UNIVERSIDAD DE TARAPACA

CALCULO I

AUTORES

Verónica Rey Mas

Martín Medina Díaz

FACULTAD DE CIENCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ARICA-CHILE

2014

Índice general

Introducción

Considerando la necesidad de contar con un dossier como guía de Cálculo I ó Cálculo Diferencial, principalmente para los alumnos de las carreras de Ingeniería y para todas aquellas carreras, que en su plan de estudio tengan considerada la asignatura de Cálculo diferencial, es que este documento presentará los conceptos de Cálculo Diferencial en forma clara y sencilla, complementados con ejemplos resueltos, ejemplos propuestos y pruebas desarrolladas de años anteriores. Además incluye un mapa conceptual por cada capítulo, que constituye una síntesis organizada de los conceptos para un mejor aprendizaje.

El orden de presentación de los temas está basado en el programa de la asignatura para las carreras de Ingeniería de la Universidad de Tarapacá. Y es el siguiente:

1. **Capítulo I: Geometrá Analítica.**

   Desarrolla los conceptos básicos para la comprensión del Cálculo Diferencial, de manera que el alumno reconozca claramente la circunferencia y las cónicas.

2. **Capítulo II: Funciones.**

   Trata el concepto de función real de una variable real y sus gráficas, destacando algunas propiedades como monotonía, acotamiento, paridad, además de la operatoria con funciones.
   Se considerarán los tipos principales de funciones que se presentan en el Cálculo.

3. **Capítulo III: Límite.**

   Considerando que el concepto de límite sustenta las diversas ramas del Cálculo, es necesario empezar este estudio investigando los límite y sus propiedades.

4. **Cápitulo IV: Continuidad.**

   Trata la continuidad de funciones en un punto, en un intervalo abierto y en un intervalo cerrado. Además se analizan los puntos de discontinuidad de una función y la clasificación de las mismas.

5. **Capítulo V: La Derivada y sus aplicaciones.**

   Trata el concepto y el cálculo de derivadas, aplicaciones a problemas y al cálculo de límites que presentan formas indeterminadas. Además con las herramientas proporcionadas por el Cálculo, se presentará la forma de graficar funciones.

UNIVERSIDAD DE TARAPACA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE ASIGNATURA

IDENTIFICACION		
ASIGNATURA	:	**CALCULO I**
AREA PLAN DE ESTUDIO	:	CIENCIAS BÁSICAS
N° HORAS SEMESTRALES	:	OCHO (6, 2, 0)
PRE-REQUISITO	:	INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
CARRERA	:	**ESCUELAS DE INGENIERIAS**
SEMESTRE CURRICULAR	:	PRIMER SEMESTRE
SEMESTRE ACADÉMICO	:	2014

OBJETIVOS GENERALES

Al término del curso el alumno o alumna será capaz de:

- Resolver problemas que involucre cónicas.
- Aplicar herramientas del cálculo diferencial en la resolución de problemas de ingeniería.
- Utilizar adecuadamente software como apoyo del aprendizaje en el cálculo.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al término del curso, el alumno o alumna será capaz de:

- Identificar, graficar y determinar los elementos principales de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
- Identificar una función.
- Determinar dominio y recorrido de una función.
- Graficar funciones.
- Reconocer funciones especiales.
- Calcular el límite de una función dada.
- Calcular límite cuando la variable independiente tiende al infinito.
- Calcular límites laterales de una función.
- Obtener las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Determinar la continuidad de una función dada.
- Determinar las ecuaciones de las tangentes a una curva dada en puntos dados.
- Dada una función, hallar su derivada en un punto de ella.

- Dada una función, hallar su derivada en un punto de ella.
- Dadas las reglas de derivación, hallar la derivada de una función.
- Derivar implícitamente una función.
- Calcular derivadas de orden superior.
- Aplicar el Teorema de Rolle y del Valor Medio.
- Aplicar L´Hopital al cálculo de límite de funciones.
- Determinar máximos y mínimos de una función.
- Resolver problemas relacionados con máximos y mínimos.
- Dada una ecuación, trazar la curva, determinando monotonía, extremos, concavidad y puntos de inflexión.

CONTENIDOS PROGRAMATICOS

1.- Cónicas: (6 sesiones)

1.1.- La circunferencia, definición. Ecuaciones de la circunferencia.
1.2.- Parábola
1.3.- Elipse
1.4.- Hipérbola

2.- Funciones reales de variable real : (8 sesiones)

2.1.- Función: definición, gráfica, dominio y recorrido.
2.2.- Funciones reales: función constante, lineal, cuadrática, polinómica, racional, Logarítmica, exponencial, valor absoluto, parte entera.
2.3.- Operaciones con funciones, composición de funciones.
2.4.- Funciones monótonas, funciones pares, funciones impares, acotadas.
2.5.- Funciones periódicas, funciones trigonométricas, gráficos.
2.6.- Transformaciones en el gráfico de funciones, traslaciones, reflexiones, Homotecias.

3.- Límite de funciones. (6 sesiones)

3.1.- Idea intuitiva de límite.
3.2.- Definición de límite. Ejemplos álgebra de límites.
3.3.- Cálculo de algunos límites algebraicos.
3.4.- Límites laterales
3.5.- Límites al infinito y límites infinitos.
3.6.- El número e. Límites "especiales".
3.7.- Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

4.- Continuidad de una función. (2 sesiones)

4.1.- Continuidad en un punto. Discontinuidad.
4.2.- Tipos de discontinuidades. Ejemplos.
4.3.- Álgebra de funciones continúas.
4.4.- Continuidad en un intervalo

5.- La derivada de una función. (10 sesiones)

5.1.- Problema de la trayectoria de un móvil en línea recta, velocidad. Tangente a una cónica, tangente como el límite de la secante a una curva. Definición de derivada de una función. La derivada como función.
5.2.- Derivada de funciones básicas.
5.3.- Álgebra de derivadas
5.4.- Derivada en un intervalo. Derivabilidad y continuidad.
5.5.- Derivada de funciones compuestas.
5.6.- Derivadas de orden superior, logarítmica e implícita.
5.7.- Derivada de funciones trigonométricas inversas.
5.8.- Derivación usando logaritmo. Recta tangente, recta normal a una curva.
5.9.- Teorema de L'Hopital y del valor medio.
5.10.- Monotonía de una función.
5.11.- Extremos de una función: criterio de la primera y segunda derivada.
5.12.- Concavidad. Puntos de inflexión.
5.13.- Gráfico de funciones y problemas de planteo.

SISTEMA DE EVALUACION

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA:

1. Cisternas M. y Medina M., Tópico de Cálculo: Números Reales, Funciones de una variable real, Sucesiones. UTA. Primera Edición. 2000.
2. Lehmann Ch., Geometría Analítica. Limusa. 2012.
3. Rey V. y Sanhueza M., Tópicos de Cálculo: Límite de Funciones, Continuidad, la Derivada y sus Aplicaciones. UTA. Primera Edición. 2000.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA:

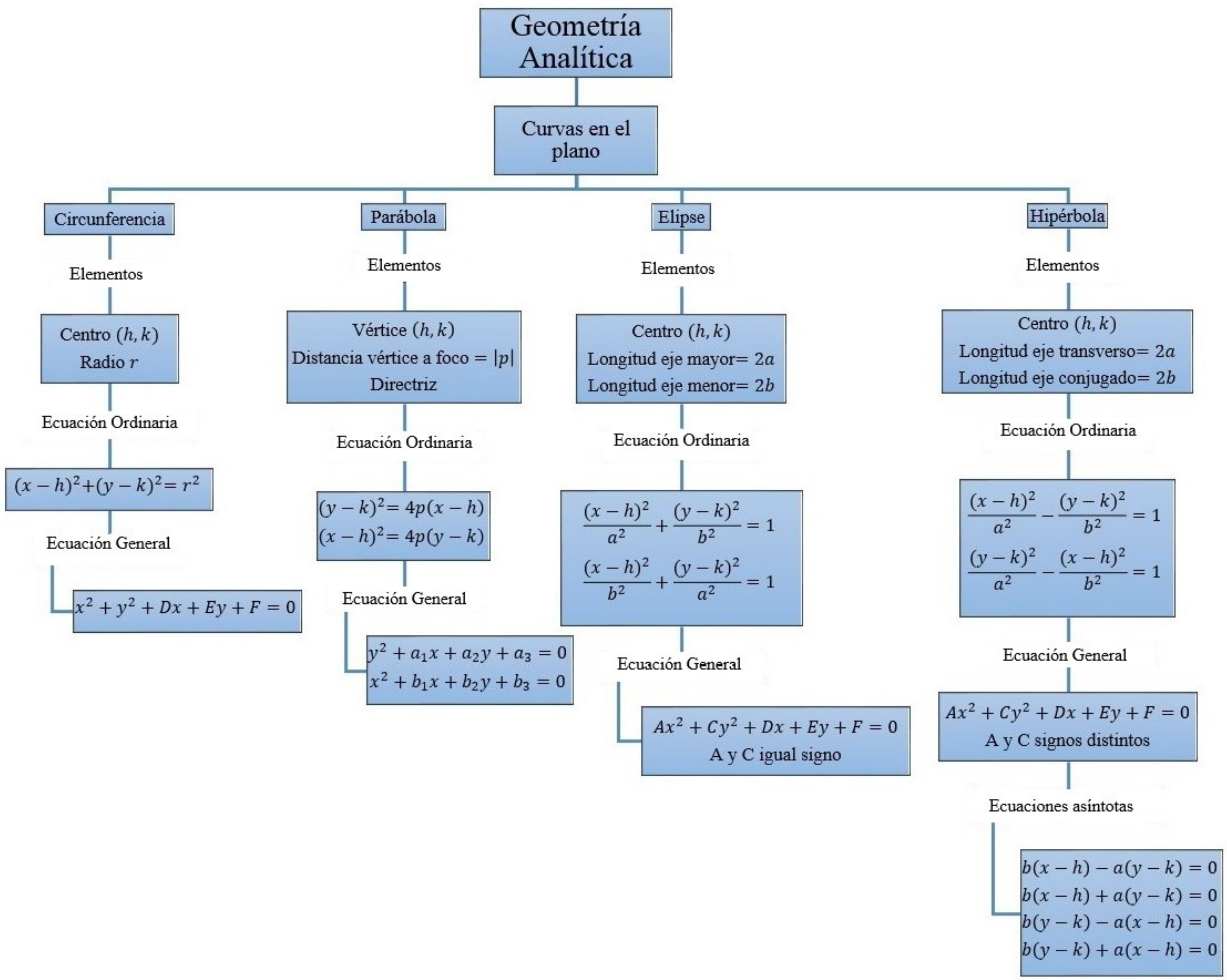
1. Kitchen J., Cálculo. Macgraw-Hill. 1987.
2. Leithold L., El Cálculo. Oxford University Press Mexico, S.A de C.V., Séptima Edición. 1998.

DIRECCIÓN UNIDAD ACADEMICA	DIRECCIÓN DE DOCENCIA

Capítulo 1

Geometría Analítica

Mapa Conceptual



Competencias a lograr

Al término del presente capítulo, el alumno será capaz de:

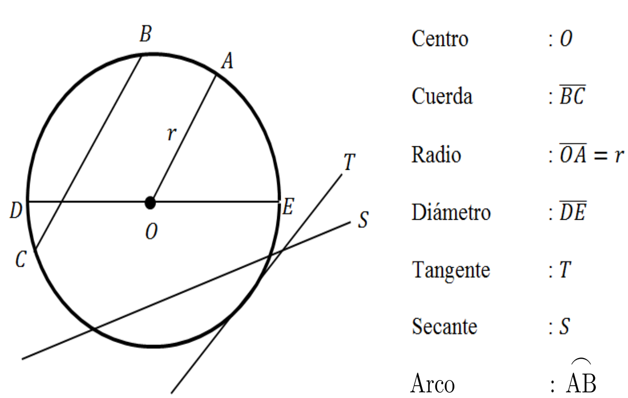
- Determinar si la ecuación de una curva en al plano, representa una circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.
- Conocer los principales elementos de estas curvas.
- Esbozar las curvas en el plano.
- Capacidad para identificar problemas geométricos, planificar estrategias y enfrentarlos.

1.1. La Circunferencia

Definición 1. *Circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro.*

Elementos de una Circunferencia

- **Radio:** Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de ella.
- **Cuerda**: Segmento que une dos puntos distintos, de una misma circunferencia.
- **Diámetro**: Es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia.
- **Secante**: Recta que intersecta a la circunferencia en dos puntos distintos.
- **Tangente**: Recta en el mismo plano de la circunferencia, que la intersecta en un único punto.
- **Arco**: Es una porción de circunferencia limitada por dos puntos de ella.



Algunas Propiedades

1. En una misma circunferencia, a arcos de igual medida, corresponden cuerdas de igual medida (Graficar).

2. Un diámetro perpendicular a una cuerda, divide a la cuerda en dos partes de igual longitud (Graficar).

3. Un diámetro perpendicular a una cuerda, divide al arco que subtiende la cuerda en dos partes de igual longitud (Graficar).

4. En toda circunferencia, las cuerdas de igual longitud equidistan del centro de la circunferencia. (Graficar).

5. Los arcos de una circunferencia comprendidos entre dos cuerdas paralelas son de igual longitud. (Graficar).

6. Todo radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. (Graficar).

7. Las tangentes trazadas desde un punto exterior de una circunferencia tienen igual longitud. (Graficar).

Ecuación de la circunferencia de centro $C(0,0)$ y radio r

Se determinará la ecuación de una circunferencia con centro en el origen del sistema de coordenadas y radio r.

Si O es el origen del sistema y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia, entonces la distancia de O a P se llama radio:

$$\therefore |OP| = r$$

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos se tiene $\sqrt{x^2+y^2} = r$

Elevando al cuadrado ambos miembros, se tiene

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen del sistema y radio r.

Ecuación de la cirfunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r

Si $C(h,k)$ es el centro de la circunferencia y $P(x,y)$ un punto cualquiera de ella, entonces aplicando la definición de circunferencia se tiene:

$$|CP| = r$$

Aplicando la fórmula de distancia se tiene $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$

Elevando al cuadrado ambos miembros, se tiene

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en (h,k) y radio r.

Ejercicios

1. Determinar la ecuación de una circunferencia con centro en el origen del sistema y radio 3.

   Respuesta: $x^2+y^2=9$

2. Dada la siguiente ecuación de una circunferencia $x^2+y^2=5$. Determinar su centro y radio.

   Respuesta: $C(0,0)$, $r=\sqrt{5}$

3. Determinar la ecuación de la circunferencia de centro $(-5,1)$ y radio 2.

   Respuesta: $(x+5)^2+(y-1)^2=4$

4. Determinar si la ecuación $x^2+y^2+6x+4y+12=0$ representa una circunferencia. En caso afirmativo, determinar su centro y radio. (**Sugerencia**: Tratar de dar a la ecuación presentada, la forma de la ecuación de una circunferencia con centro en (h,k))

Forma General de la Ecuación de la Circunferencia

Desarrollando la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y ordenando se obtiene:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$$

Si $-2h = D$, $-2k = E$, $h^2 + k^2 - r^2 = F$

Entonces la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Ahora, partiendo de la ecuacion $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se verá si ella representa una circunferencia.

