.

Solución

La transversal t_c es la transversal de gravedad desde el vértice C al punto medio del lado $c = \overline{AB}$

Punto medio de $c = \overline{AB}$ es $M = (x_M, y_M) = \left(\frac{2-8}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (-3,1)$

Longitud de t_c =d(C, M) = d((5, 3), (-3,1)) =

$= \sqrt{(5-(-3))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = \sqrt{4*17} = 2\sqrt{17}$

$t_c = 2\sqrt{17}$

b) Comprobar que el producto de las pendientes de los catetos es -1

Solución

Los catetos son $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, A(2, -2) , B(-8, 4) y C(5,3)

$$m_{AC} = \frac{3-(-2)}{5-2} = \frac{5}{3}$$

$$m_{AB} = \frac{4-(-2)}{-8-2} = \frac{6}{-10} = -\frac{3}{5}$$

Luego $m_{AB} m_{AC} = -\frac{3}{5} * \frac{5}{3} = -1$

c) El área del triángulo ABC.

Solución

El área es el semiproducto de los catetos $\frac{\overline{AC} * \overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{34} * 2 * \sqrt{34}}{2}$

El área del triángulo es 34 (unidades de área)

3. Reducir a un ángulo agudo y calcular su valor.

Sen (660°) +7tg (585°) =

Solución

660° = 360° + 300° , 585° = 360° + 225°

Sen (660°) +7tg (585°) = sen (360° + 300°) + 7tan(360° + 225°) =sen300° + 7tan225°

, 300° = 180° + 120° , 225° = 180° + 45°

sen300° + 7tan225° = sen(180° + 120°) + 7tan(180° + 45°) = sen120° + 7tan45°

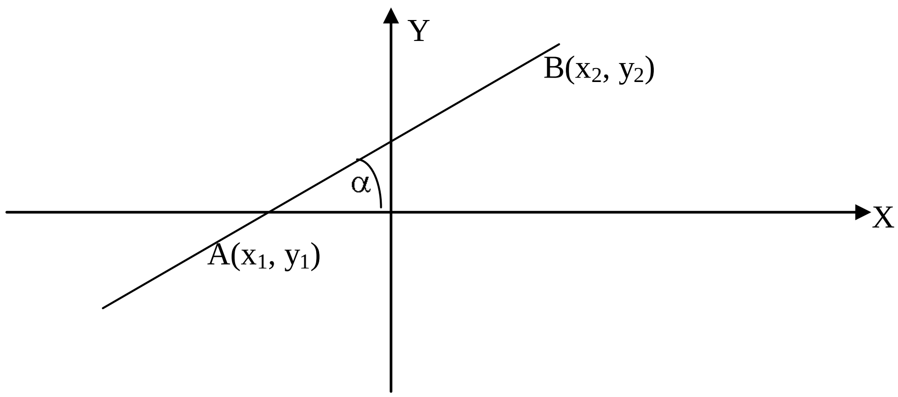
120° = 180° - 60°

sen120° - sen45° = sen (180° - 60°) + 7tan45° = -sen60° +7tan45° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}+7$

Sen (660°) +7tg (585°) = $7-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.5 Ecuación de la recta

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos del plano, los cuales determinan una única recta, se quiere encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

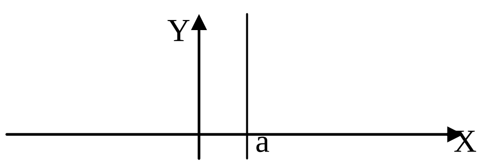


Se observa:

1. que la recta forma un ángulo α con el eje X, llamado **ángulo de inclinación** de la recta y se mide desde el eje X en sentido positivo (sentido contrario a las agujas del reloj)
2. que si $x_1 = x_2$, entonces la recta es paralela al eje Y.

Si la recta es paralela al eje Y , todos los puntos de la recta tienen la misma abscisa $x = x_2$.

La recta L es el conjunto $L =\{(x, y) / x = a \}$ siendo a un número real. Lo cual se escribe simplemente $x = a$. En este caso el ángulo de inclinación de la recta es 90º, $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

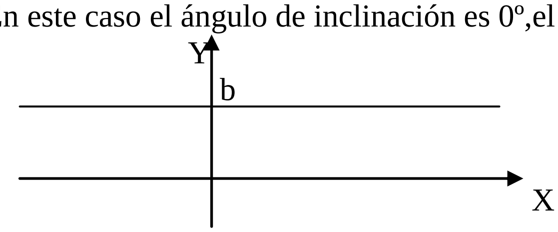


3. En cambio si $y_1 = y_2$, la recta es paralela al eje X.

Si la recta es paralela al eje X , todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada,

$$y = y_2 .$$

La recta L es el conjunto $L =\{(x, y) / y = a \}$ siendo a un número real. Lo cual se escribe simplemente $y = a$. En este caso el ángulo de inclinación es 0º,el (0)

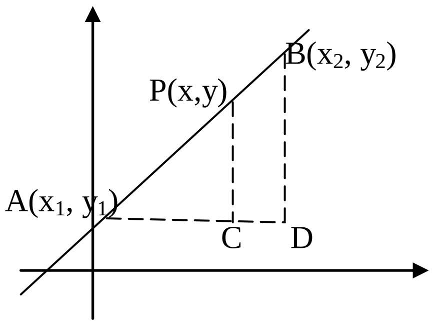


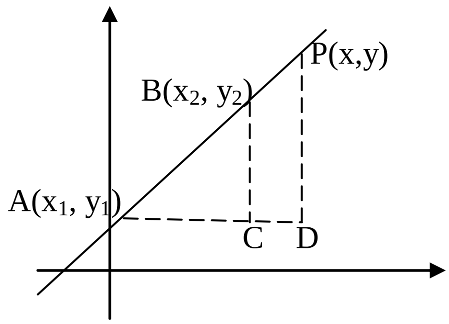
En el caso que $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos de la recta con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$.

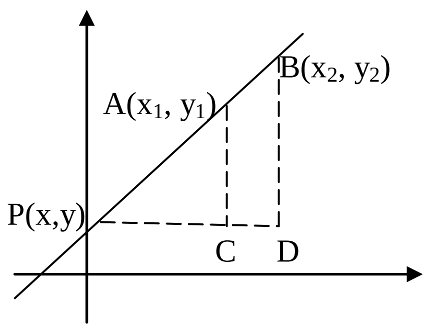
La recta tiene ángulo de inclinación agudo u obtuso.

Si P(x, y) es un punto del plano que pertenece a la recta que pasa por A y B, entonces debe cumplirse algunas de las condiciones siguientes:

1. P = A
2. P = B
3. P está en el segmento de extremos A y B.
4. B está en el segmento de extremos A y P.
5. A está en el segmento de extremos P y B.







En tres casos se cumple que la pendiente del segmento de extremos A y B es igual a la pendiente del segmento de extremos A y P (o también P y B) es constante:

$$m_{\overline{AB}} = m_{\overline{AP}} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow (y_2 - y_1)(x - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$m_{\overline{AP}} = m_{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow (y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$m_{\overline{AP}} = m_{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow (y_1 - y)(x_2 - x_1) = (x_1 - x)(y_2 - y_1)$$

Ejemplo

La ecuación de la recta L que pasa por (1, 2) y (-3, 5)

$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$, reemplazando

$(5 - 2)(x - 1) = (y - 2)(-3 - 1)$

$3x - 3 = -4y + 8$,

$L: 3x - 4y - 11 = 0$

Definición

Se llama **pendiente de la recta** que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ al cuociente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo

La pendiente de la recta por (1, 2) y (-3, 5) es $\frac{5-2}{-3-1} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

3.6 Distintas formas de la ecuación de la recta

1. **Recta** que pasa **por dos puntos** distintos

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Que también se puede escribir

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

O

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}$$

Ejemplo

Recta por (5, -2) y (2, 4)

$$\frac{y+2}{x-5} = \frac{4+2}{2-5} \Rightarrow \frac{y+2}{x-5} = \frac{6}{-3} \Rightarrow \frac{y+2}{x-5} = -2$$

2. Recta punto – pendiente

En la fórmula anterior, sea $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (o si se conoce la pendiente m de la recta)

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo

Recta por (0,7) y tiene ángulo de inclinación de 120°

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo de inclinación,

m = tan120° = -tan60° = $-\sqrt{3}$

$$y-7=-\sqrt{3}(x-0) \Rightarrow y-7=-x\sqrt{3}$$

3. Forma explícita y = mx + n

De la forma anterior $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

la cantidad $-mx_1 + y_1 = n$

$$\boxed{y = mx + n}$$

Ejemplo

1. $\dfrac{y+2}{x-5} = -2$

y + 2 = -2(x – 5)

y =-2x +10-2

y = -2x + 8, m = -2, n = 8

2. y = 5, tiene pendiente m = 0.
3. x = 5, no tiene pendiente, la pendiente no es un número real el ángulo de inclinación es 90°.