Asociando, se tiene:

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

Sumando $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$ a ambos lados de la igualdad, para formar cuadrados perfectos, se tiene:

$$\left[x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2\right] = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

Lo anterior es igual a :

$$\left[x + \frac{D}{2}\right]^2 + \left[y + \frac{E}{2}\right]^2 = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

Hay tres casos a considerar

1. Si $-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 > 0$, entonces la ecuación anterior representa una circunferencia de centro $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2}$.

2. Si $-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = 0$, entonces la ecuación representa el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

3. Si $-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 < 0$, entonces la ecuación no representa un lugar geométrico real.

La ecuación $\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$ se llama forma general de la ecuación de la circunferencia.

Ejemplos

1. Reducir las siguientes ecuaciones a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia, hallar las coordenadas del centro y su radio.

   a) $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$

   Solución. Agrupando términos.

   $$(x^2 - 3x) + (y^2 + 5y) = 14$$

   Sumando términos adecuados para completar cuadrados perfectos.

   $$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) = 14 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$

   $$\Longrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{90}{4}$$

   Luego el centro es el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}\right)$ y el radio $r = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

   FIN .... FIN

   b) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$

   Solución. Dividiendo la ecuación por 36 se tiene

   $$x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x - 3y = \frac{-97}{36}$$

   Agrupando términos y sumando términos adecuados para completar cuadrados perfectos se tiene

   $$\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{-97}{36} + \frac{4}{9} + \frac{9}{4}$$

   $$\Longrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

   Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación es el único punto $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

   FIN .... FIN

   c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$

   Solución. Agrupando términos y sumando términos adecuados para completar cuadrados perfectos se tiene

   $$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -29 + 16 + 9$$

$$\Longrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = -4$$

Por tanto, la ecuación no representa ningún lugar geométrico real.

FIN .... FIN

2. Hallar el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10 + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

   Solución. La ecuación tiene la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $r = \sqrt{-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2}$

   Entonces

$$7 = \sqrt{-k + \left(\frac{-8}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2}$$
$$7 = \sqrt{-k + 16 + 25}$$
$$7 = \sqrt{-k + 41}$$

   Elevando al cuadrado y resolviendo se tiene

$$k = -8$$

   FIN .... FIN

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(5, 3)$, $(6, 2)$ y $(3, -1)$.

   Solución. Supongamos que la ecuación buscada, es de la forma general

$$C : x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   La idea es encontrar la tres constantes (D, E y F). Para aquello sabemos que la circunferencia pasa por los tres puntos dados, se pueden hallar los coeficientes sustituyendo las coordenadas x e y en cada ecuación.

   Como $(5, 3) \in C \Longrightarrow 25 + 9 + 5D + 3E + F = 0$

   Como $(6, 2) \in C \Longrightarrow 36 + 4 + 6D + 2E + F = 0$

   Como $(3, -1) \in C \Longrightarrow 9 + 1 + +3D - E + F = 0$

   Luego debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5D + 3E + F & = & -36 \\ 6D + 2E + F & = & -40 \\ 3D - E + F & = & -10 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene, $D = -8$, $E = -2$ y $F = 12$. Sustituyendo estos valores de D, F y F, resulta la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2-8x-2y+12=0$.
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Ejercicios Propuestos

1. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en la intersección de las rectas: $L_1 : 2x + y - 1 = 0$ y $L_2 : x - 3y + 3 = 0$ y que pase por el punto $(1, -1)$.

   Respuesta: $x^2 + (y - 1)^2 = 5$

2. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, -3)$ y tangente a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

   Respuesta: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$

3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 17 = 0$, en el punto $(1, -2)$.

   Respuesta: $y = 2$

4. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos, no colineales $A(1, 2)$, $B(-2, 0)$, $C(-1, -5)$. (**Sugerencia**: Cada punto debe ser solución para la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. En este caso, las incógnitas son D,E y F).

   Respuesta: $17x^2 + 17y^2 - 49x + 65y - 166 = 0$

5. Determinar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados tienen por ecuación: $x = 0$, $y = 0$ y $3x + 4y - 1 = 0$.

   Respuesta: $\left(x - \dfrac{1}{12}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{12}\right)^2 = \dfrac{1}{144}$

6. Determinar la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados y que pase por el punto $(1, 7)$.

7. Determinar la ecuación de la circunferencia que sea tangente al Eje Y, que pase por el punto $(-1, -1)$ y cuyo centro se encuentre en la recta de ecuación: $2x + y + 4 = 0$.

8. Demostrar que los puntos $(-1, -1), (2, 8), (5, 7)$ y $(7, 3)$ pertenecen a la misma circunferencia

9. La circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 5$ intercepta a $x + y - 3 = 0$

a) Encontrar los puntos de intersección.

b) Hallar la longitud de la cuerda.

c) Hallar la distancia de la recta al centro de la circunferencia.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia

a) La circunferencia que pasa por los puntos $A(3,1)$ y $B(-1,3)$ y su centro está situado sobre $3x - y - 2 = 0$.

b) De radio $\sqrt{5}$ y que es tangente a la recta $x - 2y - 1 = 0$ en el punto $(3,1)$.

1.2. Cónicas

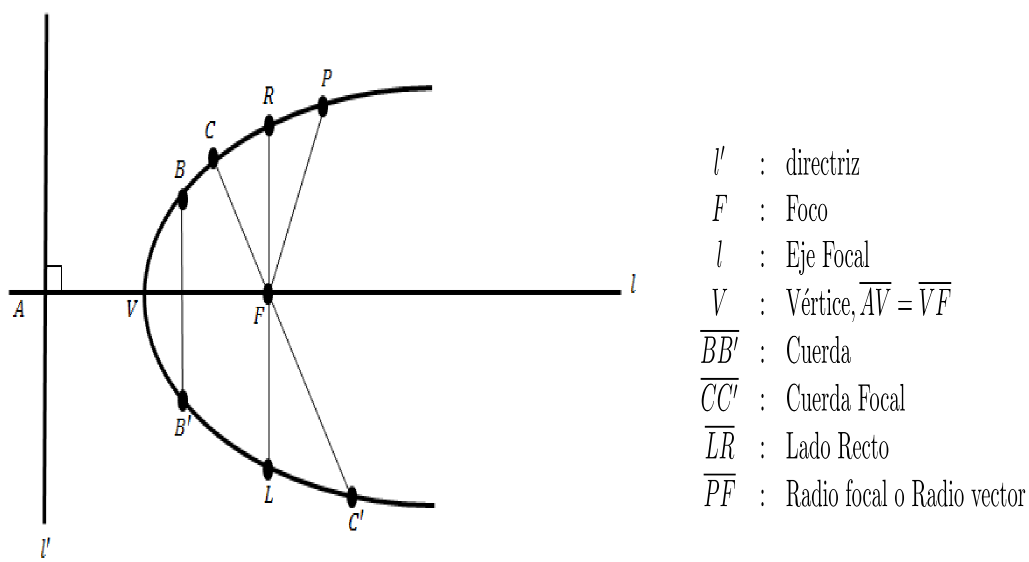
Se estudiarán ciertas curvas muy importantes como la Parábola, Elipse y la Hipérbola, llamadas cónicas.

1.2.1. La Parábola

Definición 2. *Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija es siempre igual a su distancia a un punto fijo que no pertenece a la recta.*

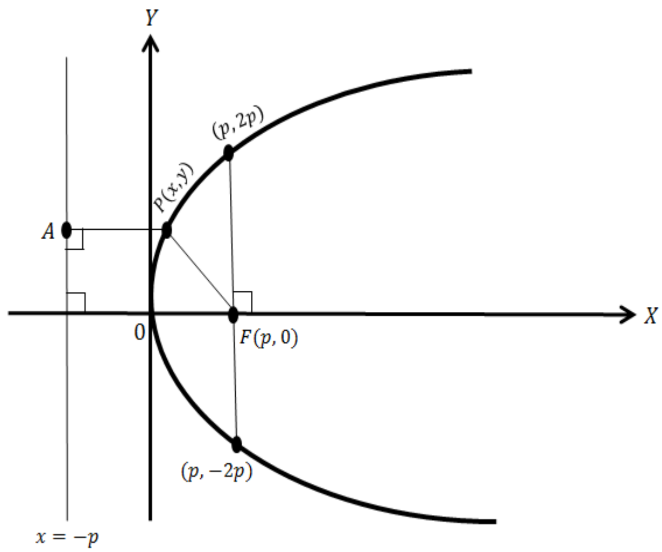
*El punto fijo se llama **Foco** y la recta fija **Directriz**.*

Elementos de una Parábola.



Ecuación de la Parábola de vértice en el origen y Eje Focal un Eje Coordenado

Sea el eje X el eje de la parábola. Por definición de la parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica



$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$$
$$\Longrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, se tiene

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

Finalmente, se obtiene

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Forma Ordinaria ecuación de la Parábola.

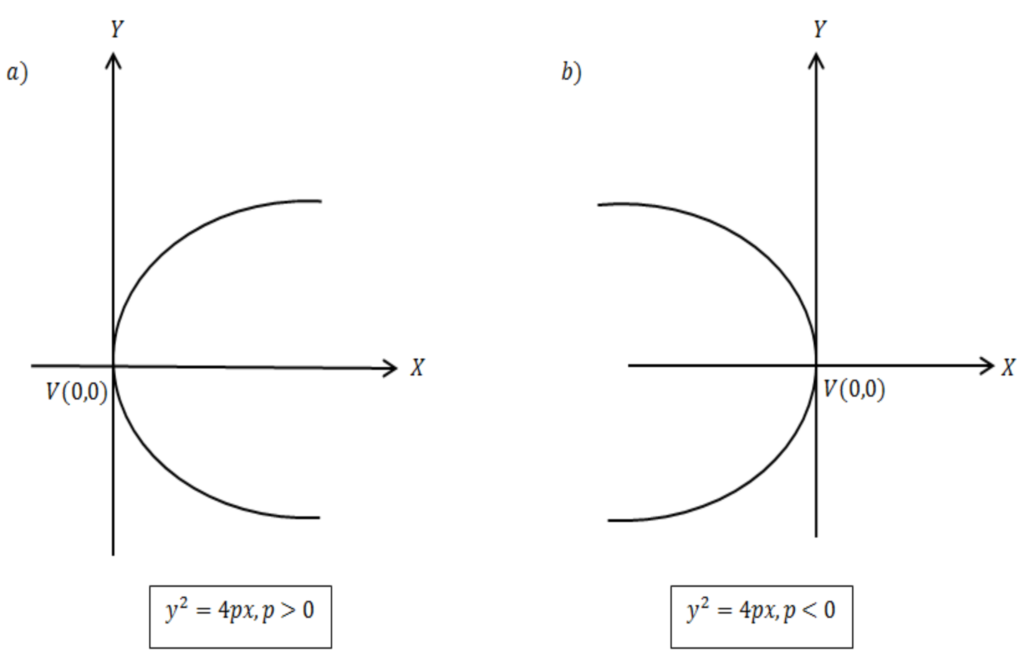
Análisis De La Ecuación

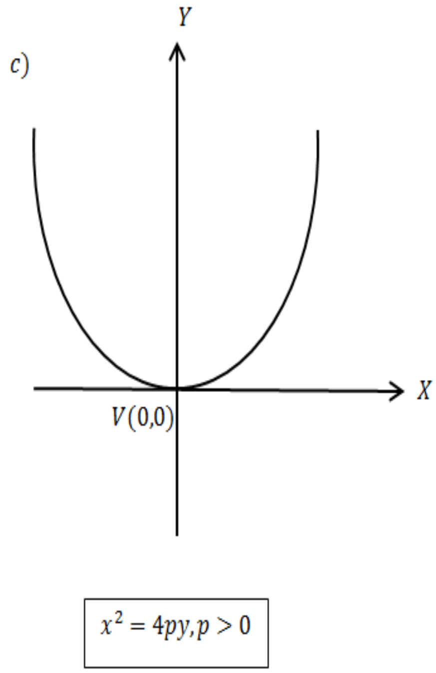
1. **Intersección**: El origen es la única intersección con los ejes.
2. **Simetría**: Al reemplazar ”y” por ”$-y$” la ecuación no varía. Luego hay simetría con respecto al eje X.
3. **Extensión**: $y = \pm 2\sqrt{px}$, y es real si p y x son del mismo signo. Luego hay dos casos:$p > 0$, $p < 0$.

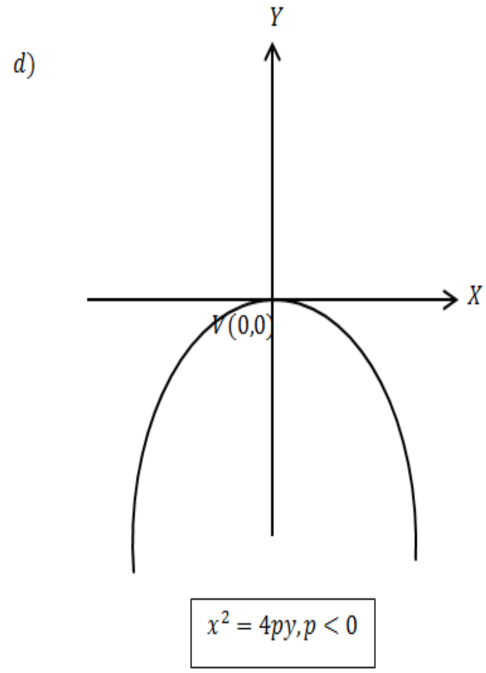
   Si $p > 0 \Rightarrow x > 0$ entonces el Lugar Geométrico (L.G) se encuentra a la derecha de eje Y y la curva se extiende indefinidamente en esa dirección. En este caso se dice que la parábola se abre hacia la derecha. Ahora si $p < 0 \Rightarrow x < 0$ entonces el L.G se encuentra a la izquierda del eje Y y la curva se extiende indefinidamente en esa dirección. Se dice que la parábola se abre hacia la izquierda. La ecuación de la directriz es $x = -p$.
4. No tiene asíntotas verticales ni horizontales.
5. Si $y^2 = 4px$, hacemos $x = p \Rightarrow y = \pm 2p \Rightarrow$ L.L.R= $|4p|$ (Longitud Del Lado Recto).

En forma análoga se demuestra que la ecuación de la parábola con $V(0,0)$ y eje focal el eje Y, es $x^2 = 4py$, siendo $F(0,p)$ el foco.

Igualmente si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo. La ecuación de la directriz es $y = -p$







Ejemplos

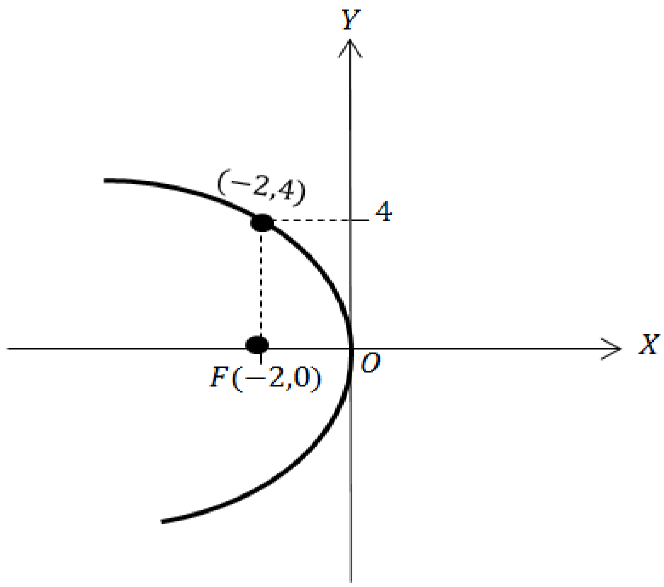
1. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X, pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

   Solución. De acuerdo a los datos dados en el enunciado del problema, la ecuación de la parábola es
   $$y^2 = 4px, p < 0$$
   $(-2, 4) \in$ Parábola $\Longrightarrow 16 = -8p \Longrightarrow p = -2$

   Como $F(p, 0) \Longrightarrow F(-2, 0)$ coordenadas del foco.

   Como $x = -p \Longrightarrow x = 2$ ecuación de la directriz.

   $LLR = |4p| = 8$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar la longitud del segmento.

   Solución. Hacer un gráfico que represente el enunciado. Para determinar los puntos de intersección se resuelve el siguiente sistema.

$$\left.\begin{aligned} y^2 - 4x = 0 \\ x = 2y - 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow y^2 - 8y + 12 = 0 \Longrightarrow (y-6)(y-2) = 0$$

Como $y = 6 \Longrightarrow x = 9$

$$\therefore P_1(9, 6)$$

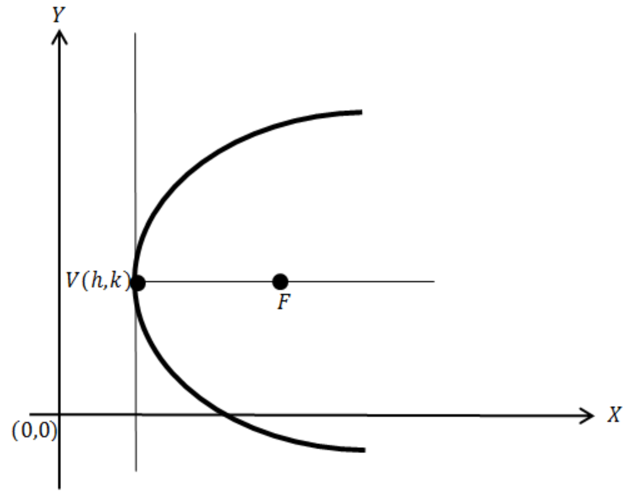
Como $y = 2 \Longrightarrow x = 1$

$$\therefore P_2(1, 2)$$

Luego $d = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Ecuación de la Parábola $V(h,k)$ y Eje Paralelo a un Eje Coordenado



Las ecuaciones de una parábola con vértice $V(h,k)$ son:

1. $\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$ Forma ordinaria de ecuación de la parábola con $V(h,k)$ y eje paralelo al eje X.

2. $\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$ Forma ordinaria de ecuación de la parábola con $V(h,k)$ y eje paralelo al eje Y.

En ambas ecuaciones $|p|$ es la longitud entre el vértice y el foco.

En ellas hay tres constantes arbitrarias e independientes h, k y p. Luego deben tenerse tres condiciones independientes para determinar su ecuación.

Desarrollando $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, se obtiene:

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph \Longrightarrow y^2 - 4px - 2yk + k^2 + 4ph = 0$$

que es de la forma:

$$y^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \tag{1.1}$$

siendo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & -4p \\ a_2 & = & -2k \\ a_3 & = & k^2 + 4ph \end{array} \right.$$

Completando cuadrados en la ecuación (1.1) se verá que representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje X.

Al discutir la ecuación (1.1) se supone que $a_1 \neq 0$. Si $a_1 = 0$, la ecuación toma la forma:

$$y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \tag{1.2}$$

Veamos que sucede con las raíces de (1.2)

1. Si la raíces de (1.2) son reales y desiguales, r_1 y r_2, entonces (1.2) tiene la forma $(y - r_1)(y - r_2) = 0$ y el L.G corresponde a dos rectas, $y = r_1$, $y = r_2$, paralelas al eje X.

2. Si las raíces de (1.2) son reales e iguales, el L.G corresponde a dos rectas coincidentes paralelas al eje X.

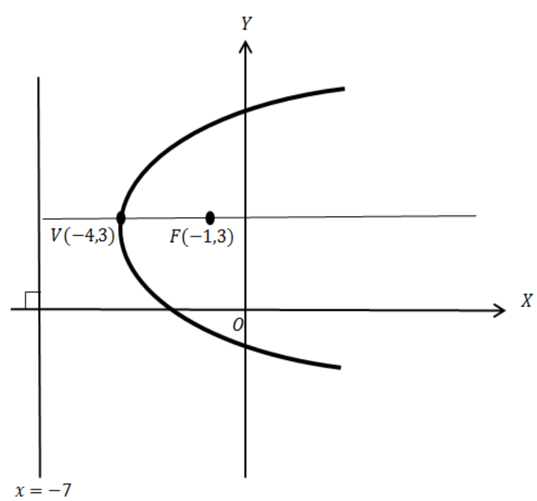
3. Si las raíces de (1.2) son complejas, no existe L.G real.

Una discusión análoga se realiza para la ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar las ecuaciones de su directriz y eje focal.



Solución. Determinando el foco, se tiene $p = -1 + 4 = 3$

$\therefore$ Ecuación Parábola: $(y-3)^2 = 12(x+4)$

Ecuación directriz: $x = -7$

Ecuación eje focal: $y = 3$
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Reducir a la forma ordinaria; encontrar las coordenadas del vértice y foco, las ecuaciones de la directriz, eje focal y la L.L.R de $4y^2 - 48x - 20y = 71$

Solución.

$$4y^2 - 48x - 20y = 71/(:4)$$
$$y^2 - 12x - 5y = \frac{71}{4}$$
$$(y^2 - 5y) = 12x + \frac{71}{4}$$

Formando cuadrado perfecto, se tiene

$$\left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = 12x + \frac{71}{4} + \frac{25}{4}$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24 \Longrightarrow \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x+2)$$

Donde $4p = 12 \Rightarrow p = 3$

$$\therefore V\left(-2, \frac{5}{2}\right)$$
$$F\left(1, \frac{5}{2}\right)$$

Ecuación directriz: $x = -5$, **Ecuación eje focal:** $y = \dfrac{5}{2}$, **L.L.R** $= 12$
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(8,-4)$ y $(3,1)$.

Solución. La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como $(0,0) \in$ parábola $\Longrightarrow F = 0$

Como $(8,-4) \in$ parábola $\Longrightarrow 16 + 8D - 4E + F = 0$

Como $(3,1) \in$ parábola $\Longrightarrow 1 + 3D + E + F = 0$

Resolviendo el sistema se obtiene: $D = -1$, $E = 2$, $F = 0$. Luego la ecuación pedida es: $y^2 - x + 2y = 0$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Ejercicios Propuestos

1. Determinar la ecuación de la parábola, cuya directriz tiene por ecuación: $y = 1$ y foco $F(3, -2)$.

   Respuesta: $(x-3)^2 = -12(y-1)$

2. *a*) Determinar la ecuación de la parábola con vértice $V(2,3)$ y foco $F(0,3)$

   b) Determinar la longitud del lado recto.

   Respuesta: $L.L.R. = 8$

3. Dada: $2x^2 - 3x + 8y + 1 = 0$

   a) Reducirla a la forma canónica.

   Respuesta: $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = -4\left(y - \dfrac{1}{64}\right)$

   b) Determinar las coordenadas del foco.

   c) Determinar las coordenadas del vértice.

   d) Determinar la ecuación de la directriz.

   e) Trazar la gráfica.

4. Deducir la ecuación de la parábola con $V(0,0)$ usando la definición, cuando:

   a) La ecuación de la directriz es $y = 2$.

   b) La ecuacion de la directriz es $x = -1$.

5. Determinar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto medio de la cuerda común a $C_1 : x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 7 = 0$ y cuyo foco es el centro de C_2.

6. Achurar claramente la región limitada por $y = 4, \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1, x = \sqrt{2y}, x = -2 + \sqrt{4-y}$. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección correspondiente a la región.

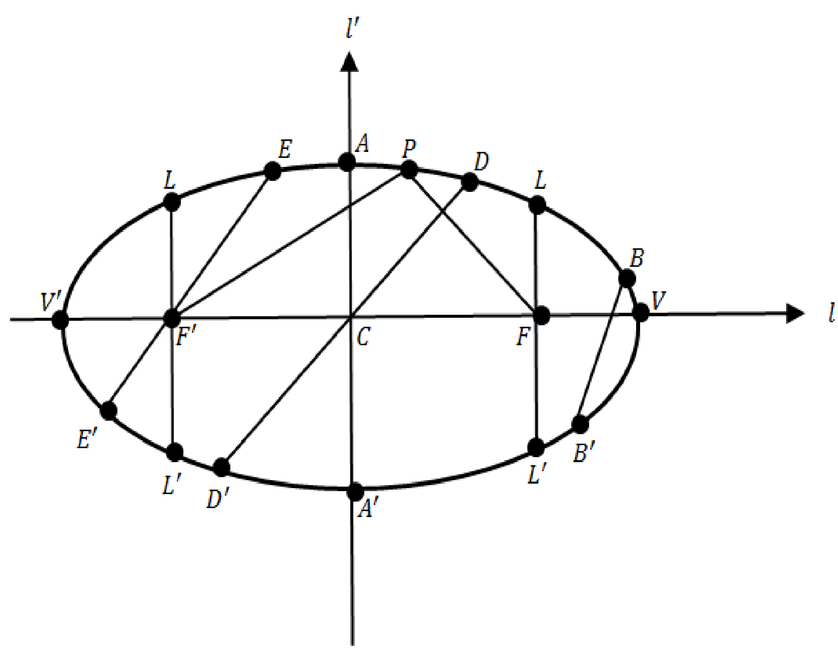
7. Tres cuidades $A(-6,0), B(-3,2)$ y $C(3,-6)$ están unidas por una carretera de trayectoria parabólica con eje focal vertical. Determinar la posición de una ciudad D ubicada en la misma carretera, entre B y C, y sobre $x = \frac{1}{2}$.

1.2.2. La Elipse

Definición 3. *Es el L.G. de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.*

Los dos puntos fijos se llaman focos. La definición excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

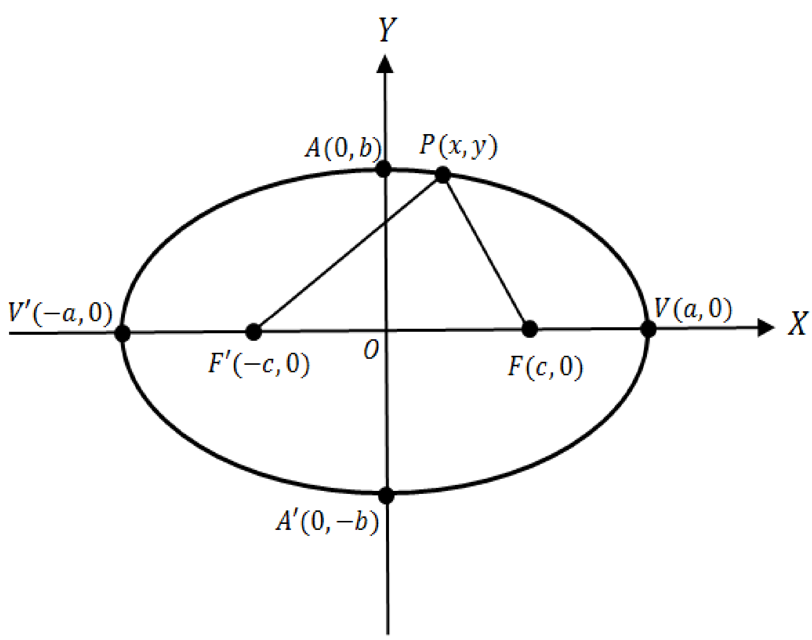
Elementos de la Elipse.



C	:	Centro
$F \quad y \quad F'$	:	Focos
$V \quad y \quad V'$	:	Vértices
$Recta \quad l$	:	Eje Focal
$Recta \quad l'$	:	Eje Normal
$\overline{VV'}$	:	Eje Mayor
$\overline{AA'}$	:	Eje Menor
$\overline{BB'}$	:	Cuerda
$\overline{EE'}$	:	Cuerda Focal
$\overline{LL'}$	:	Lados Rectos
$\overline{DD'}$	:	Diámetro
$\overline{F'P} \quad y \quad \overline{PF}$	:	Radios vectores de P

Ecuación Elipse de centro en el Origen y Ejes de la Elipse, los Ejes Coordenados.

Sea la elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje X. O es el punto medio entre F y F'. Sea $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ sus coordenadas y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse.



Por definición $|\overline{F'P}| + |\overline{FP}| = k = 2a$, siendo $2a > 2c \Longrightarrow a > c \Longrightarrow a^2 > c^2 \Longrightarrow a^2 - c^2 > 0$. Se define $\boxed{a^2 - c^2 = b^2}$

$$\begin{aligned}
\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad /()^2 \\
x^2+2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2 \\
xc-a^2 &= -a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad /()^2 \\
x^2c^2-2a^2cx+a^4 &= a^2x^2-2xca^2+a^2c^2+a^2y^2 \\
x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \\
\therefore b^2x^2+a^2y^2 &= a^2b^2
\end{aligned}$$

Finalmente dividiendo la ecuación por a^2b^2, se obtiene

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

La ecuación anterior representa la Forma Ordinaria de la ecuación de la Elipse.

ANÁLISIS

1. Intersecciones con los Ejes Coordenados.

   a) Intersecciones eje X: Si $y=0 \Longrightarrow x=\pm a \Longrightarrow V'(-a,0)$ y $V(a,0)$

      $\therefore$ La longitud del eje mayor $=2a$

   b) Intersecciones eje Y: Si $x=0 \Longrightarrow y=\pm b \Longrightarrow A(0,b)$ y $A'(0,-b)$

      $\therefore$ La longitud del eje menor $=2b$

2. La elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

3. Extensión:

   $$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \Longrightarrow x\in\mathbb{R}, \forall y\in[-b,b].$$

   $$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \Longrightarrow y\in\mathbb{R}, \forall x\in[-a,a].$$

   Luego la elipse es una curva cerrada que no tiene asíntotas horizontales ni verticales.

4. Como la abscisa de F es $c \Longrightarrow y=\pm\frac{b^2}{a} \Longrightarrow L.L.R.=\frac{2b^2}{a}$. Análogamente para F'.

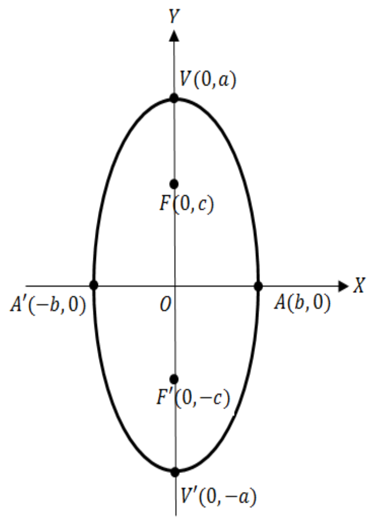
5. La **excentricidad** de una elipse se define como

   $$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

   Con $a>c$, $e<1$

6. Si la elipse tiene su centro en el origen y el Eje Focal coincide con el eje Y, haciendo un desarrollo análogo al anterior,se obtiene que su ecuación es

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$



Observación 4. *Siempre el denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.*

Ejemplos

1. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, longitudes eje mayor y menor, excentricidad y la L.L.R. de $16x^2+25y^2=400$.