4. Ecuación general o forma implícita

De $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se supone $x_2 \neq x_1$

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$y(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_1) - x(y_2 - y_1) + x_1(y_2 - y_1) = 0$$

$$- x(y_2 - y_1) + y(x_2 - x_1) + x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1) = 0$$

Notación

El coeficiente de x se denota A

El coeficiente de y se denota B

La expresión numérica + $x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)$ se denota por C

La ecuación general de la recta es

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Ejemplos

1. $\dfrac{y+2}{x-5} = \dfrac{4+2}{2-5}$

   -3y – 6 = 6x – 30

   - 6x – 3y - 6 + 30 = 0

   -6x – 3y +24 = 0 :/ --3

   2x + y – 8 = 0, A = 2, B = 1, C = -8

2. y = 3

   y – 3 = 0

   A = 0, B = 1, C = -3

3. x = -5

   x + 5 = 0

   A = 1, B = 0, C = 5

4. Escribir todas las ecuación de la recta que intersecta a los ejes X e Y en 3 y 4 respectivamente.

La recta corta al eje X en x = 3, es decir pasa por el punto (3, 0).
La recta corta al eje Y en y = 4, es decir pasa por el punto (0, 4).

Recta por dos puntos $\dfrac{y-0}{x-3} = \dfrac{4-0}{0-3}$

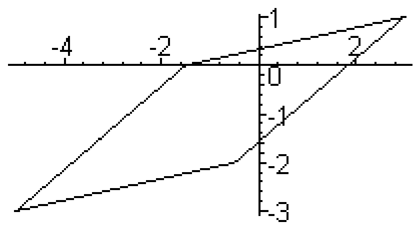
Punto – pendiente $\Rightarrow \dfrac{y}{x-3} = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{4}{3}(x-3)$, $m = -\dfrac{4}{3}$

Forma explícita $y = -\dfrac{4x}{3} + 4$, $m = -\dfrac{4}{3}$, n = 4

Ecuación general 3y = -4x +12 $\Rightarrow$ 4x + 3y -12 = 0, A = 4, B = 3, C = -12

Ejercicios resueltos # 7

1. Sean $A\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $B(3,1)$, $C\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ y $D(-5,-3)$ los vértices de un rombo, determinar:



a) Las ecuaciones de las rectas que forman un ángulo agudo del rombo.

Solución

Los lados del rombo son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, y $\overline{DA}$

Los ángulos agudos son $\measuredangle$ADC y $\measuredangle$ABC

Las rectas que forman $\measuredangle$ABC son la recta por A y B, y la recta por B y C

Recta por A y B $\dfrac{y-0}{x-\left(-\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{1-0}{3-\left(-\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow \dfrac{y}{\frac{2x+3}{2}} = \dfrac{1}{\frac{6+3}{2}} \Rightarrow \dfrac{2y}{2x+3} = \dfrac{2}{9}$

$9\cdot 2y = 2(2x+3) \Rightarrow 18y = 4x + 6 \Rightarrow y = \frac{4}{18}x + \frac{6}{18}$

La recta por A y B es $y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$

Recta por B y C $\dfrac{y-1}{x-3} = \dfrac{-2-1}{-\frac{1}{2}-3} = \dfrac{-3}{-\frac{7}{2}} = \dfrac{6}{7} \Rightarrow 7(y-1) = 6(x-3) \Rightarrow 7y-7 = 6x-18$

7y = 6x-18+7

La recta por B y C es $\frac{6}{7}x - \frac{11}{7}$

Respuesta Alternativa

El $\measuredangle$ADC, formado por la recta que pasa por A y D, y la recta por D y C

Recta por D y C

$$\frac{y+3}{x+5}=\frac{-3+2}{-5+\frac{1}{2}}=\frac{-1}{-\frac{9}{2}}=\frac{2}{9}\quad\Rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{17}{9}$$

Recta por A y D $\quad \frac{y-0}{x+\frac{3}{2}}=\frac{-3-0}{-5+\frac{3}{2}}=\frac{-3}{\frac{-7}{2}}=\frac{6}{7}\quad\Rightarrow y=\frac{6}{7}x+\frac{9}{7}$

Las rectas que forman $\measuredangle$ADC son $y=\frac{2}{9}x-\frac{17}{9}$ e $y=\frac{6}{7}x+\frac{9}{7}$

b) La medida del ángulo agudo.

Solución

$$\tan\beta=\frac{m_{BC}-m_{AB}}{1+m_{BC}m_{AB}}$$

$m_{BC}=\frac{6}{7}$, $\quad m_{AB}=\frac{2}{9}$

$$\tan\beta=\frac{\frac{6}{7}-\frac{2}{9}}{1+\frac{6}{7}\frac{2}{9}}=\frac{\frac{54-14}{63}}{1+\frac{2}{7}\frac{2}{3}}=\frac{\frac{40}{63}}{1+\frac{4}{21}}=\frac{\frac{40}{63}}{\frac{25}{21}}=\frac{21*40}{63*25}=\frac{8}{3*5}=\frac{8}{15}$$

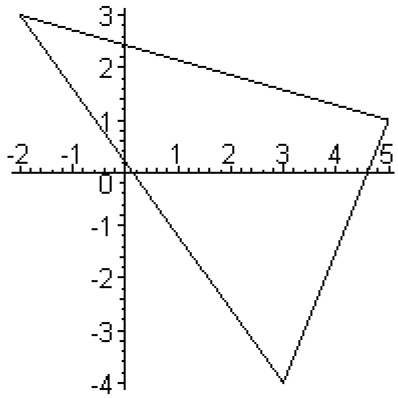
$\tan\beta=\frac{8}{15}$=0,5333... $\quad\beta=28{,}07^{o}$

Respuesta alternativa

$$\tan\alpha=\frac{m_{CD}-m_{AD}}{1+m_{AD}m_{CA}}$$

$$m_{AD}=\frac{6}{7}\quad,\quad m_{CD}=\frac{2}{9}\ \Rightarrow\tan\alpha=\frac{\frac{6}{7}-\frac{2}{9}}{1+\frac{6}{7}\frac{2}{9}}=\frac{\frac{40}{63}}{1+\frac{4}{21}}=\frac{\frac{40}{63}}{\frac{25}{21}}=\frac{40*21}{63*25}=\frac{8}{15}$$

2. En el triángulo de vértices $A(-2,3)$, $B(5,1)$, $C(3,-4)$, **hallar las ecuaciones de** :



a) **La altura que parte de B** (h_b).

Solución

La altura h_b pasa por B y es perpendicular a lado $\overline{AC}$

La pendiente por A y C es $m_{AC} = \dfrac{-4-3}{3-(-2)} = \dfrac{-7}{5}$

La pendiente m de la perpendicular es $\dfrac{-7}{5}m = -1 \Rightarrow m = \dfrac{5}{7}$

Recta por B(5, 1) de pendiente $\dfrac{5}{7}$ es $\dfrac{y-1}{x-5} = \dfrac{5}{7}$

7(y-1) = 5(x-5) $\Rightarrow$ 7y - 7 = 5x – 25 $\Rightarrow$ -5x + 7y – 7 + 25 = 0

La altura tiene ecuación -5x +7y + 18 = 0 , 5x – 7y -18 = 0 , o $y = \dfrac{5}{7}x - \dfrac{18}{7}$

b) **La transversal que parte de B** (t_b).

La transversal pasa por B y por el punto medio de $\overline{AC}$

Punto medio de $\overline{AC}$ es $\left(\dfrac{-2+3}{3}, \dfrac{-4+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$

Recta por B(5,1) y por $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$, $\dfrac{y-1}{x-5} = \dfrac{\frac{-1}{2}-1}{\frac{1}{2}-5} = \dfrac{\frac{-3}{2}}{\frac{-9}{2}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{y-1}{x-5} = \dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ 3(y-1) = x – 5 $\Rightarrow$ 3y - 3 = x – 5

La ecuación de t_b es x – 3y + 2 =0 o bien $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{3}$

c) **La simetral del lado CA**.