   Solución.

   a) Coordenadas de los vértices: $16x^2+25y^2/:400 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

   $a^2=25 \Longrightarrow a=5 \quad$ y $\quad b^2=16 \Longrightarrow b=4$

   $\therefore V'(-5,0) \quad$ y $\quad V(5,0)$

   b) Coordenadas de los Focos: $a^2-c^2=b^2 \Longrightarrow 25-c^2=16 \Longrightarrow c^2=9 \Longrightarrow c=3$

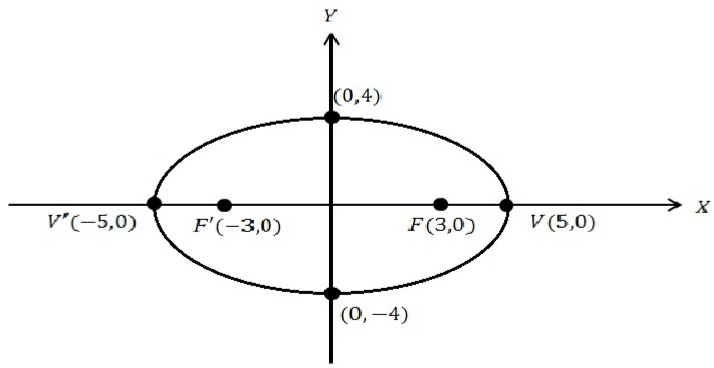
   $\therefore F'(-3,0) \quad$ y $\quad F(3,0)$

   c) Longitudes eje mayor y menor:

   longitud eje mayor$=2a=10$ y longitud eje menor$=2b=8$

d) excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$ y L.L.R.$= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{32}{5}$

e) Gráficamente



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X, y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

Solución. La ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \iff a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

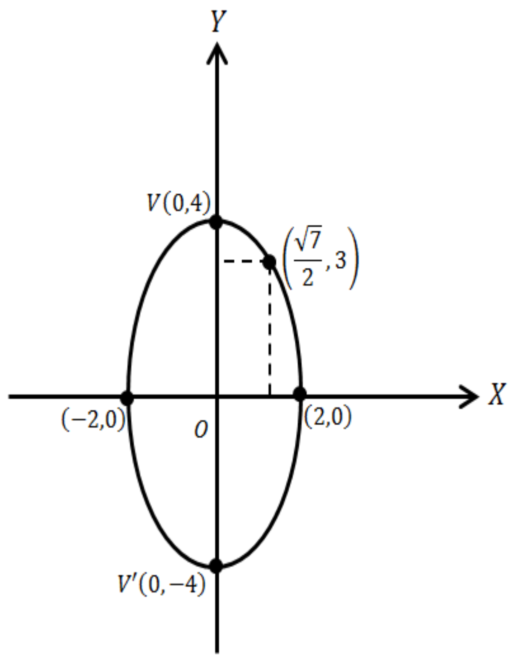
Como $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}, 3\right) \in$ elipse $\Longrightarrow \dfrac{7}{4}a^2 + 9b^2 = a^2b^2$ como $a = 2b \Longrightarrow 7b^2 + 9b^2 = 4b^4$

$\Longrightarrow 16b^2 - 4b^4 = 0 \Longrightarrow 4b^2(4 - b^2) = 0 \Longrightarrow b^2 = 0 \vee 4 - b^2 = 0 \Longrightarrow b^2 = 4 \Longrightarrow a^2 = 16$

$\therefore$ La ecuación pedida es

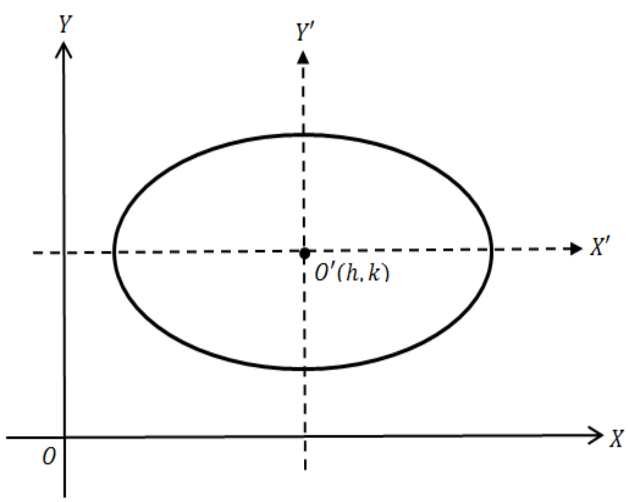
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Gráficamente :



FIN .... FIN

Ecuación de la Elipse Centro (h, k) y Ejes Paralelos a los Ejes Coordenados.



Las ecuaciones de una elipse $C(h,k)$ son:

1. $\boxed{\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1}$
   Forma Ordinaria Ecuación Elipse $C(h,k)$, eje focal paralelo al Eje X.

2. $\boxed{\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1}$
   Forma Ordinaria Ecuación Elipse $C(h,k)$, eje focal paralelo al Eje Y.

Considerando la ecuación 1), desarrollándola y ordenándola, se obtiene:

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

que es de la forma:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1.3}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} A &= b^2 \\ C &= a^2 \\ D &= -2b^2h \\ E &= -2a^2k \\ F &= b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2 \end{aligned}$$

Evidentemente los coeficientes de A y C son del mismo signo.

¿Toda ecuación de la forma (1.3) representará siempre una elipse?

Para responder la ecuación (1.3) se llevará a la forma ordinaria.

$$\begin{aligned} A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right) &= \frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F \\ A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2 &= \frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC} \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados de la igualdad por AC, se obtiene

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$$

Sea $\dfrac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} = M$. Si $M \neq 0$ la ecuación queda:

$$\frac{\left(x + \dfrac{D}{2A}\right)^2}{MC} + \frac{\left(y + \dfrac{E}{2C}\right)^2}{MA} = 1$$

que es la forma ordinaria de la ecuación de la elipse.

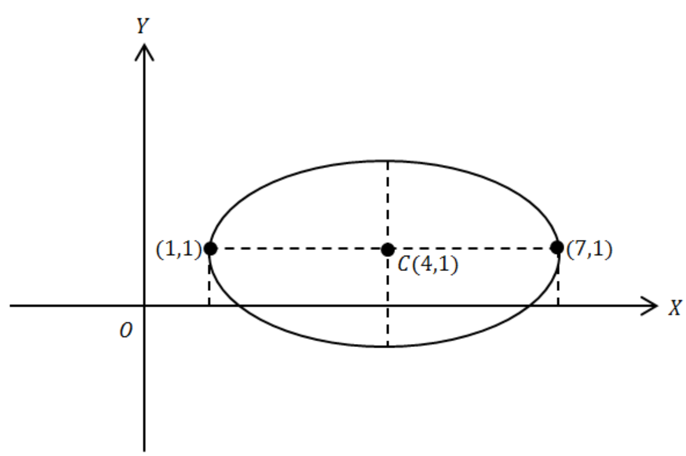
Como A y C son positivos, para representar una elipse, M debe ser positivo. Su denominador $4A^2C^2$ es positivo, luego el signo de M dependerá de su numerador. En resumen si:

1. $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$, $(1,3)$ representa una elipse.
2. $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$, $(1,3)$ representa el punto $\left(\dfrac{-D}{2A}, \dfrac{-E}{2C}\right)$, llamado elipse punto.
3. $CD^2 + AE^2 - 4ACF < 0$, $(1,3)$ no representa un L.G. real.

Ejemplos

1. Los vértices de una elipse son los puntos $(1,1)$ y $(7,1)$ y su excentricidad es $\dfrac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

   Solución.



   a) Ecuación de la elipse:

$\therefore C(4,1)$ punto medio del eje mayor.

$2a = 6 \Longrightarrow a = 3$

Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow c = 1$

Luego $a^2 - b^2 = 9 - b^2 = 1 \Longrightarrow b^2 = 8$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

b) Coordenadas de los focos:

$F(h+c,1) = F(5,1) \quad \text{y} \quad F'(h-c,1) = F'(3,1)$

c) Longitud eje mayor y eje menor:

longitud eje mayor $= 2a = 6$.

longitud eje menor $= 2b = 4\sqrt{2}$.

d) $L.L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{16}{3}$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Reducir a la forma ordinaria, y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la de cada lado recto y la excentricidad, si

$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$.

Solución.

a) Forma Ordinaria.

$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$ llevándola a la forma ordinaria, se tiene:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4(y^2 - 2y + 1) &= 32 + 4 \\ 9x^2 + 4(y-1)^2 &= 36 \qquad /:36 \\ \therefore \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

b) Coordenadas del centro: $C(0,1)$

c) Coordenadas de los vértices: Se tiene que $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$, $b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

$\therefore V(0,4) \quad \text{y} \quad V'(0,-2)$

d) Coordenadas de los focos: $a^2 - b^2 = c^2 \Longrightarrow 9 - 4 = c^2 \Longrightarrow c^2 = 5 \Longrightarrow c = \sqrt{5}$

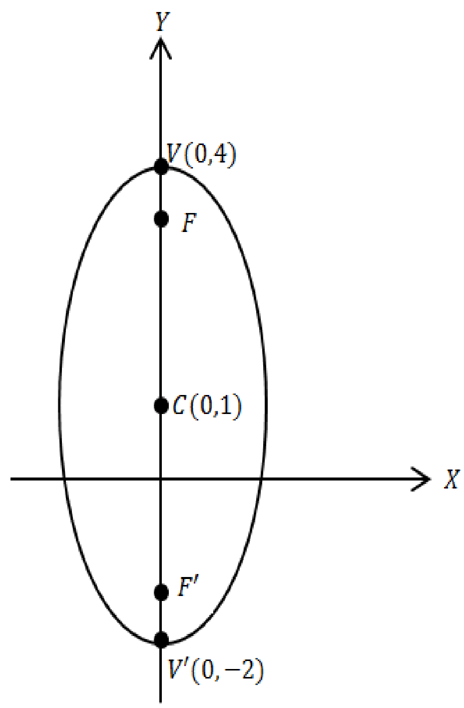
$\therefore F(0, 1 + \sqrt{5}) \quad$ y $\quad F'(0, 1 - \sqrt{5})$

e) Longitud eje mayor y eje menor:

longitud eje mayor $= 2a = 6$.

longitud eje menor $= 2b = 4$.

f) $L.L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{8}{3} \quad$ y $\quad e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Ejercicios Propuestos

1. Si $(2,-1)$ Centro de una elipse, longitud del eje mayor mide 10, eje paralelo al eje X y la longitud del eje menor mide 8.

   Determinar:

   a) Ecuación de la elipse.

      Respuesta: $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

   b) Excentricidad.

   c) Coordenadas de los focos.

   d) Coordenadas de los vértices.

2. Dada la elipse de ecuación: $2x^2+y^2=4$. Determinar todos sus elementos y graficarla.

3. Dada la siguiente ecuación: $x^2+4y^2+4x=0$, reducirla a la forma ordinaria, determinar todos sus elementos y graficarla.

   Respuesta: $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. Los focos de una elipse son los puntos $(-4,-2)$ y $(-4,-6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la elipse y su excentricidad.

   Respuesta: $\dfrac{(x+4)^2}{12}+\dfrac{(y+4)^2}{16}=1; \quad e=\dfrac{1}{2}.$

5. El centro de una elipse es el punto $(2,-4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2,-4)$ y $(-1,-4)$, respectivamente. Determinar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de eje menor y la de cada lado recto.

6. Achurar claramente la región limitada por $y=4, \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1, x=\sqrt{2y}, y=2\sqrt{-x^2-4x}$, indicando las coordenadas de los puntos de intersección correspondiente a la región.

7. Determinar la ecuación de la elipse cuyos focos están en $y=-5$, su centro sobre $x=-3$, su eje menor es igual a 16 y su $e=\frac{3}{5}$.

   Respuesta:$\dfrac{(x+3)^2}{100}+\dfrac{(y+5)^2}{64}=1$

8. Determinar cuales de los puntos $A(-2,3), B(2,-2), C(2,-4), D(-4,-3), E(3,-1), F(3,-2), G(2,1), H(0,15), I(0,16)$ están en la elipse $8x^2+5y^2=77$.¿ Cuáles están dentro de la elipse?¿ Cuáles están afuera?.

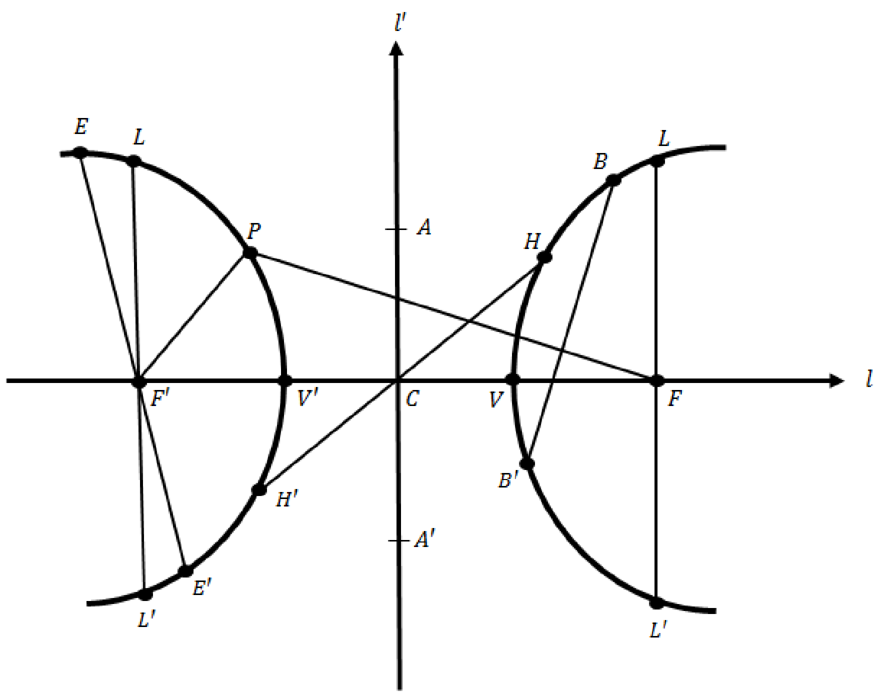
1.2.3. La Hipérbola

Definición 5. *Es el L.G. de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, es siempre igual a una constante, positiva y menor que la distancia entre ellos. Los puntos fijos se llaman focos.*

Esta definición excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a exepción del segmento comprendido entre ellos. Los focos y el punto medio de este segmento no pertenecen al L.G.

La hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita.

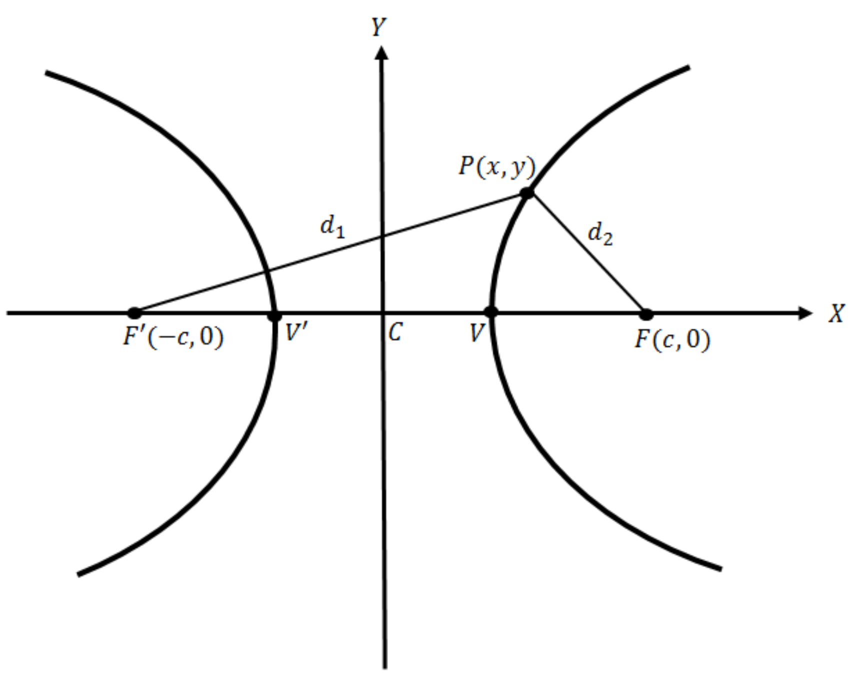
Elementos de una Hipérbola.



C	:	Centro
$F \;\; y \;\; F'$	:	Focos
$V \;\; y \;\; V'$	:	Vértices
$Recta \;\; l$	:	Eje Focal
$Recta \;\; l'$	:	Eje Normal
$\overline{AA'}$	:	Eje Conjugado
$\overline{BB'}$	:	Cuerda
$\overline{EE'}$	:	Cuerda Focal
$\overline{LL'}$	:	Lados Rectos
$\overline{HH'}$	:	Diámetro
$\overline{VV'}$	:	Eje Transverso
$\overline{F'P} \;\; y \;\; \overline{FP}$	:	Radios vectores de P

Ecuación Hipérbola $C(0,0)$ y Eje Focal uno de los Ejes Coordenados.

Dada una hipérbola con $C(0,0)$ y eje focal eje X. Sean $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ los focos y $P(x,y)$ un punto cualquiera de ella.



Aplicando la definición de hipérbola se tiene que:

$$|d_1 - d_2| = k = 2a, \quad 2a < 2c \Longrightarrow a < c \Longrightarrow a^2 < c^2 \Longrightarrow c^2 - a^2 > 0$$

Se define $\boxed{b^2 = c^2 - a^2}$

$$\begin{aligned}
\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad /()^2 \\
x^2+2xc+c^2+y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
4xc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad / : 4 \\
xc - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad /()^2 \\
x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2) \\
\text{Pero} \quad c^2 - a^2 &= b^2 \\
\therefore b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2
\end{aligned}$$

Finalmente dividiendo la ecuación por a^2b^2, se obtiene

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

La ecuación anterior representa la forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola con $C(0,0)$ y eje focal, eje X.

ANÁLISIS

1. Intersecciones con los Ejes Coordenados.

   a) Intersecciones eje X: Si $y = 0 \Longrightarrow x = \pm a \Longrightarrow V'(-a,0)$ y $V(a,0)$

   $\therefore$ La longitud del eje transverso $= 2a$

   b) Intersecciones eje Y: Si $x = 0 \Longrightarrow y \notin \mathbb{R}$. Sin embargo se consideran los puntos $A(0,b)$ y $A'(0,-b)$ como extremos del eje conjugado.

   $\therefore$ La longitud del eje conjugado $= 2b$

2. Simetría: hay con respecto a los ejes y al origen.

3. Extensión:

   a) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \Longrightarrow y \in \mathbb{R}, \forall x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

   b) $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2} \Longrightarrow x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$.

   Luego la hipérbola no es una curva cerrada.

4. Asíntotas: No tiene asíntotas horizontales ni verticales, pero si tiene dos asíntotas oblicuas que se estudiarán más adelante.

5. Como la abscisa de F es $c \Longrightarrow y = \pm\dfrac{b^2}{a} \Longrightarrow L.L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$. Análogamente para F'.

6. La **excentricidad** de una hipérbola se define como

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

   Con $a < c$, $e > 1$.
   Si la hipérbola tiene su centro en el origen $C(0,0)$ y el Eje Focal coincide con el eje Y, haciendo un desarrollo análogo al anterior, obtenemos que su ecuación es

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Observación 6. *La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso.*

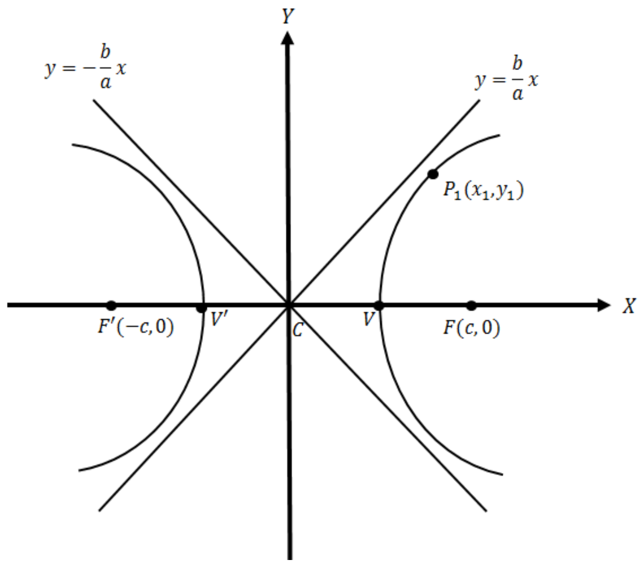
Asíntotas de la Hipérbola.

Hipérbola Equilátera o Rectangular.

Tenemos: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$\therefore y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

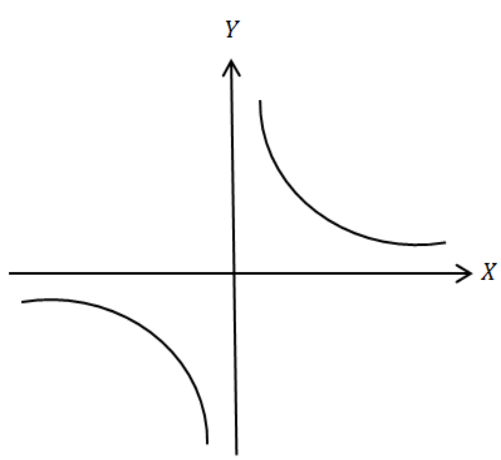
En esta ecuación si x aumenta sin límite $1-\dfrac{a^2}{x^2} \longrightarrow 1$ y por lo tanto $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, que representa dos rectas $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = -\dfrac{b}{a}x$ que son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola.



Observación 7. *Si* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ *es la ecuación de una hipérbola, fácilmente se determinan sus asíntotas haciendo* $b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \Longrightarrow (bx - ay)(bx + ay) = 0$ *y luego* $bx - ay = 0$, $bx + ay = 0$ *son las ecuaciones de ellas.*

Hipérbola Equilátera o Rectangular.

Sea la hipérbola para la cual $a = b$, luego la ecuación de ella es $x^2 - y^2 = a^2$ llamada hipérbola equilátera por tener los ejes transverso y conjugado iguales, siendo $x - y = 0$, $x + y = 0$ sus asíntotas. Estas rectas son perpendiculares entre si, por esta razón se le llama también hipérbola rectangular. Una ecuación útil de la hipérbola equilátera es $xy = k$, k constante distinta de cero. Es una hipérbola que tiene de asíntotas a los ejes coordenados.



Ejemplos

1. Hallar las coordenadas de los vértices y los focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto para $9y^2 - 4x^2 = 36$.

   Solución.

$$9y^2 - 4x^2 = 36 \Longrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

   $a^2 = 4 \Longrightarrow a = 2$

   $b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

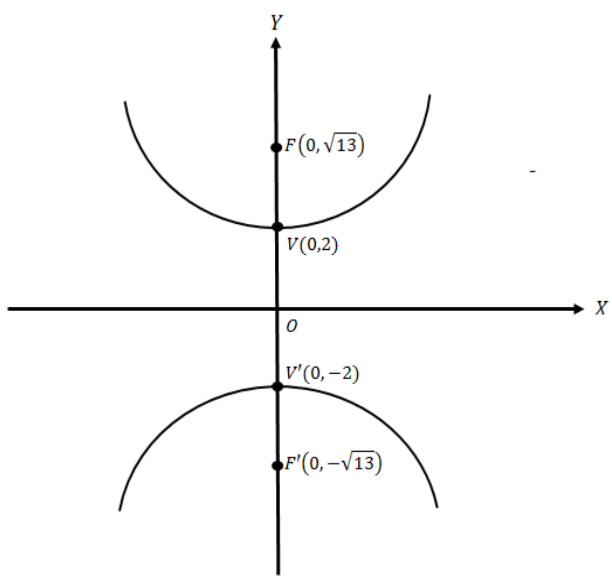
   $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

   $\therefore V(0,2)$ y $V'(0,-2)$, $F(0,\sqrt{13})$ y $F'(0,-\sqrt{13})$

   longitud del eje transverso$= 2a = 4$, longitud del eje conjugado$= 2b = 6$

   $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, L.L.R.$= \dfrac{2b^2}{a} = 9$

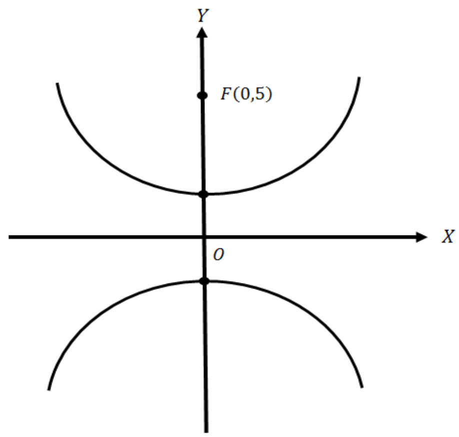
   Gráficamente



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto $(0,5)$ y la excentricidad es igual a 3. Hallar la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

Solución.



$e = \dfrac{c}{a} = 3 \quad$ y $\quad c = 5 \Longrightarrow a = \dfrac{5}{3} \Longrightarrow a^2 = \dfrac{25}{9}$

Ademas $c^2 - a^2 = b^2 \Longrightarrow 25 - \dfrac{25}{9} = b^2 \Longrightarrow b^2 = \dfrac{200}{9}$.

Luego debemos formar la ecuación $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.

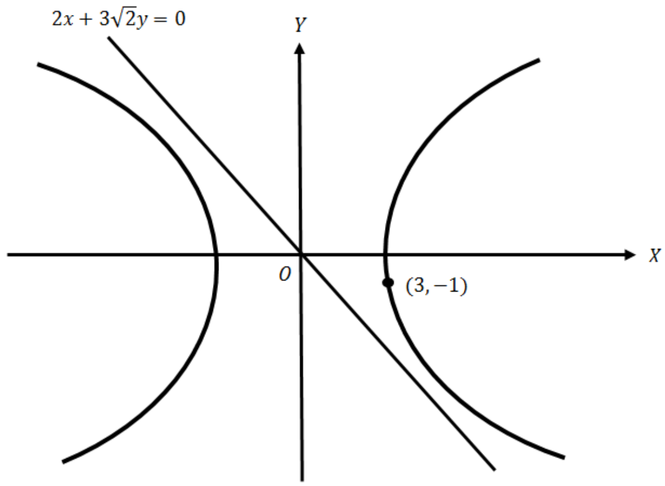
$$\therefore \frac{y^2}{\frac{25}{9}} - \frac{x^2}{\frac{200}{9}} = 1 \Longrightarrow 72y^2 - 9x^2 = 200$$

L.L.R.$= \dfrac{2b^2}{a} = 2 \cdot \dfrac{200}{9} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{80}{3}$

FIN .... FIN

3. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3, -1)$, su centro está en el origen, su eje transverso sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $2x+3\sqrt{2}y = 0$.

Solución.



$\left(2x + 3\sqrt{2}y\right)\left(2x - 3\sqrt{2}y\right) = k$

$4x^2 - 18y^2 = k$

como $(3, -1) \in$ hipérbola $\Longrightarrow 36 - 18 = k \Longrightarrow k = 18$

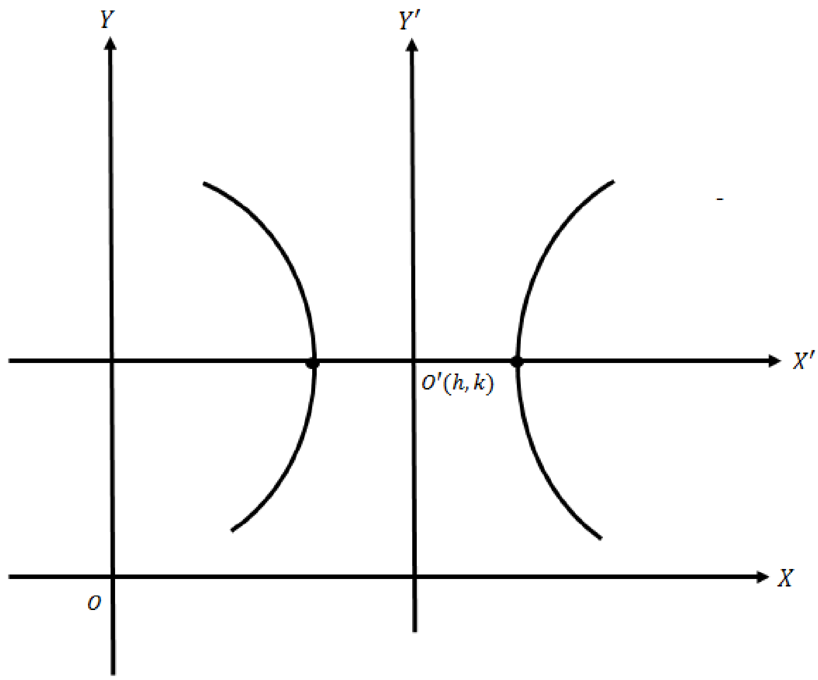
$$\therefore 4x^2 - 18y^2 = 18 \qquad / : 2$$

$$2x^2 - 9y^2 = 9$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Ecuación Hipérbola Centro (h, k) y Ejes Paralelos a los Ejes Coordenados.

Consideremos una hipérbola con centro $O'(h, k)$ y eje focal paralelo al eje X.



La ecuaciónes de una hipérbola $C(h, k)$ son:

$\boxed{\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$ Forma ordinaria ecuación hipérbola $C(h, k)$ y eje focal paralelo eje X.

$\boxed{\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$ Forma ordinaria ecuación hipérbola $C(h, k)$ y eje focal paralelo eje Y.

Ejemplos

1. Reducir la ecuación $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ a la forma ordinaria y determinar coordenadas del centro, vértices y focos, longitud ejes transverso y conjugado, longitud lado recto, excentricidad y ecuación de las asíntotas.