Recta por el punto medio de $\overline{AC}$ y es perpendicular con $\overline{AC}$.

Recta por $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ y de pendiente $m = \frac{5}{7}$, es

$$\frac{y+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = \frac{5}{7} \Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{5}{7}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{5}{7}x - \frac{5}{14} \Rightarrow \; y = \frac{5}{7}x - \frac{5}{14} - \frac{1}{2} \Rightarrow \; y = \frac{5}{7}x - \frac{5+7}{14} \Rightarrow \; y = \frac{5}{7}x - \frac{12}{14}$$

La simetral es $y = \frac{5}{7}x - \frac{6}{7}$ o 5x - 7y - 6 = 0

3. Determine el valor de *k* para que las rectas $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2}$, $\frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{k}$ sean paralelas.

Solución

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} \Rightarrow \text{-2(x - 2) = 3y} \Rightarrow \text{-2x + 4 = 3y} \Rightarrow \text{2x + 3y – 4 = 0}$$

$$\frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{k} \Rightarrow \text{k(x + 5) = -6 (y- 1)} \Rightarrow \text{kx + 5k = -6y + 6} \Rightarrow \text{kx + 6y 5k – 6 = 0}$$

La rectas son paralelas si y solo si $\frac{k}{2} = \frac{6}{3} \Rightarrow 3k = 12 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow k = 4$

Las rectas son paralelas si k = 4

ALTERNATIVA

Dos rectas son paralelas, si tienen la misma pendiente.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow \; m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{k} \Rightarrow \; y = \frac{k}{-6}x - \frac{5k}{6} + 1 \Rightarrow m_2 = \frac{k}{-6}$$

$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{2}{3} = -\frac{k}{6} \Rightarrow 3k = 12 \Rightarrow k = 4$

Las rectas son paralelas si k = 4

Ejercicios propuestos

1. Escriba la ecuación de las siguientes rectas:

   a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

   b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

   c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

2. Compruebe si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.
3. Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, -2)$, halle:
   a) Las ecuaciones de los tres lados.
   b) El punto medio del lado AC.
   c) La ecuación de la mediana del vértice B.
4. Dada la recta 3x – 57 + 9 = 0
   a) escríbala en la forma explícita.
   b) indique la pendiente
   c) indique los puntos de intersección con los ejes.
   d) construya el gráfico.

3.7 Posiciones de dos rectas en el plano

Dos rectas del plano pueden ser :

a. Concurrentes (en un único punto)
b. paralelas
c. coincidentes (una sola recta)

a) Rectas concurrentes, es decir, se cortan en un punto formando cuatro ángulos.

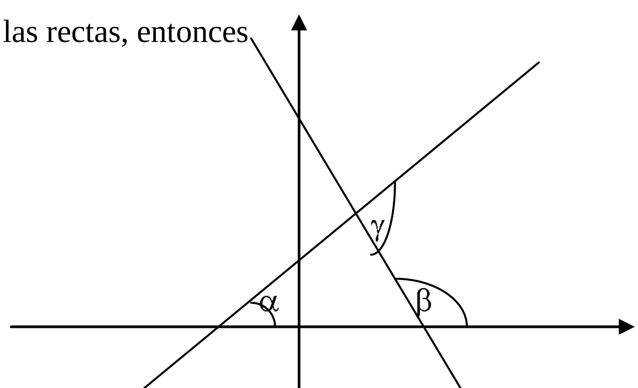
Ángulos entre dos rectas

Sean L_1, L_2 rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

α y β ángulos de inclinación de las rectas, entonces

$\tan\alpha = m_1 \quad \tan\beta = m_2$

1. ángulo entre las rectas



α es el ángulo exterior al triángulo formado por las rectas y el eje X, y es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él

$$\gamma = \alpha + 180° - \beta$$

$\tan\gamma = \tan(180° + \alpha - \beta) = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

El ángulo γ formado por las rectas $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$, esta dado por

$$\boxed{\tan\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

Esta fórmula nos permite analizar las posiciones de dos rectas en el plano.

a) Si dos rectas son paralelas, entonces tienen el mismo ángulo de inclinación y por lo tanto tienen la misma pendiente, es decir $m_1 = m_2$, entonces $\tan\gamma = 0$, el ángulo que forman las rectas es $\gamma = 0$.

Proposición

Dos rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, son paralelas si y solo si

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Esta igualdad se llama **condición de paralelismo**

b) Dos recta son coincidentes si y solo si $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Esto es, dos rectas son coincidentes si sus respectivos coeficientes son proporcionales.

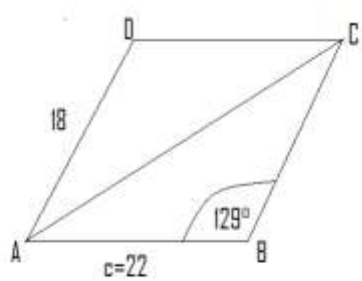
c) Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de las pendientes es -1.

Si son perpendiculares, entonces $\gamma = 90º$

Tan90º $= \infty = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, entonces $1 + m_1m_2 = 0$, entonces $m_1m_2 = -1$.

Ejercicios resueltos # 8

1 De la figura, ABCD paralelogramo. Resolver el triángulo ABC



Solución

3ABC , NABC = 129° , c= 22, a= 18

Aplicando teorema del coseno $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 129°$

cos 129° = -0,6293

$b^2 = 22^2 + 18^2 - 2*22*18*(-0,6293)$

$b^2 = 484 + 324 + 498,4056 = 1306,4056$

b = 36,1442

Por teorema del seno $\dfrac{sen\alpha}{a} = \dfrac{sen129°}{b}$

$$\frac{sen\alpha}{18} = \frac{0,7771}{36,1442}$$

$$sen\alpha = \frac{18*0,7771}{36,1442} = \frac{13,9868}{36,1442} = 0,38699$$

α=23,76°

β = 180° - 23,76° - 129° = 27,24°

Luego: a = 18, b = 36,1442, c = 22, α = 23,76°, β = 27,24° , γ=129°

3 Demostrar que los puntos A(2, -2) , B(-8, 4) y C(5,3) son los vértices de un triángulo rectángulo, además:

Solución

$$\overline{AB} = d((2,-2),(-8,4)) = \sqrt{(2-(-8))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{34}$$

$$\overline{AC} = d((2,-2),(5,3)) = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$\overline{AC} = \sqrt{34}$

$\overline{BC} = d((-8,4),(5,3)) = \sqrt{(-8-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{169+1} = \sqrt{170}$

$\overline{BC} = \sqrt{170}$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 136 + 34 = 170$

El triángulo es rectángulo de hipotenusa $\overline{BC}$

d) Encontrar la longitud de la transversal t_c.

Solución

La transversal t_c es la transversal de gravedad desde el vértice C al punto medio del lado $c = \overline{AB}$

Punto medio de $c = \overline{AB}$ es $M = (x_M, y_M) = \left(\frac{2-8}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (-3,1)$

Longitud de t_c =d(C, M) = d((5, 3), (-3,1)) =

$= \sqrt{(5-(-3))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = \sqrt{4*17} = 2\sqrt{17}$

$t_c = 2\sqrt{17}$

e) Comprobar que el producto de las pendientes de los catetos es -1

Solución

Los catetos son $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, A(2, -2) , B(-8, 4) y C(5,3)

$m_{AC} = \frac{3-(-2)}{5-2} = \frac{5}{3}$

$m_{AB} = \frac{4-(-2)}{-8-2} = \frac{6}{-10} = -\frac{3}{5}$

Luego $m_{AB} m_{AC} = -\frac{3}{5} * \frac{5}{3} = -1$

f) El área del triángulo ABC.

Solución

El área es el semiproducto de los catetos $\frac{\overline{AC} * \overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{34} * 2 * \sqrt{34}}{2}$

El área del triángulo es 34 (unidades de área)

3. Reducir a un ángulo agudo y calcular su valor.

Sen (660°) +7tg (585°) =

Solución

$660° = 360° + 300°$, $585° = 360° + 225°$

sen (660°) +7tg (585°) = sen (360° + 300°) +7tan(360° + 225°) =

= sen300° + 7tan225°

$300° = 180° + 120°$, $225° = 180° + 45°$

sen300° + 7tan225° = sen(180° + 120°) + 7tan(180° + 45°) = sen120° +7tan45°

$120° = 180° - 60°$

sen120° - sen45° = sen (180° - 60°) + 7tan45° = -sen60° +7tan45° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}+7$

Sen (660°) +7tg (585°) = $7-\frac{\sqrt{3}}{2}$

CAPÍTULO 4

Desigualdades, inecuaciones y valor absoluto

En este capítulo, se estudia la relación de desigualdad entre números y expresiones algebraicas, una aplicación de estas desigualdades son las inecuaciones. Se resuelven inecuaciones de primer y segundo grado y se sigue utilizando la operatoria algebraica vista anteriormente.

4.1 Desigualdades, definición y propiedades

Una desigualdad es una relación entre dos expresiones, que indica que tienen distinto valor.

Símbolos

a es menor que b: $a < b$
a es mayor que b: $a > b$
a es menor o igual que b: $a \leq b$
a es mayor que b: $a \geq b$

Principios básicos

a) Todo número cumple una y solo una de las condiciones siguientes:
   1) El número es positivo.
   2) El número es negativo
   3) El número es cero
b) Todo número positivo es mayor que cero: a es positivo $\Leftrightarrow a > 0$
c) Todo número negativo es menor que cero: a es negativo $\Leftrightarrow a < 0$

Definición

Si a y b son números reales entonces:

1) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$
2) $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$

Observación:

si $a < b$, entonces **a** está a la izquierda de **b** en la recta numérica real.

Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de los números reales que se pueden representar gráficamente en la recta numérica por un segmento o una semirrecta.

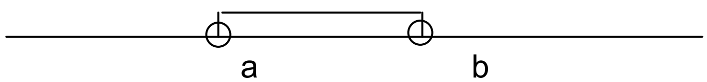
Para representarlos se utiliza paréntesis redondo en el extremo, si este no se incluye, o paréntesis cuadrado si se incluye.

1. Intervalo abierto

$$(a,b) = \{x \in IR \,/\, a < x < b\}$$

Todos los números reales entre a y b, sin incluirlos.

Intervalo abierto de extremos a y b. Se representa gráficamente.



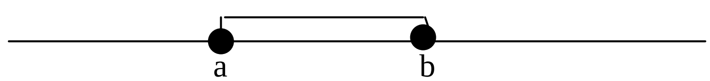
a es el extremo inferior, **b** el superior.

2. Intervalo cerrado

$$[a,b] = \{x \in IR \,/\, a \leq x \leq b\}$$

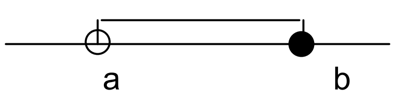
Todos los números reales entre a y b, incluyendo a y b.

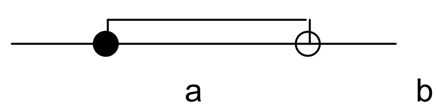
Representación gráfica del intervalo cerrado de extremos a y b.



3. Intervalo semiabierto (semicerrado)

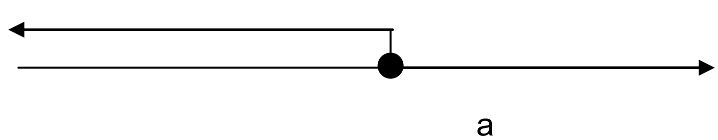
$(a,b] = \{x \in IR / a < x \leq b\}$ $\quad$ $[a,b) = \{x \in IR / a \leq x < b\}$



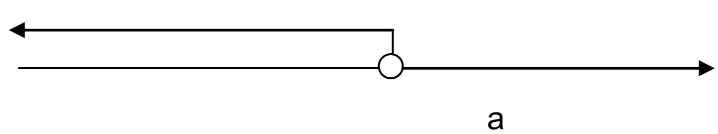


4. Intervalos al infinito

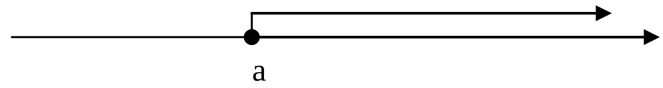
$(-\infty,a] = \{x \in IR / x \leq a\}$



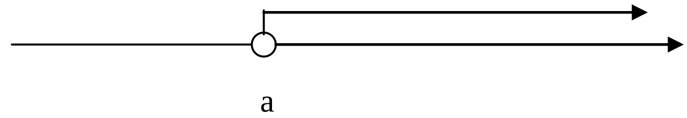
$(-\infty,a) = \{x \in IR / x < a\}$



$[a,\infty[\; = \{x \in IR / a \leq x\}$



$]a,\infty[\; = \{x \in IR / a < x\}$



$]-\infty,\infty[\; = IR$

Propiedades de las desigualdades

1. Una desigualdad no varía si se suma o resta la misma cantidad a ambos lados:

$$a < b \qquad / \pm c$$

$$a \pm c < b \pm c$$

Ejemplo

$$2 + x > 16 \qquad / - 2$$

$$x > 14$$

2. Una desigualdad no varía su sentido si se multiplica o divide por un número positivo:

$$a < b \qquad / \cdot c \text{ , } (c > 0)$$

$$a \cdot c < b \cdot c$$

$$a > b \qquad / : c \; (c > 0)$$

$$a : c > b : c$$

Ejemplo

$3 \leq 5 \bullet x \quad / :5$

$\frac{3}{5} \leq x$ esto es, todos los reales mayores o iguales que $\frac{3}{5}$

3**.** Una desigualdad varía su sentido si se multiplica o divide por un número negativo:

$$a < b \qquad / \bullet c \ (c < 0)$$
$$a \bullet c > b \bullet c$$

$$a > b \qquad / : c \ (c < 0)$$
$$a : c < b : c$$

Ejemplo

Despejar **x** en la siguiente desigualdad aplicando las propiedades anteriores

$15 - 3\bullet x \geq 39 \quad / -15$ (se resta 15, a ambos lados)

$-3\bullet x \geq 39 - 15$ (reduciendo términos semejantes)

$-3\bullet x \geq 24 \quad /: -3$ (dividiendo por -3)

$x \leq 24: (-3)$ (se invierte el signo de la desigualdad)

$x \leq -8.$

Esto es, todos los reales menores o iguales que -8.

4. Si a, b, c y d son números reales tales que $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces

i)
$$\begin{array}{rl} & a < b \\ + & \underline{c < d} \\ & a + c < b + d \end{array}$$

Dos desigualdades del mismo sentido, se pueden sumar miembro a miembro sin que se altere el sentido de esta.

ii)
$$\begin{array}{rl} & 0 < a < b \\ \bullet & \underline{0 < c < d} \\ & ac < bd \end{array}$$

Dos desigualdades de términos positivos y del mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro sin que se altere el sentido de ésta.

4.2 Inecuaciones de primer grado

Una **inecuación de primer grado** es una desigualdad en la que interviene una incógnita, cuyo valor debe determinarse. Cualquier valor de la incógnita que satisfaga la desigualdad es **solución** de la inecuación. **Resolver** la inecuación significa encontrar todas la soluciones, y estas forman un subconjunto de IR, llamado **conjunto solución**.
Una inecuación de primer grado puede ser de la forma general siguiente, x representa la incógnita.

$$\text{Forma general} \quad \begin{cases} ax+b>0 \\ ax+b<0 \\ ax+b\geq 0 \\ ax+b\leq 0 \end{cases} \quad , a\neq 0$$

Las inecuaciones de primer grado con una incógnita se resuelven despejando la incógnita. Y para ello se aplican inversos aditivos (opuestos) o inversos multiplicativos (recíprocos) y propiedades de las desigualdades.

A continuación veremos cómo se aplican las propiedades anteriores en la resolución de inecuaciones lineales de primer grado con una incógnita.

Ejemplo:

Resolver la inecuación: $x - 2 < 3x - 6$

Solución

$x - 2 < 3x - 6$ $\quad + / - 3x$ (Se agrupa la incógnita a un lado de la desigualdad)

$x - 3x - 2 < - 6$ $\quad + / 2$ (Se suma 2 a ambos lados)

$x - 3x < 2 - 6$ (se reducen términos semejantes)

$- 2x < - 4$ $\quad * / -\frac{1}{2}$ (se multiplica por $-\frac{1}{2}$)

La desigualdad cambia de sentido, porque se multiplica por un número negativo.