   Solución.

   a) Forma ordinaria: $4(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 4y + 4) = -64 + 64 - 36$

   $$9(y-2)^2 - 4(x+4)^2 = 36 \qquad / : 36$$

   $$\therefore \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$$

   b) Coordenadas del centro: $C(-4, 2)$

   c) Coordenadas de los vértices y focos:

   $a^2 = 4 \Longrightarrow a = 2, \quad b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3, \quad c^2 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

   $\therefore V'(-4, 0) \quad$ y $\quad V(-4, 4), \qquad F'\left(-4, 2 - \sqrt{13}\right) \quad$ y $\quad F'\left(-4, 2 + \sqrt{13}\right)$

   d) longitud eje transverso$= 2a = 4$ y longitud eje conjugado$= 2b = 6$

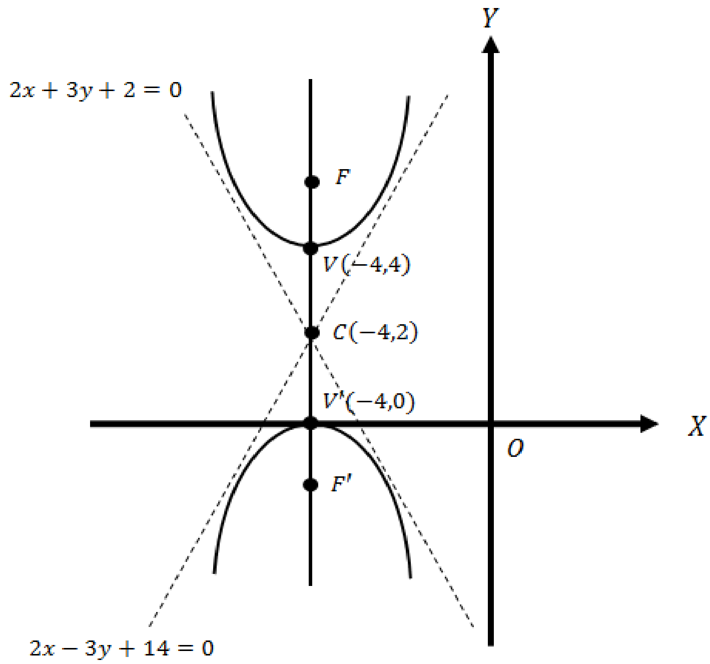
   e) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ y L.L.R.$= \dfrac{2b^2}{a} = 9.$

   f) Asíntotas:

   $3(y-2) - 2(x+4) = 0 \Longrightarrow 2x - 3y + 14 = 0$

   $3(y-2) + 2(x+4) = 0 \Longrightarrow 2x + 3y + 2 = 0$

g) Gráficamente:



FIN .... FIN

2. Hallar el ángulo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

Solución.

$9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) = -44 + 36 - 1$

$(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 9$

$\Longrightarrow$ Asíntotas: $3x - y - 7 = 0 \Longrightarrow m_1 = 3$ y $3x + y - 5 = 0 \Longrightarrow m_2 = -3$

$$\therefore tg(\alpha) = \frac{-3-3}{1-9} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Longrightarrow \alpha = 36{,}87^\circ$$

FIN .... FIN

3. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

Solución.

$(2x + y - 3)(2x - y - 1) = k$

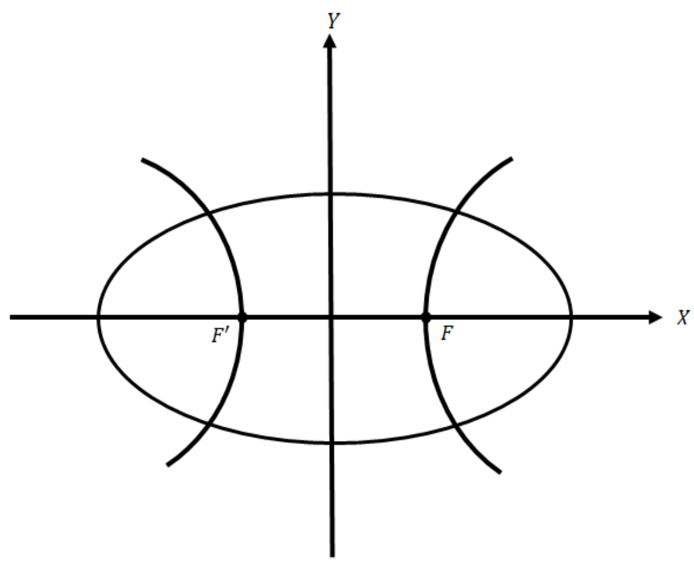
como $(4, 6) \in$ hipérbola $\Longrightarrow 11 \cdot 1 = k \Longrightarrow k = 11$

$$\begin{aligned}
\therefore 4x^2 - 2xy + 2xy - y^2 - y - 6x + 3y + 3 - 2x &= 11 \\
4x^2 - 8x - y^2 + 2y &= 8 \\
4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) &= 8 + 4 - 1 \\
4(x-1)^2 - (y-1)^2 &= 11 \\
\frac{(x-1)^2}{\frac{11}{4}} - \frac{(y-1)^2}{11} &= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Demostrar que la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$ y la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 3$ tienen los mismos focos.

Solución.



a) Análisis para la ecuación de la elipse.

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$a^2 = 6 \Longrightarrow a = \sqrt{6}$

$b^2 = 2 \Longrightarrow b = \sqrt{2}$

$c^2 = 4 \Longrightarrow c = 2$

$$\therefore F'(-2, 0) \quad \text{y} \quad F(2, 0) \qquad (*)$$

b) Análisis para la ecuación de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$$

$a^2 = 3 \Longrightarrow a = \sqrt{3}$

$b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$

$c^2 = 4 \Longrightarrow c = 2$

$$\therefore F'(-2,0) \quad \text{y} \quad F(2,0) \qquad (**)$$

Luego de $(*)$ y $(**)$ los focos son los mismos.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Observación 8. *Si los coeficientes A y C difieren del signo, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados o un par de rectas que se cortan.*

Ejemplo 9. *Determinar que curva representa la ecuación $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$.*

Solución.

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 - 2x + 1 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 - 4y^2 &= 0 \\ (x-1)^2 - 4y^2 &= 0 \\ (x-1-2y)(x-1+2y) &= 0 \end{aligned}$$

$x - 1 - 2y = 0 \Longrightarrow x - 2y - 1 = 0$

$x - 1 + 2y = 0 \Longrightarrow x + 2y - 1 = 0$

$\therefore$ *representa dos rectas que se cortan.*

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Ejercicios Propuestos

1.
    a) Escribir la ecuación de la hipérbola con centro en $(-2,1)$, con eje transverso de longitud 6, paralelo al eje X y con un eje conjugado de longitud 8.
    b) Determinar: excentricidad, coordenadas de los focos y de los vértices.
    c) Determinar: las ecuaciones de las asíntotas.
    d) Gráficar la hipérbola.

2. Gráficar la hipérbola de ecuación: $4x^2 - y^2 + 36 = 0$.

3. Dada la siguiente ecuación: $x^2 - y^2 - 2x - y + 1 = 0$. reducir a la forma ordinaria y gráficarla.
   Respuesta: $\dfrac{\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{4}} - \dfrac{(x-1)^2}{\dfrac{1}{4}} = 1$
   Respuesta: $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

4. Determine el área de la región limitada por $2x - 3y - 5 = 0, y = 5$ y las asíntotas de $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 70 = 0$
   Respuesta: $\dfrac{63}{2}$

5. Hallar la ecuación de la elipse que tiene los mismos focos que $7x^2 - 9y^2 = 63$ y su excentricidad es igual a la mitad de la excentricidad de la hipérbola.
   Respuesta: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

6. Achurar y calcular el área de la región encerrada por la tangente trazada por el extremo superior del eje menor de $x = 1 - 2\sqrt{-3 - y^2 - 4y}$ y las asítotas de $x^2 - 4y^2 - 2x - 24y - 35 = 0$.
   Respuesta: 8

7. La longitud del lado recto de una hipérbola es $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Si ella tiene su centro en el origen y uno de sus lados rectos está sobre la misma recta que uno de los lados rectos de $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$, determinar la ecuación de la hipérbola y la de sus asíntotas.
   Respuesta: $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{1} = 1$; $x - \sqrt{3}y = 0$, $x + \sqrt{3}y = 0$

8. Sean: $x = 4$, $y = -\frac{1}{3}\sqrt{32 - 4x^2 + 8x}$, $3x - y + 6 = 0$, $y = 6 - 2\sqrt{x}$

    a) Identificarlas.

b) En un mismo sistema de ejes coordenados graficarlas y achurar el área de la región que ellas encierran.

c) Determinar las coordenadas de los puntos donde las curvas dadas se intersectan.

Respuesta: c) $(-2,0),(4,0),(4,2),(0,6)$

9. Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento determinado por las intersecciones de $18y - x^2 - 6x + 27 = 0$ con la parte negativa del eje X y del eje Y.
Respuesta: $\left(x+\frac{9}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{333}{16}$

10. Sea $C : x^2+24y^2-144y+212 = 0$. Determinar el área de la figura geométrica formada por el diámetro de C ubicado sobre la recta L cuyo ángulo de inclinación es de $135°$, el eje X y las rectas perpendiculares al eje X que pasan por los extremos de dicho diámetro.
Respuesta: $\frac{12}{5}u.a.$

11. Sean las curvas $x^2 + y^2 = 8$ y $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Determinar las ecuaciones de las parábolas que pasan por los extremos de la cuerda común de las curvas dadas, y cuyos focos son el punto medio de dicha cuerda.
Respuesta: $x^2 = 4(y-1)$; $x^2 = -4(y-3)$

12. Determinar el área del triángulo ABC, sabiendo que:
$\overline{AB}$: segmento que pasa por los centro de $C_1 : x^2+y^2 = 4$ y $C_2 : x^2+y^2-12x+27 = 0$, siendo B el centro de C_2.
$\overline{AC}$: segmento tangente a C_1 en $(-1,\sqrt{3})$. $\overline{BC}$: segmento perpendicular a AC.
Respuesta: $\frac{25\sqrt{3}}{2}u.a.$

13. Sea $C : (x-3)^2 + y^2 = 25$.

    a) Determinar la ecuación de la tangente a ella en $(6,4)$.

    b) Según lo obtenido en *a*), determinar la ecuación de la parábola cuyo foco es la intersección de la tangente con el eje X y cuyo vértice es el punto de tangencia de la parábola con C.

    Respuesta:

    a) $3x + 4y - 34 = 0$,

    b) $y^2 = \frac{40}{3}(x-8)$

14. Sean $(0,2)$ y $(-6,2)$ los focos de una elipse. El área del rectángulo que la circunscribe es de 80, siendo los lados de éste paralelos a los ejes mayor y menor de la elipse. Determinar la ecuación de la elipse.
    Respuesta: $\dfrac{(x+3)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1.$

15. Calcular el área de la figura geómetrica formada por la tangente trazada por el extremo superior del eje menor de $x^2 - 2x + 13 = -4y^2 - 16y$ y $x^2 - 4y^2 - 2x - 24y - 35 = 0$.
    Respuesta: $8u.a$

16. Una circunferencia es tangente a $3x - 4y - 4 = 0$ en $(-4,-4)$ y su centro se encuentra sobre $x + y + 7 = 0$. Determinar la ecuación de la circunferencia.
    Respuesta: $(x+7)^2 + y^2 = 25.$

17. La entrada de un tunel tiene la forma de un arco semi-elíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco tiene $30m$ de longitud y su parte más alta, con respecto al suelo, mide $10m$. Determinar la longitud de una cuerda horizontal que está a $5m$ del suelo.
    Respuesta: $15\sqrt{3}u.l.$

18. Sea $C : x^2 - 6x + 28y + 65 = 0$. Determinar la ecuación de una elipse, sabiendo que su eje focal coincide con la directriz de C y que el eje normal de la elipse coincide con el eje focal de C. La abscisa de uno de los focos de la elipse es 5 y su excentricidad es de $\dfrac{1}{2}$.
    Respuesta: $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y-5)^2}{12} = 1$

19. Determine, completando cuadrados si la ecuación, $3x^2 - 3y^2 + x + 5y + 1 = 0$ representa un lugar geómetrico real. En caso afirmativo encuentre sus elementos y su representación gráfica.

20. Calcule el área del triángulo formado por: el centro de la circunferencia y los puntos de intersecciones de la recta $x = 3$ con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.
    Respuesta: $2u.a.$

21. Determine la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son las rectas: $2y - 5x - 9 = 0$, $2y + 5x + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(1,2)$.
    Respuesta: $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1.$

22. Dadas las curvas $y = \sqrt{\dfrac{16-x^2}{12}}$, $x = -2\sqrt{y}$, $y = 4$, $x = 0$

    a) Identifique las curvas dadas.

b) Grafíquelas en un mismo sistema de coordenadas.

c) Achure la región limitada por ellas.

23. Determinar la ecuación de la elipse de $e = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ y cuyo eje mayor es el segmento comprendido entre el punto de intersección de las asíntotas de $4x^2 - 3y^2 + 32x - 18y + 38 = 0$ y el eje de las ordenadas.
Respuesta: $\dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{4(y+3)^2}{13} = 1$

24. Sea $C : 4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 29 = 0$. Determinar la suma de las áreas de los triángulos que forman las asíntotas de C con el eje X y con el eje Y.
Respuesta: $\dfrac{97}{6} u.a.$

25. Sean $x = -4$, $y = 4 + \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$, $y = 4 - \sqrt{-8x + 16}$, $y = 0$.

    a) Indentificar claramente cada curva.

    b) En un mismo sistema de coordenadas graficar las curvas y achurar la región que ellas encierran.

    c) Determinar los puntos de intersección de las curvas correspondientes a la región.

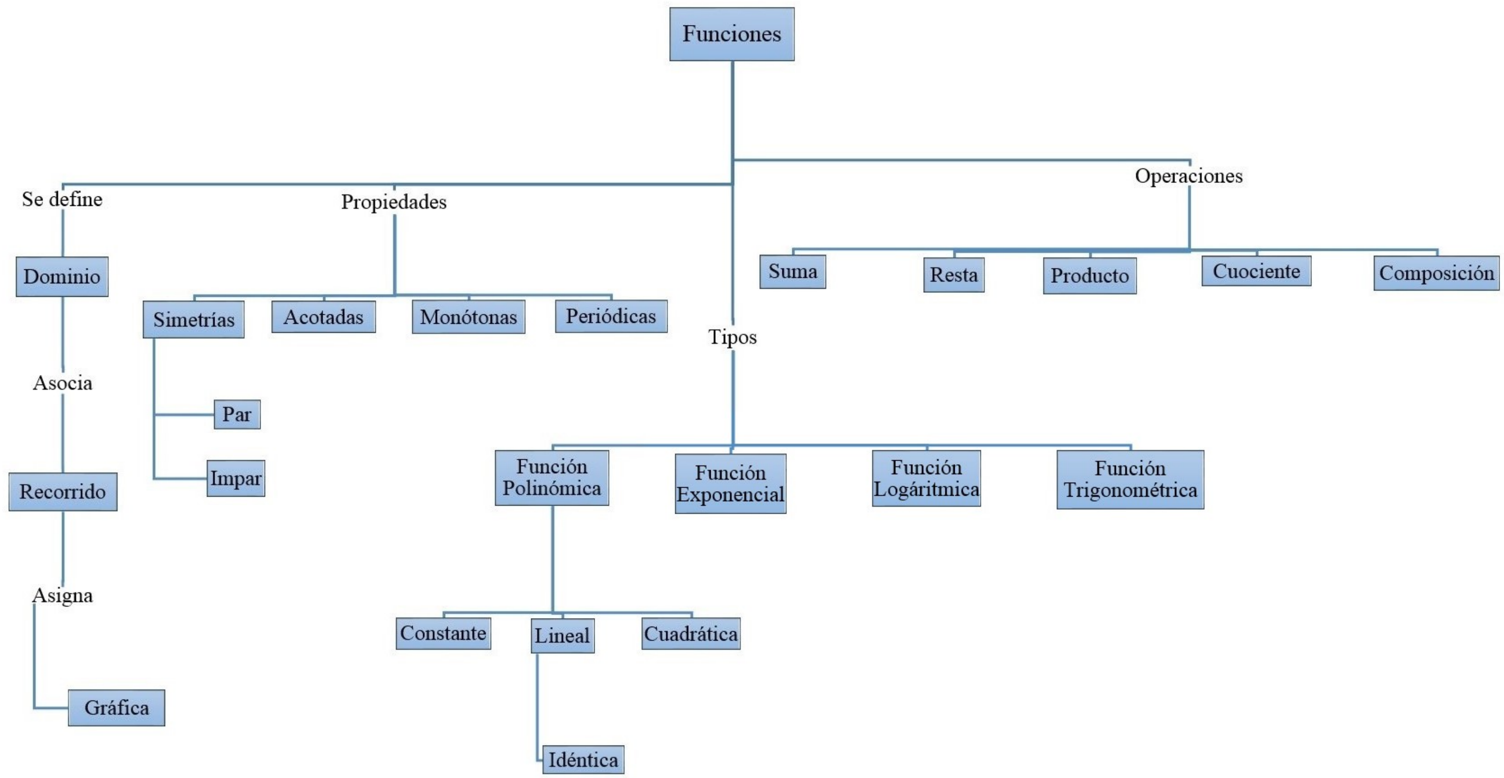
    Respuesta: $c)(-2, 0), (-2, 4), (2, 4), (0, 0)$

26. Sean $y^2 = 18x$ y $(x+6)^2 + y^2 = 100$. Determinar la ecuación y la longitud de la cuerda común a las curvas dadas.
Respuesta: $x = 2$ y $12u.l.$

Capítulo 2

Funciones de una Variable Real

Mapa Conceptual



Competencias a lograr

Al término del presente capítulo, el alumno será capaz de:

- Identificar una función.
- Determinar dominio y recorrido de una función.
- Operar con funciones determinando el dominio correspondiente.
- Reconocer las caraterísticas gráficas de una función.