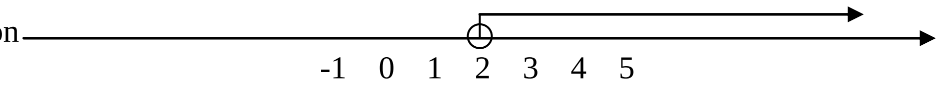
$$-\frac{1}{2} * -2x > -\frac{1}{2} * -4$$

$$x > 2$$

condición : $x > 2$

La solución es un intervalo real. $(2,+\infty)$

Gráfico de la solución



Otra forma de resolver:

$$x - 2 < 3x - 6$$

Conviene dejar la incógnita positiva, por tanto restaremos x a ambos lados de la desigualdad

$$-2 < 3x - x - 6$$

Se suma 6 en ambos lados

$$-2 + 6 < 2x - 6 + 6$$

$$4 < 2x$$

Dividimos por 2 (positivo, por lo que no cambia el signo)

$$2 < x$$

¿Observa Ud. Que es preferible el coeficiente de la incógnita sea positivo?

Mediante ambos métodos, la respuesta en forma de intervalo es: $(2, +\infty)$; es decir, todos los reales mayores que 2, satisfacen la inecuación.

Resolver

2. $\frac{x+5}{3} - \frac{x-4}{2} > 4$

3. $\frac{2}{x-3} > 0$, $x \neq 3$, porque el denominador debe ser distinto de cero

4. $\frac{x-2}{2} > 0$,

4.3 Inecuaciones de segundo grado

Son inecuaciones que se reducen a una de las formas siguientes

$$ax^2 + bx + c < 0,\ \ ax^2 + bx + c \leq 0,\ \ ax^2 + bx + c \geq 0,\ \ ax^2 + bx + c > 0,\ \ a \neq 0$$

Para resolver estas inecuaciones se debe tener presente las propiedades de los signos de los números

Sean a, b son números reales

1. Si $ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
2. Si $ab < 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

Método de resolución inecuación de 2º grado.

Escribir la inecuación de la forma ya indicada.

Considere el polinomio $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Calcular el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, hay dos casos

Caso 1) $\Delta \geq 0$, el polinomio tiene raíces reales

Calcular la raíces y factorizar el polinomio según éstas. Sean éstas x_1, x_2.

Ahora el polinomio es

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) \quad \text{, raíces distintas}$$

o

$$ax^2 + bx + c = (x - x_0)^2 \quad \text{, raíces iguales}$$

Se aplica propiedad de los signos de un producto de dos números.

Y se analiza y elige el o los intervalos de solución.

Ejemplo

$$x^2 - x - 6 > 0$$

El discriminante del polinomio es $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$, tiene dos raíces reales distintas

Buscamos la raíces , $x = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

La factorización es $(x - 3)(x + 2)$

La inecuación dada es $x^2 - x - 6 > 0$

Ahora es $(x - 3)(x + 2) > 0$

Entonces $(x - 3 > 0 \wedge x + 2 > 0) \vee (x - 3 < 0 \wedge x + 2 < 0)$

$$(x > 3 \wedge x > -2) \vee (x < 3 \wedge x < -2)$$

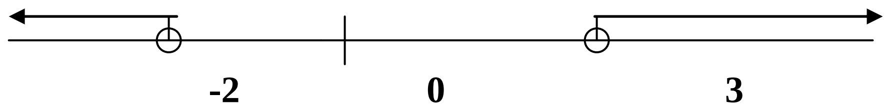
$$[(3, +\infty) \cap (-2, +\infty)] \cup [(-\infty, 3) \cap (-\infty, -2)]$$

$(3, +\infty) \cup (-\infty, -2)$

$(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

$x < -2 \ \vee \ x > 3$

Solución gráfica



Otro método

Las raíces –2 y 3, se llaman **valores críticos** de la inecuación , se ordenan $-2 < 3$.

Estos números determinan en la recta numérica tres intervalos abiertos

$$(-\infty, -2)\ ,\quad (-2, 3)\ ,\quad (3, +\infty)$$

Se debe estudiar cuales de ellos es solución. Para esto se hace una tabla como la siguiente:

Factores	$x < -2$	$< x <$	$3 < x$
x + 2	-	+	+
x – 3	-	-	+
(x + 2)(x – 3)	+	-	+
respuesta	Si	no	si

Solución $x < -2$ o $x > 3$

Conjunto solución $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Caso 2

Si $\Delta < 0$, el polinomio no tiene raíces reales y es irreducible en IR, y ocurre uno y solo uno de los dos caso: i) la inecuación tiene solución el conjunto IR, o bien, ii) la solución es el conjunto vacío, es decir no hay números reales que satisfacen la desigualdad..

Ejemplos

1. $x^2 - 5x + 7 > 0$

$\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$

Se evalúa el polinomio en cualquier número real, el signo de esta evaluación da la respuesta.

Para x = 0 , el polinomio vale 7 , y se pide que el polinomio sea positivo, entonces la solución de

$x^2 – 5x + 7 > 0$ es IR, cualquier número real.

2. $2x^2 - 6x + 5 < 0$

$\Delta = 36 – 40 = - 4$

Para x = 0, el polinomio vale 5 que es positivo y la inecuación es menor que cero, por lo tanto la solución es el conjunto vacío, es decir ningún número real satisface la inecuación.

Inecuaciones fraccionarias

Una inecuación fraccionaria contiene números racionales y expresiones algebraicas fraccionarias y tal vez la incógnita está en el denominador, por ejemplo $\frac{3-x}{x+5} \leq 0$.

Propiedades de signos de los números

Sean a y b números reales

3. $b \neq 0,\ \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
4. $b \neq 0,\ \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

Ejemplos

1. $\frac{3-x}{x+5} \leq 0$

Método 1

Por ser una fracción negativa o cero, se aplica la propiedad 4., considerando que el numerador también puede ser cero, pero el denominador no puede ser cero.

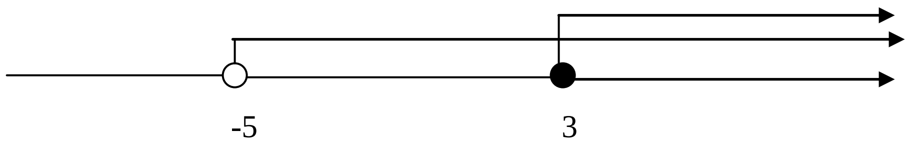
$$\frac{3-x}{x+5} \leq 0 \Rightarrow (3 - x \leq 0 \wedge x + 5 > 0) \vee (3 - x \geq 0 \wedge x + 5 < 0)$$

se obtienen cuatro inecuaciones de primer grado

$(3 \leq x \wedge x > -5) \vee (3 \geq x \wedge x < -5)$

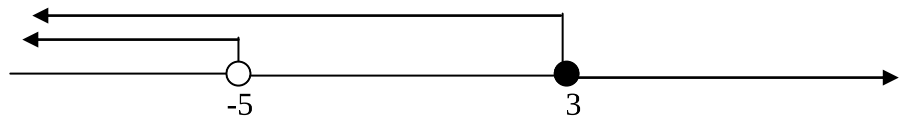
Se resuelve cada paréntesis

$x \geq 3 \wedge x > -5$



por lo tanto $x \geq 3$

$x \leq 3 \wedge x < -5$



por lo tanto $x < -5$

La solución es $x < -5$ *o* $x \geq 3$

Esto significa que la solución es la unión de dos intervalos

$$(-\infty, -5) \cup [3, +\infty)$$

Método 2

Usando la tabla de valores críticos

$\dfrac{3-x}{x+5} \leq 0$, el numerador se anula para x = 3, el denominador para x = -5.

Los valores críticos son –5 y 3, determinan tres intervalos:

$(-\infty, -5)$, $(-5, 3)$, $(3, +\infty)$ y se elabora la tabla

Factores	x < -5	< x <	3 < x
3 - x	+	+	-
x + 5	-	+	+
$\dfrac{3-x}{x+5}$	-	+	-
respuesta	Si	no	si

La solución es $(-\infty, -5) \cup [3, +\infty)$

Resolver

2. $\dfrac{2x}{x+3} \geq 1$ 3. $\dfrac{3}{x-3} \leq \dfrac{2}{x+2}$ 4. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} \geq 0$

Ejercicios resueltos # 11

Resolver las siguientes inecuaciones

1. $\dfrac{x-5}{2x^2+5x-3} \le 0$

Solución

$$\frac{x-5}{2x^2+5x-3} \le 0$$

Factorizando el denominador: $2x^2 + 5x - 3$

Sus raíces son: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\dfrac{12}{4} = -3 \\ \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{x-5}{2x^2+5x-3} = \frac{x-5}{(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \le 0 \quad x \ne -3 \wedge x \ne \frac{1}{2}$$

Los valores críticos son 5, - 3, $\frac{1}{2}$

		- 3	$\frac{1}{2}$	5
x – 5	-	-	-	+
x + 3	-	+	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	-	+	+
$\dfrac{x-5}{(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$	-	+	-	+
Signo	si	no	si	no
Solución	$(-\infty,-3)$		$\left(\frac{1}{2},5\right]$	

Solución $(-\infty,-3) \cup \left(\frac{1}{2},5\right]$

Condición $x < -3 \vee \frac{1}{2} < x \le 5$

2. $\dfrac{1}{x+5} < \dfrac{1}{x-4}$

Solución

$$\frac{1}{x+5} < \frac{1}{x-4} \qquad -/\ \frac{1}{x-4}$$

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-4} < 0$$

$$\frac{x-4-(x+5)}{(x+5)(x-4)} < 0$$

$$\frac{-9}{(x+5)(x-4)} < 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) > 0$$

Valores críticos: -5, 4

	-5	4	
+ 5	-	+	+
x– 4	-	-	+
(x + 5)(x– 4)	+	-	+
respuesta	si	no	si
solución	$(-\infty,-5)$		$(4,+\infty)$

Solución: $(-\infty,-5) \cup (4,+\infty)$

x < - 5 o x > 4

3. $\dfrac{x^2-25}{x^3-x^2-20x} \geq 0$

Solución

Factorizando numerador y denominador

$$\frac{x^2-25}{x^3-x^2-20x} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x^2-x-20)} \geq 0$$

$x^2 - x - 20$, tiene raíces $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} \dfrac{10}{2} = 5 \\ -\dfrac{8}{2} = -4 \end{cases}$

$$\frac{x^2-25}{x^3-x^2-20x} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)(x+4)} \geq 0 \qquad \text{simplificando por } (x-5) \neq 0$$

$\frac{x+5}{x(x+4)} \geq 0$, valores críticos - 5, - 4, 0, 5

	-5	-4	0	
x + 5	-	+	+	+
x + 4	-	-	+	+
x	-	-	-	+
$\frac{x+5}{x(x+4)}$	-	+	-	+
Respuesta	no	si	no	si
solución		$[-5,-4)$		$(0,+\infty)$

Pero $x \neq 5$

Solución $[-5,-4) \cup (0,5) \cup (5,+\infty)$ $\qquad -5 \leq x < -4 \vee 0 < x < 5 \vee 5 < x$

4. Determine los valores de m para que la ecuación $(m+5)x^2 + 3mx - 4(m-5) = 0$ tenga raíces complejas.

Solución

La ecuación tiene raíces complejas si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es negativo. En este caso a = m + 5, b = 3m, c = - 4(m – 5)

$(3m)^2 + 16(m+5)(m-5) < 0 \Rightarrow 9m^2 + 16(m^2 - 25) < 0 \Rightarrow 9m^2 + 16m^2 - 400 < 0$

$25m^2 - 400 < 0$:/25

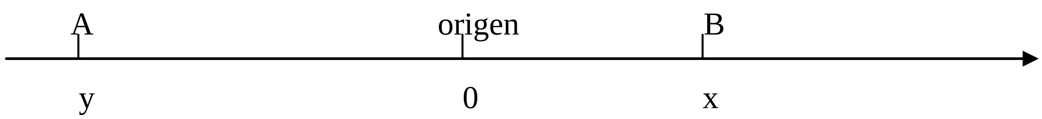
$m^2 - 16 < 0 \Rightarrow (m-4)(m+4) < 0$

	-4		4
m + 4	-	+	+
m - 4	-	-	+
(m - 4)(m + 4)	+	-	+
Respuesta	no	si	no
Solución		$(-4,4)$	

La ecuación $(m+5)x^2 + 3mx - 4(m-5) = 0$ tiene raíces compleja si $m \in (-4,4)$

4.4 Valor Absoluto

Expresaremos la relación que existe entre un número real al cual le corresponde un punto de la recta con la distancia de este punto al punto designado con el número cero (origen).



Si $x \in IR$, se llama **valor absoluto** de x, y se denota $|x|$ a lo siguiente

$$|x| = \begin{cases} x & si \ \ x \geq 0 \\ -x & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

1. $|3| = 3$
2. $|-2| = -(-2) = 2$
3. $|0| = 0$
4. $|3 - x| = \begin{cases} 3 - x & si \ \ 3 - x \geq 0 \\ -(3 - x) & si \ \ 3 - x < 0 \end{cases}$

pero $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq x \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3]$

luego $|3 - x| = \begin{cases} 3 - x & si \ \ x \in (-\infty, 3] \\ x - 3 & si \ \ x \in (3, +\infty) \end{cases}$

5. $|4 - x^2| = \begin{cases} 4 - x^2 & si \ \ 4 - x^2 \geq 0 \\ -(4 - x^2) & si \ \ 4 - x^2 < 0 \end{cases}$

pero $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0$

	(-2)	-2 2	2
2 – x	+	+	-
2 + x	-	+	+
(2 – x)(2 + x)	-	+	-
respuesta	No	Si	No
solución		[- 2 , 2]	

Luego $|4 - x^2| = \begin{cases} 4 - x^2 & si \ \ x \in [-2, 2] \\ x^2 - 4 & si \ \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$

Universidad de Tarapacá

Ingeniería
Introducción al Cálculo Resolución de Taller grupal # 11
1 de Julio de 2009

Resolver las siguientes inecuaciones

1. $\dfrac{x-5}{2x^2+5x-3} \leq 0$

Solución

$$\frac{x-5}{2x^2+5x-3} \leq 0$$

Factorizando el denominador: $2x^2 + 5x - 3$

Sus raíces son: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\dfrac{12}{4} = -3 \\ \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{x-5}{2x^2+5x-3} = \frac{x-5}{(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \leq 0 \quad x \neq -3 \wedge x \neq \frac{1}{2}$$

Los valores críticos son 5, - 3, $\frac{1}{2}$

	- 3	$\frac{1}{2}$		5
$x - 5$	-	-	-	+
$x + 3$	-	+	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	-	+	+
$\dfrac{x-5}{(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$	-	+	-	+
Signo	si	no	si	no
Solución	$(-\infty,-3)$		$\left(\frac{1}{2},5\right]$	

Solución $(-\infty,-3) \cup \left(\frac{1}{2},5\right]$

Condición $\quad x < -3 \vee \frac{1}{2} < x \leq 5$

2. $\frac{1}{x+5} < \frac{1}{x-4}$

Solución

$$\frac{1}{x+5} < \frac{1}{x-4} \qquad - / \ \frac{1}{x-4}$$

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-4} < 0$$

$$\frac{x-4-(x+5)}{(x+5)(x-4)} < 0$$

$$\frac{-9}{(x+5)(x-4)} < 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) > 0$$

Valores críticos -5, 4

	-5	4	
+ 5	-	+	+
x– 4	-	-	+
(x + 5)(x– 4)	+	-	+
respuesta	si	no	si
solución	$(-\infty,-5)$		$(4,+\infty)$

Solución: $\quad (-\infty,-5) \cup (4,+\infty)$

x < - 5 o x > 4

3. $\frac{x^2-25}{x^3-x^2-20x} \geq 0$

Solución

Factorizando numerador y denominador

$$\frac{x^2-25}{x^3-x^2-20x} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x^2-x-20)} \geq 0$$

$x^2 - x - 20$, tiene raíces $\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$

$$\frac{x^2-25}{x^3-x^2-20x}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)(x+4)}\geq 0 \qquad \text{simplificando por } (x-5)\neq 0$$

$\dfrac{x+5}{x(x+4)}\geq 0$, valores críticos - 5, - 4, 0, 5

	- 5		- 4	0
x + 5	-	+	+	+
x + 4	-	-	+	+
x	-	-	-	+
$\dfrac{x+5}{x(x+4)}$	-	+	-	+
Respuesta	no	si	no	si
solución		$[-5,-4)$		$(0,+\infty)$

Pero $x\neq 5$

Solución $[-5,-4)\cup(0,5)\cup(5,+\infty)$

$-5\leq x<-4 \vee 0<x<5 \vee 5<x$

5. Determine los valores de m para que la ecuación $(m+5)x^2+3mx-4(m-5)=0$ tenga raíces complejas.

Solución

La ecuación tiene raíces complejas si el discriminante $\Delta=b^2-4ac$ es negativo.