Se estudiará un tipo especial de relaciones entre elementos de un conjunto A y de un conjunto B, denominada **funciones** de A en B.

La palabra función se usa con frecuencia para indicar una relación o dependencia de una cantidad respecto a otra.

Ejemplo 10.

I) *El área de un círculo es función de su radio.*

II) *El asignar a cada país del mundo su capital, es una función.*

Una función f es una regla o una correspondencia que relaciona dos conjuntos, de tal manera que **a cada elemento** del primer conjunto, denominado dominio de f, simbolizado $domf$, le corresponde **uno y sólo** un elemento del segundo conjunto, denominado conjunto de llegada.

Ejemplo 11. *Sea* $A = \{a, b, c\}$ *y* $B = \{x, y\}$

Por lo tanto, $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$.

Sean $M = \{(a, x), (a, y), (b, x), (c, y)\}$; $N = \{(a, x), (b, y)\}$ *y* $R = \{(a, x), (b, y), (c, y)\}$, *subconjuntos de* $A \times B$.

Entonces M *no es función, ya que* ***a*** *está relacionado con* ***x*** *e* ***y****.*

N *no es función, ya que* $\mathbf{c} \in A$ *y* $\mathbf{c}$ *no está relacionado con ningún elemento de* B.

R *es función. ¿ Porqué ?*

Definición 12. *Se denomina función de* A *en* B *a toda relación* $f \subseteq A \times B$ *que satisface las siguientes propiedades:*

I) *$domf = A$ (Propiedad de Existencia).*

II) *$(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Longrightarrow y = z$ (Propiedad de Unicidad).*

2.1. Dominio y Recorrido de una función

1. La definición de función establece esencialmente lo siguiente:

   "Dados dos conjuntos A y B, una función es una ley de correspondencia que asigna a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B".

2. Si $(x, y) \in f$ se denota $y = f(x)$, que significa que y es la imagen de x según f.

Notación: Una función f se denota como: $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = y$ que se lee:

"f es una función de A en B tal que la imagen de $x \in A$, bajo f, es $y = f(x) \in B$".

Así se tiene que: El **dominio** de f, es el conjunto constituido por todos los elementos que poseen imagen bajo f, y el **recorrido** de f, simbolizado por $recf$, es el conjunto formado por todas las imágenes bajo f.

Por lo tanto, $recf \subseteq B$.

Observaciones

1. No es necesario que todo elemento $y \in B$ sea imagen de algún $x \in A$.

2. El conjunto $\{y \in B / \exists x \in A \quad \text{tal que} \quad y = f(x)\}$ se llama rango, recorrido o contra dominio de f y $\{x \in A / \exists f(x)\}$ se llama dominio de f.

3. En lo sucesivo se supondrá que A y B son conjuntos de números reales, es decir f es función real de variable real.

4. Como el valor de y depende del valor de x, se dice que $\boxed{y}$ es la variable dependiente y $\boxed{x}$ es la variable independiente.

5. Una función f se considera bien definida, si se conoce de ella su expresión analítica ($y = f(x)$) y su dominio. De este modo si se conoce su expresión analítica y no está explicitado su dominio, éste se debe establecer.

Gráfica de Funciones

Las funciones reales se pueden representar geométricamente por una gráfica en el plano cartesiano XY.

Definición 13. *Se define gráfica de una función f como:*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in A = (dom f) \wedge y = f(x)\}$$

Para que una gráfica corresponda a una función, toda recta paralela al eje Y debe interceptar a la gráfica en un solo punto, $\forall x \in dom f$.

Definición 14. *Se define ceros de una función f, a la abscisa del punto de intersección de la gráfica de f con eje X.*

Ejemplos

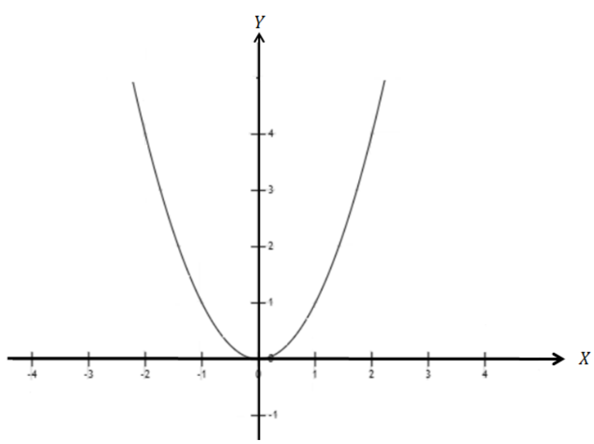
1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad y = f(x) = x^2$. Hallar $dom f$, $rec f$ y gráfica de f.

   Solución.

   Como x puede tomar cualquier valor real, entonces $dom f = \mathbb{R}$.

   Como $y = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow rec f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

   Gráfica



FIN .... FIN

2. Sea $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determinar $dom\, g$ y $rec\ g$.

   Solución.

   Esta función está bien definida si $1 - x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 1$

   $\therefore dom\, g = (-\infty, 1]$.

   $rec\ g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, en efecto: como $x \leq 1 \Longrightarrow 1 - x \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{1-x} \geq 0 \Longrightarrow y \geq 0$.
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Una función también puede definirse por tramos.

   Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \quad ; f_1 \\ 1+x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad ; f_2 \end{cases}$.

   Determinar $domf$, $recf$ y gráfica de f.

   Solución.

   A partir de $f(x)$ se tiene que:

   a) $domf = domf_1 \cup domf_2$, luego $\quad domf = (-\infty, 0) \cup [0, 1] = (-\infty, 1]$.

   b) Para $recf = recf_1 \cup recf_2$

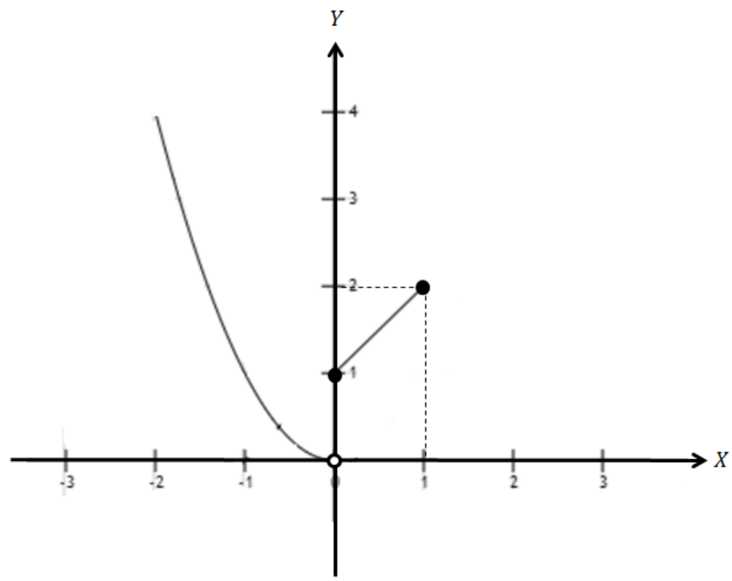
      I) $recf_1$: como $y = x^2$, pero $x < 0 \qquad \therefore y > 0 \Longrightarrow recf_1 = \mathbb{R}^+$

      II) $recf_2$: $0 \leq x \leq 1 \qquad / + 1 \Longrightarrow 1 \leq x + 1 \leq 2 \qquad \therefore y \in [1, 2]$

      $$\Longrightarrow recf_2 = [1, 2]$$

      $\therefore recf = recf_1 \cup recf_2 = \mathbb{R}^+ \cup [1, 2] = \mathbb{R}^+$

   c) Gráfica.



FIN .... FIN

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \quad ; f_1 \\ x & \text{si } x > 0 \quad ; f_2 \end{cases}$.

Determinar $domf$, $recf$ y gráfica de f.

Solución.

a) $domf = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$.

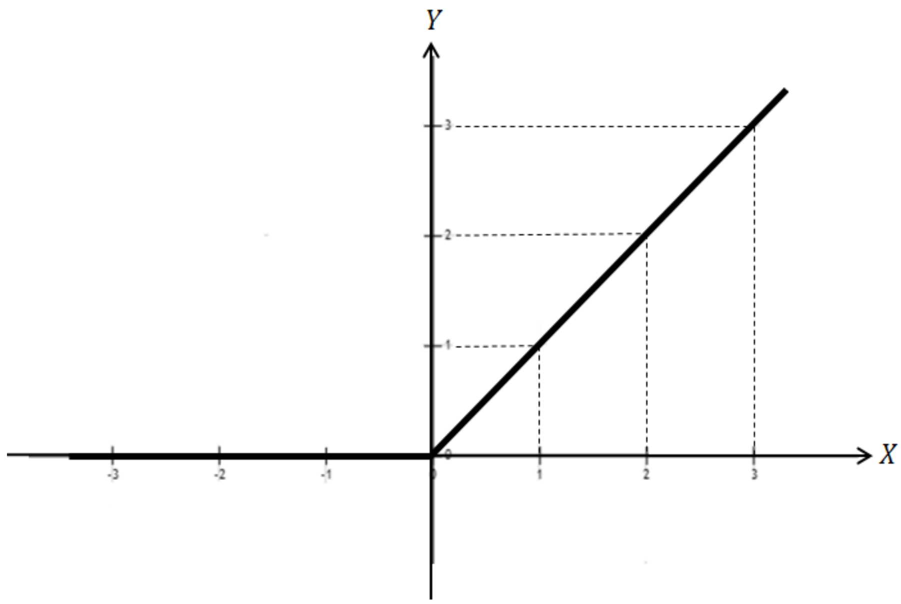
b) Para $recf$:

I) $f_1(x) = 0, \forall x \leq 0 \Longrightarrow recf_1 = \{0\}$

II) $f_2(x) = x, \forall x > 0 \Longrightarrow recf_2 = \mathbb{R}^+$

$$\therefore recf = recf_1 \cup recf_2 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

c) Gráfica:



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Definida una función en el intervalo $-2 \leq x \leq 8$ por $f(x) = x^2$, determinar $f(4)$; $f(-3)$; $f(t-3)$, si es que existen.

   Solución.

   $f(4) = 4^2 = 16$

   $f(-3)$ no está definida ya que $-3 \notin [-2, 8]$.

   $f(t-3) = (t-3)^2$ existe si $t - 3 \in domf$, es decir, $-2 \leq t - 3 \leq 8 \Longrightarrow 1 \leq t \leq 11$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

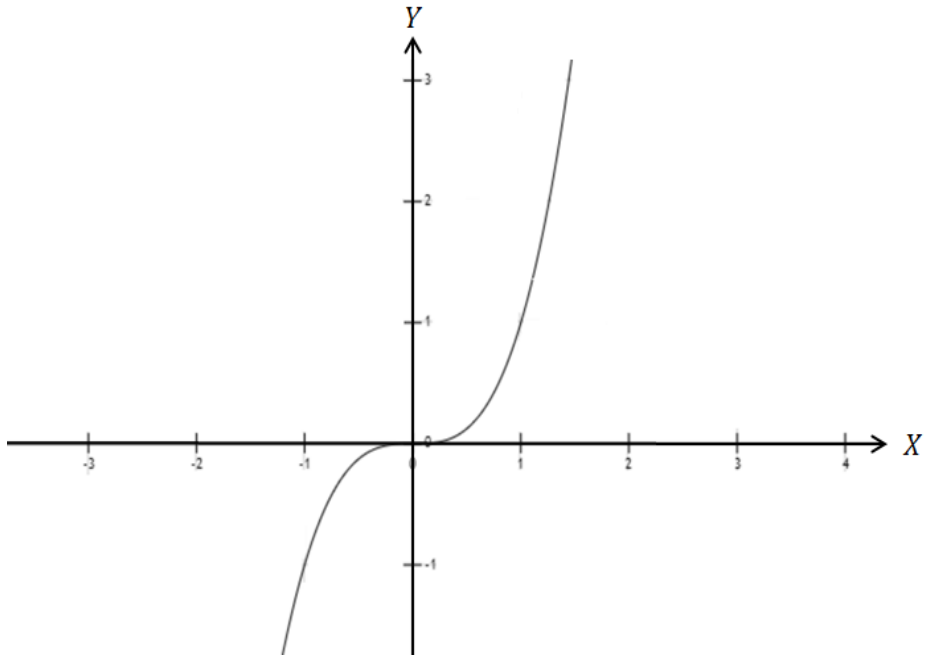
6. Sea $f(x) = x^3$. Determinar $domf$, $recf$ y gráfica de f.

   Solución.

   $domf = \mathbb{R}$

   $recf = \mathbb{R}$, ya que $y = x^3 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ siendo $\sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$.

   Gráfica:



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

7. sea $f(r) = \begin{cases} r^2 & \text{si } r \in [-1, 2] \quad ; f_1 \\ 3r+1 & \text{si } r \in (2, 4] \quad ; f_2 \end{cases}$.

   Determinar $domf$, $recf$ y gráfica de f.