En este caso a = m + 5, b = 3m, c = - 4(m – 5)

$(3m)^2+16(m+5)(m-5)<0$

$9m^2+16(m^2-25)<0$

$9m^2+16m^2-400<0$

$25m^2-400<0 \quad :/25$

$m^2-16<0$

$(m-4)(m+4)<0$

	- 4		4
m + 4	-	+	+
m - 4	-	-	+
(m - 4)(m + 4)	+	-	+
Respuesta	no	si	no
Solución		$(-4,4)$	

La ecuación $(m+5)x^2+3mx-4(m-5)=0$ tiene raíces compleja si $m\in(-4,4)$

Universidad de Tarapacá
Ingeniería
Introducción al Cálculo Taller individual # 12
8 de Julio de 2009

I. Resuelva para x, lo siguiente:

$$1. \quad \left|\frac{1}{2}-\frac{3}{x}\right| = 8$$

Solución

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{x}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{3}{x} & si \quad \frac{1}{2}-\frac{3}{x} \geq 0 \\ -\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{x}\right) & si \quad \frac{1}{2}-\frac{3}{x} < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \frac{x-6}{2x} \geq 0$$

valores críticos 0 y 6

	0	6	
x - 6	-	-	+
2x	-	+	+
$\frac{x-6}{2x}$	+	-	+
$\left\lvert\frac{x-6}{2x}\right\rvert$	$\frac{x-6}{2x}$	$-\frac{x-6}{2x}$	$\frac{x-6}{2x}$

Luego, $\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{x}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{3}{x} & si \quad x \geq 6 \vee x < 0 \\ -\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{x}\right) & si \quad 0 < x < 6 \wedge x \neq 0 \end{cases}$

Se resuelven dos ecuaciones

(1) Si $x \geq 6 \vee x < 0$, la ecuación es $\frac{1}{2}-\frac{3}{x} = 8 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}-8 = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{-15}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = -\frac{6}{15}$

$x = -\frac{2}{5} < 0$, es solución

(2) Si $x < 6$, la ecuación es $\frac{3}{x}-\frac{1}{2} = 8 \Rightarrow \frac{3}{x} = 8+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{17}{2} \Rightarrow x = \frac{6}{17}$ y $\frac{6}{17} < 6$

La soluciones son $x = -\frac{2}{5}$ y $x = \frac{6}{17}$

2. $|4x-8|-3|x+3| < -6(x-3)$

Solución

$$|4x-8|-3|x+3| < -6(x-3)$$

Los puntos críticos son -3 y 2

		-3	2
x + 3	-	+	+
$\|x+3\|$	-(x + 3)	x + 3	x + 3
4x-8	-	-	+
$\|4x-8\|$	-(4x - 8)	-(4x - 8)	4x – 8

Se consideran tres casos

(1) Si x < - 3, la inecuación $|4x-8|-3|x+3| < -6(x-3)$, es

-(4x – 8)- 3[- (x + 3)] < -6(x – 3)

-4x +8 + 3x + 9 < -6x + 18 $\Rightarrow$ 5x < -17 + 18 $\Rightarrow$ 5x < 1 $\Rightarrow$ $x < \frac{1}{5}$

$x < \frac{1}{5}$ y x < - 3, solución x < -3 o $(-\infty, -3)$

(2) Si -3 < x < 2, la inecuación $|4x-8|-3|x+3| < -6(x-3)$, es

-(4x – 8) – 3(x + 3) < -6x + 18 $\Rightarrow$ -4x + 8 –3x –9 < -6x + 18

-1 – 18 < 7x – 6x $\Rightarrow$ x > -19 y -3 < x < 2

Solución -3 < x < 2 o (- 3, 2)

(3) Si x > 2, la inecuación $|4x-8|-3|x+3| < -6(x-3)$, es

4x – 8 –3(x + 3) < -6x + 18 $\Rightarrow$ 4x – 8 –3x – 9 < -6x + 18

7x < 17 + 18 $\Rightarrow$ 7x < 35 $\Rightarrow$ x < 5, y x > 2

Solución 2 < x < 5 o (2, 5)

Para x = - 3 , $|4*-3-8|-3|-3+3| = |-20|-3*0 = 20 < -6(-3-3) = 36$

Se cumple para x = - 3

Para x = 2, $|4*2-8|-3|2+3| = 0-15 < -6(2-3) = 6$

Se cumple para x = 2

En resumen x < -3 o -3 < x < 2 o 2 < x < 5,

O también $(-\infty,-3) \cup (-3, 2) \cup (2, 5) \cup \{-3\} \cup \{2\} = (-\infty,5)$

Solución de la inecuación propuesta x < 5 o (-∞, 5)

$$3. \quad \left|\frac{x+1}{x-5}\right| \geq \frac{1}{4}$$

Solución

$$x \neq 5, \quad \left|\frac{x+1}{x-5}\right| \geq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-5} \leq -\frac{1}{4} \vee \frac{x+1}{x-5} \leq \frac{1}{4}$$

a) Si $\frac{x+1}{x-5} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+1}{x-5} + \frac{1}{4} \leq 0 \Rightarrow \frac{4(x+1)+x-5}{4(x-5)} \leq 0 \Rightarrow \frac{5x-1}{4(x-5)} \leq 0$

Valores críticos $\frac{1}{5}$, 5

$\frac{1}{5}$ 5

5x - 1	-	+	+
x - 5	-	-	+
$\frac{5x-1}{x-5}$	+	-	+
respuesta	no	si	no
solución		$\left[\frac{1}{5},5\right)$	

b) Si $\frac{x+1}{x-5} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+1}{x-5} - \frac{1}{4} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x+4-x+5}{4(x-5)} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+9}{4(x-5)} \leq 0$

Valores críticos - 3, 5

-3 5

3x + 9	-	+	+
4(x – 5)	-	-	+
$\frac{3x+9}{4(x-5)}$	+	-	+
Respuesta	no	Si	no
solución		$[-3,5)$	

Solución de la inecuación [-3, 5) $\cup \left[\frac{1}{5},5\right) = \left[\frac{1}{5},5\right)$

II Si $8x+15=-1$, determine el valor de $|x+2| - \frac{|3x-1||x+8|}{\left|\frac{1}{2}-4x\right|} =$

Solución

$$8x+15=-1$$

8x = -16

x = - 2

$$|-2+2| - \frac{|3*(-2)-1||-2+8|}{\left|\frac{1}{2}-4*(-2)\right|} = 0 - \frac{|-6-1||6|}{\left|\frac{1}{2}+8\right|} = -\frac{7*6}{\frac{17}{2}} = -\frac{84}{17}$$

El valor de la expresión dada es $-\frac{84}{12}$

4.7
Universidad de Tarapacá
Ingeniería
Introducción al Cálculo Resolución de Prueba # 3
14 de Julio de 2009

1. Encuentre las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} y=\sqrt{x+2} \\ x-2y=1 \end{array}\right|$$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} y=\sqrt{x+2} \\ x-2y=1 \end{array}\right|$$

De la segunda ecuación se despeja x,

$x-2y=1 \Rightarrow x=1+2y$

Reemplazando x en la primera ecuación, $y=\sqrt{x+2}$

$y=\sqrt{1+2y+2} \quad \Rightarrow$

$y=\sqrt{3+2y} \qquad (\;)^2$

$y^2=3+2y \quad \Rightarrow y^2-2y-3=0$, factorizando

$(y-3)(y+1)=0$, entonces $y_1 = -1$, $y_2 = 3$

Alternativa, aplicando fórmula

$$y=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{6}{2}=3\\[2mm] \dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

Reemplazando en x = 1 +2y

Para y = - 1, x = 1 + 2*(- 1) = - 1

Para y = 3, x = 1 + 2*3 = 7

Comprobación para la primera ecuación $y=\sqrt{x+2}$

$\sqrt{-1+2}=\sqrt{1}=1\neq -1$, luego x = - 1 e y = - 1 no es solución

$\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3=y$, luego (7, 3) es solución del sistema

Las soluciones del sistema son $(1,-1)$, $(7,3)$

2. Los lados de un triángulo son 10 m., 17 m. y 18 m respectivamente. Si se resta una misma cantidad a cada uno de los lados del triángulo, se obtiene un triángulo rectángulo. Encuentre el valor de dicha cantidad.

Solución

Sea x la cantidad que se resta a los lados entonces

Los lados son: $(10-x)\,m,\ (17-x)\,m\ y\ (18-x)$

Se obtiene un triángulo rectángulo, por lo tanto cumple el Teorema de Pitágoras, por lo tanto

$$(18-x)^2 = (17-x)^2 + (10-x)^2$$

$$324-36x+x^2 = 289-34x+x^2+100-20x+x^2$$

$$324-36x+x^2 = 389-54x+2x^2$$

$$0 = 389-54x+2x^2+36x-324-x^2$$

$$x^2-18x+65=0$$

$$x = \frac{18\pm\sqrt{324-260}}{2} = \frac{18\pm\sqrt{44}}{2} = \frac{18\pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{26}{2} = 13 \\ \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

Si x = 13, el triángulo tendría un cateto negativo

El valor pedido es 5 m.

3. Resuelva la inecuación $\dfrac{2x^2-50}{x^3-6x^2+5x} < 0$

Solución

$\dfrac{2x^2-50}{x^3-6x^2+5x} < 0$, factorizando numerador y denominador

$\dfrac{2x^2-50}{x^3-6x^2+5x} = \dfrac{2(x^2-25)}{x(x^2-6x+5)} = \dfrac{2(x-5)(x+5)}{x(x-1)(x-5)} < 0$, simplificando por $(x-5) \neq 0$

$$\frac{2(x-5)(x+5)}{x(x-1)(x-5)} = \frac{2(x+5)}{x(x-1)} < 0$$

Valores críticos - 5, 0 y 1

	-5	0	1	
x + 5	-	+	+	+
x	-	-	+	+
x - 1	-	-	-	+
$\frac{x+5}{x(x-1)}$	-	+	-	+
Respuesta	Si	No	Si	No
Solución	$\langle -\infty,-5]$		$\langle 0,1]$	

Solución de la inecuación $\langle -\infty,-5] \cup \langle 0,1]$

4. Encuentre el conjunto solución de $|x+2|+|x-3|=5$

Desarrollo

$$|x+2|+|x-3|=5$$

Los valores críticos son - 2, y 3

	- 2	3	
x + 2	-	+	+
$\lvert x+2\rvert$	- (x + 2)	x + 2	x + 2
x – 3	-	-	+
$\lvert x-3\rvert$	- (x – 3)	- (x – 3)	x – 3

(1) Si x < - 2 , la ecuación $|x+2|+|x-3|=5$ es

- (x + 2) + - (x – 3) = 5

- x – 2 – x + 3 = 5

- 2x +1 = 5

-2x = 4

x = -2

(2) si -2 < x < 3, la ecuación es

x + 2 – (x – 3) = 5

x + 2 – x + 3 = 5

5 = 5

Si x $\in$[- 2, 3) es solución de la inecuación

(3) si x > 3 , inecuación es

x + 2 + x – 3 = 5

$$2x - 1 = 5$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Luego la solución es [- 2, 3]

4.8

Universidad de Tarapacá

Ingeniería

Introducción al Cálculo Resolución de Prueba Optativa

21 de Julio de 2009

5. Encuentre las soluciones para *x* e *y* del sistema

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y+a}{3} - \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{x+b}{3} - \dfrac{b}{2} \end{array}\right|$$

Desarrollo

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y+a}{3} - \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{x+b}{3} - \dfrac{b}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y+a}{3} - \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{x+b}{3} - \dfrac{b}{2} \end{array}\right| \quad \begin{pmatrix} */6 \\ */6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x = 2y + 2a - 3a \\ 6y = 2x + 2b - 3b \end{array}\right| \text{, ordenando}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x - 2y = -a \\ -2x + 6y = -b \end{array}\right| \quad \begin{pmatrix} \\ */3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x - 2y = -a \\ -6x + 18y = -3b \end{array}\right|, \text{ sumando}$$

16y = - a -3b$\Rightarrow y = -\dfrac{a+3b}{16}$

Reemplazando el valor de y en la 1° ecuación

$$6x - 2 * \left(-\frac{a+3b}{16} \right) = -a$$

$$\Rightarrow 6x + \frac{a+3b}{8} = -a \Rightarrow 6x = -a - \frac{a+3b}{8} = \frac{-8a - a - 3b}{8} = \frac{-9a-3b}{8}$$

$$x = -\frac{-9a-3b}{8*6} = \frac{3a+b}{24}$$

La solución del sistema es $\left(\frac{3a+b}{24}, -\frac{a+3b}{16} \right)$

2. Encuentre la solución de $\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \frac{8}{\sqrt{x+5}}$

Desarrollo

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \frac{8}{\sqrt{x+5}} \qquad */\sqrt{x+5}$$

$$\sqrt{x+5}\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15}\sqrt{x+5} = 8$$

$$x+5-\sqrt{5x^2-15x+25x-75} = 8$$

$$x+5-8 = \sqrt{5x^2-15x+25x-75}$$

$$x-3 = \sqrt{5x^2-15x+25x-75} \qquad (\ )^2$$

$$(x-3)^2 = 5x^2+10x-75$$

$$x^2-6x+9 = 5x^2+10x-75$$

$$4x^2+16x-84 = 0 \qquad :/4$$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

$(x + 7)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -7$, $x_2 = 3$

Comprobación

Para x = - 7

$\sqrt{-7+5} - \sqrt{5*-7-15} \notin IR$, x = -7 no es solución de la ecuación

Para x = 3

$$\sqrt{3+5} - \sqrt{5*3-15} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; \quad \frac{8}{\sqrt{3+5}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es x = 3

3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17 cm, y la diferencia de sus catetos es 7 cm. Calcular área y perímetro de dicho triángulo.

Desarrollo

Sean x e y los catetos del triángulo rectángulo, entonces x – y = 7 y, $x^2 + y^2 = 17^2$

El sistema es $\left. \begin{array}{c} x - y = 7 \\ x^2 + y^2 = 289 \end{array} \right|$

Despejando x en la primera ecuación $x = 7 + y$

Reemplazando en la segunda ecuación $(y + 7)^2 + y^2 = 289$

$$y^2 + 14y + 49 + y^2 = 289$$

$$2y^2 + 14y - 240 = 0 \quad : /2$$

$$y^2 + 7y - 120 = 0$$

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2} = \begin{cases} -\dfrac{30}{2} = -15 \\ \dfrac{16}{2} = 8 \end{cases}$$

Los catetos del triángulo miden 8 m y 8 + 7 = 15 m

Por lo tanto, el área es $\dfrac{15*8}{2} = 60m^2$

El perímetro es 8 + 7 + 17 = 32 m

4. Resuelva lo siguiente:

a) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 9} \geq 0$

b) $|x - 5| + 3|2x + 6| > 2x + 3$

5. Dos torres gemelas distan entre sí 1 Km. Desde la parte superior de una de ellas se ve la base de la otra bajo un ángulo de depresión de 5°. ¿Qué altura en metros tienen las torres?

6. Dados los puntos A(-3, 5) y B(1,7) , determine
   a) Distancia entre A y B
   b) La ecuación de la simetral de AB.

Bibliografía

BÁSICA

1. Prado y Otros. "Precálculo, enfoque de resolución de problemas". Pearson. México 2006.
2. Sullivan. "Álgebra y trigonometría. Séptima". Edición. Pearson. México 2006.
3. Tapia y Otros. "Manual de preparación Matemática PSU". Ediciones Universidad Católica de Chile. Santiago Chile 2007.

RECOMENDABLE

1. Millar, Heeren, Hornsby. "Matemática: Razonamiento y Aplicaciones". Octava edición. México 1999.
2. Stewart, J. "Precálculo: Matemática para el cálculo". Thomson Intenacional. México 2007.

Páginas WEB

1. http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/index.htm
2. http // www.unizar.es/aragon_tres/
3. http// matebrunca.com