   Solución.

   a) $domf = domf_1 \cup domf_2 = [-1, 2] \cup (2, 4] = [-1, 4]$.

   b) Para $recf$:

   I) $recf_1$: como $-1 \leq r \leq 2 \Longrightarrow -1 \leq r \leq 0 \vee 0 \leq r \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq r \leq 1 \vee 0 \leq r^2 \leq 4$

   $\Longrightarrow 0 \leq r^2 \leq 4$

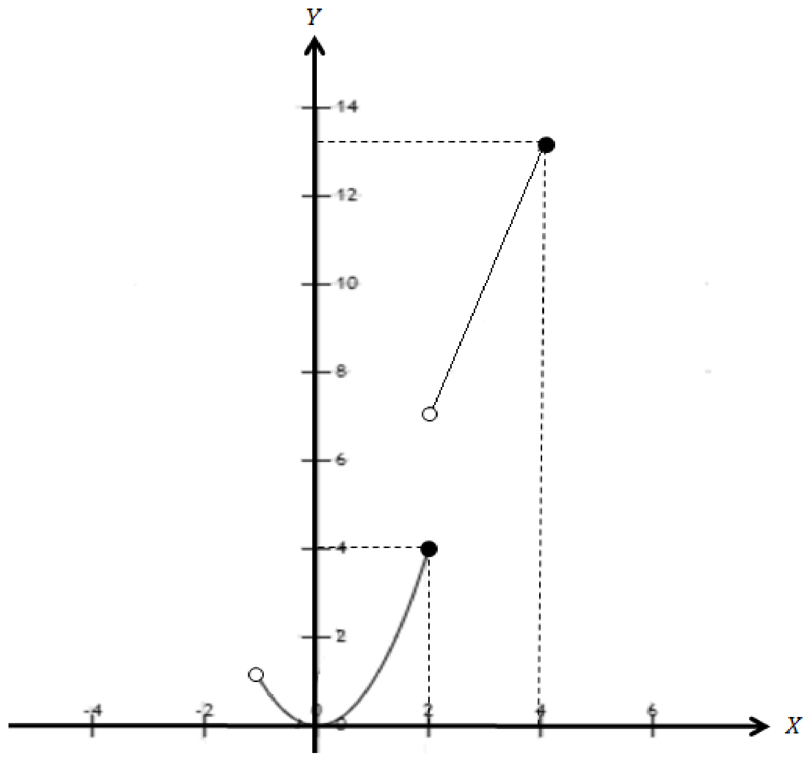
   $$\therefore recf_1 = [0, 4]$$

   II) $recf_2$ como $2 < r \leq 4 \quad / \cdot 3 \Longrightarrow 6 < 3r \leq 12 \quad / + 1 \Longrightarrow 7 < 3r + 1 \leq 13$

   $$\therefore recf_2 = (7, 13]$$

   Luego de i) y ii) $\quad recf = [0, 4] \cup (7, 13]$.

c) Gráfica:



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

8. Sea $f(x) = 7 + \sqrt{3x-6}$, función de variable real. Determinar $domf$ y $recf$.

Solución.

I) $f(x) \in \mathbb{R} \iff \sqrt{3x-6} \in \mathbb{R} \Longrightarrow 3x - 6 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$

$$\therefore domf = [2, +\infty)$$

II) Para determinar el recorrido se puede proceder de dos formas:

a) $\sqrt{3x-6} \geq 0 \quad / + 7 \Longrightarrow 7 + \sqrt{3x-6} \geq 7 \Longrightarrow y \geq 7 \Longrightarrow recf = [7, +\infty)$.

b) Como $y = 7 + \sqrt{3x-6} \Longrightarrow y - 7 = \sqrt{3x-6} \Longrightarrow y - 7 \geq 0 \Longrightarrow y \geq 7$

$$\therefore recf = [7, +\infty)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

9. Sea $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$. Determinar $domf$ y $recf$.

Solución.

I) $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Longrightarrow x \geq 0$. Como $\sqrt{x}$ está en el denominador, $x > 0$

$$\therefore domf = \mathbb{R}^+$$

II) Como $x > 0 \Longrightarrow x + 1 > 1$ y como $\sqrt{x} > 0 \Longrightarrow \dfrac{1+x}{\sqrt{x}} > 0 \Longrightarrow y > 0$.

Además $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}} \quad /()^2 \Longrightarrow x^2 + (2 - y^2)x + 1 = 0$

$\Longrightarrow x = \dfrac{(y^2-2) \pm y\sqrt{y^2-4}}{2} \Longrightarrow y^2 - 4 \geq 0 \Longrightarrow y \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Como $y > 0$,

$$\therefore recf = [2, +\infty)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

10. Hallar el dominio y recorrido de:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 3 \quad ; h_1 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \quad ; h_2 \end{cases}$$

Solución.

a) $dom\ h = (-\infty, 3) \cup [3, +\infty) = \mathbb{R}$

b) $rec\ h$:

I) $rec\ h_1$:

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \vee \quad x < 0 \\ &\Longrightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 9 \quad \vee \quad x^2 > 0 \\ &\Longrightarrow \quad -4 \leq x^2 - 4 \leq 5 \quad \vee \quad x^2 - 4 > -4 \\ &\Longrightarrow \quad x^2 - 4 \geq -4 \end{aligned}$$

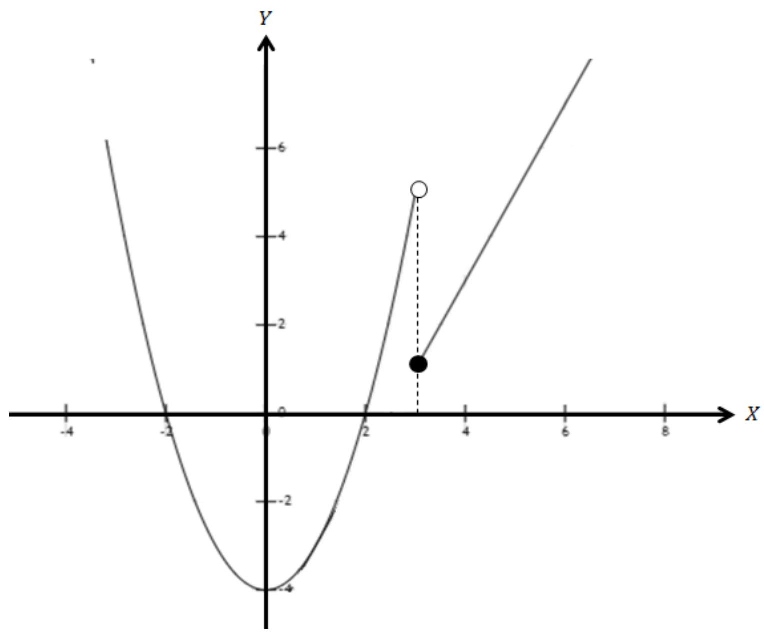
$$\therefore rec\ h_1 = [-4, +\infty)$$

II) $rec\ h_2$: Si $x \geq 3 \Longrightarrow 2x \geq 6 \Longrightarrow 2x - 5 \geq 1$

$$\therefore rec\ h_2 = [1, +\infty)$$

$$\therefore rec\ h = [-4, +\infty) \cup [1, +\infty) = [-4, +\infty)$$

c) Gráfica:



FIN .... FIN

11. Hallar el recorrido de:

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{x^2-2x+14} & \text{si } -5 \leq x < 2 \quad ; f_1 \\ -3 & \text{si } -2 \leq x < 4 \quad ; f_2 \end{cases}$$

Solución.

i) $recf_1$:

$$f_1(x) = 1+\sqrt{x^2-2x+14} = 1+\sqrt{(x-1)^2+13}$$

$$-5 \leq x < 2 \iff -6 \leq x-1 < 1 \leq 6 \iff |x-1| \leq 6$$

$$\Longrightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 36 \Longrightarrow 13 \leq (x-1)^2+13 \leq 49$$

$$\sqrt{13} \leq \sqrt{(x-1)^2+13} \leq 7 \Longrightarrow 1+\sqrt{13} \leq 1+\sqrt{(x-1)^2+13} \leq 8$$

$$\therefore recf_1 = [1+\sqrt{13}, 8]$$

ii) $recf_2$: $f_2(x) = -3$

$$\therefore recf_2 = \{-3\}$$

Luego de i) y ii) $\qquad recf = recf_1 \cup recf_2 = [1+\sqrt{13}, 8] \cup \{-3\}$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Igualdad de Funciones

Sean f y g funciones reales de variable real. Se dice que $f = g$, si y sólo si;

I) $dom\ f = dom\ g$

II) $f(x) = g(x), \forall x \in dom\ f = dom\ g$

Ejemplos

1. Sean $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ y $g(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$. ¿Es $f = g$?

   Solución. Como $dom f = [0, +\infty) \neq (-\infty, 0] = dom\ g$

$$\therefore f \neq g$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. $f(x) = \sqrt{2x-1}\sqrt{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{(2x-1)(x+2)}$. ¿Es $f = g$?

   Solución.

   I) $dom f$

   $= \{x \in \mathbb{R} / \quad 2x - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 2 \geq 0\}$

   $= \left\{x \in \mathbb{R} / \quad x \geq \dfrac{1}{2} \quad \wedge \quad x \geq -2\right\}$

   $= \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right).$

   II) $dom\ g$

   $= \{x \in \mathbb{R} / \quad (2x-1)(x+2) \geq 0\}$

   $= (-\infty, -2] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right).$

Como $\quad domf \neq dom\ g$

$$\therefore f \neq g$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2.2. Algebra de Funciones

Definición 15. *Sean f y g funciones cuyos dominios respectivos son $domf$ y $dom\ g$. Su suma $(f+g)$, su diferencia $(f-g)$, su producto $(f\cdot g)$ y su cuociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ son las funciones definidas como:*

I) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

II) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

III) $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

IV) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

V) $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Donde el dominio correspondiente es:

$dom(f \pm g) = dom(f \cdot g) = domf \cap dom\ g \quad y$

$dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = domf \cap dom\ g - \{x \in \mathbb{R}/ \quad g(x) = 0\}$

Ejemplos

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $h(x) = sen(x)$.

   Encontrar

   I) $(f+g)(-2)$
   II) $(f\cdot h)\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$
   III) $\left(\dfrac{h}{g}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

IV) Determinar $(f+g)(x)$ y $\left(\dfrac{g}{f\cdot h}\right)(x)$ con su dominio.

Solución.

I) $(f+g)(-2) = f(-2)+g(-2) = (-2)^2 + \dfrac{1}{-2} = 4 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}.$

II) $(f\cdot h)\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2 \cdot sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi^2}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{18}.$

III) $\left(\dfrac{h}{g}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{\pi}{2}.$

IV) a) $dom(f+g)$

$domf = \mathbb{R}; \quad dom\ g = \mathbb{R}-\{0\}, \quad dom(f+g) = \mathbb{R}-\{0\}.$

La expresión analítica de $(f+g)$ es:

$$(f+g)(x) = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+1}{x}$$

b) $dom\left(\dfrac{g}{f\cdot h}\right) = dom\ g \cap dom(f\cdot h) - \{x\in\mathbb{R}/(f\cdot h)(x)=0\}$

$= dom\ g \cap domf \cap dom\ h - \{x\in\mathbb{R}/(f\cdot h)(x)=0\}$

Como $domf = \mathbb{R} \quad \wedge \quad dom\ h = \mathbb{R} \Longrightarrow dom(f\cdot h) = \mathbb{R}.$

Luego $dom\left(\dfrac{g}{f\cdot h}\right) = \mathbb{R}-\{0\}\cap\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}/(f\cdot h)(x)=0\}.$

Pero $(f\cdot h)(x) = x^2\cdot sen(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \vee \quad sen(x) = 0 \Longrightarrow x = k\pi,$ $k\in\mathbb{Z}.$

$\therefore x^2\cdot sen(x)\neq 0$ para $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\therefore dom\left(\dfrac{g}{f\cdot h}\right) = [\mathbb{R}-\{0\}] - \{x = k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{x=k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\}.$

La expresión analítica de $\dfrac{g}{f\cdot h}$ es:

$$\left(\frac{g}{f\cdot h}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)\cdot h(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{x^2\cdot sen(x)} = \frac{1}{x^3\cdot sen(x)}.$$

FIN .... FIN

2. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Determinar $(f+g)(x)$ y su dominio.

Solución.

$domf = \mathbb{R} - \{3\} \quad \wedge \quad dom\ g = \mathbb{R}_0^+$

$$\therefore dom(f+g) = \mathbb{R}_0^+ - \{3\}$$

La expresión analítica de $(f+g)$ es:

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x+3} + \sqrt{x}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$ y $g(x) = -2x^3$. Determinar $(f \cdot g)(x)$ y su dominio.

Solución.

$domf = \mathbb{R} - \{-5\} \quad \wedge \quad dom\ g = \mathbb{R}$

$$\therefore dom(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-5\}$$

La expresión analítica de $(f \cdot g)$ es:

$$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x+5} \cdot (-2x^3) = -\frac{2x^3}{x+5}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea $f(x) = \sqrt{x+6}$ y $g(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$. Determinar $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y su dominio.

Solución.

$domf = \left\{x \in \mathbb{R}/\sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R}/x+6 \geq 0 \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow domf = [-6, +\infty).$

$dom\ g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}; \quad g(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{2x}{x^2-4} = 0 \Longrightarrow x = 0.$

$$\therefore dom\left(\frac{f}{g}\right) = [-6, +\infty) \cap (\mathbb{R} - \{-2, 2\}) - \{0\} = [-6, +\infty) - \{-2, 0, 2\}$$

La expresión analítica de $\dfrac{f}{g}$ es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{\dfrac{2x}{x^2-4}} = \frac{(x^2-4)\sqrt{x+6}}{2x}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Sean f y g funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & \text{si } x < -2 \quad ; f_1 \\ 2 - 3x, & \text{si } x \geq -2 \quad ; f_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{si } x > -2 \quad ; g_1 \\ x^2 + 3x, & \text{si } x \leq -2 \quad ; g_2 \end{cases}$$

Determinar $(f+g)(x)$ y su dominio.

Solución.

$$dom(f+g) = dom(f_1+g_1) \cup dom(f_1+g_2) \cup dom(f_2+g_1) \cup dom(f_2+g_2)$$

Entonces:

I) $dom(f_1+g_1) = dom f_1 \cap dom\ g_1 = (-\infty,-2) \cap (-2,+\infty) = \emptyset$

$$\therefore (f_1+g_1)(x) \quad \text{no existe}$$

II) $dom(f_1+g_2) = dom f_1 \cap dom\ g_2 = (-\infty,-2) \cap (-\infty,-2] = (-\infty,-2)$

$$\therefore (f_1+g_2)(x) = f_1(x) + g_2(x) = x^2 - 5x + x^2 + 3x = 2x^2 - 2x.$$

III) $dom(f_2+g_1) = dom f_2 \cap dom\ g_1 = [-2,+\infty) \cap (-2,+\infty) = (-2,+\infty)$

$$\therefore (f_2+g_1)(x) = f_2(x) + g_1(x) = 2 - 3x + 2x - 4 = -x - 2.$$

IV) $dom(f_2+g_2) = dom f_2 \cap dom\ g_2 = [-2,+\infty) \cap (-\infty,-2] = \{-2\}$

$$\therefore (f_2+g_2)(x) = f_2(x) + g_2(x) = 2 - 3x + x^2 + 3x = x^2 + 2.$$

Finalmente se tiene $dom(f+g) = \emptyset \cup (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty) \cup \{-2\} = \mathbb{R}$

$$\therefore (f+g)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x, & \text{si } x < -2 \\ -x - 2, & \text{si } x > -2 \\ x^2 + 2, & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2.3. Características Gráficas de una Función

Funciones Pares e Impares

Definición 16. *Se dice que f es una función par si $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in domf$, lo que significa que la gráfica de f es simétrica respecto al eje de las ordenadas.*

Ejemplo 17.

$f(x) = 3x^2$; $f(x) = |x|$; $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ *son funciones pares.*

$f(x) = 4x^2 - 2x$ *no es par.*

Definición 18. *Se dice que f es una función impar si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in domf - \{0\}$, lo que significa que la gráfica de f es simétrica respecto al origen.*

Ejemplo 19. $f(x) = sen(x)$; $f(x) = x^3$; $f(x) = \begin{cases} 2, & si\ x \geq 0 \\ -2, & si\ x < 0 \end{cases}$ *son funciones impares.*

Ejemplos

1. Sea $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Verificar que f es impar.

   Solución.

   $$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = -f(x) \quad \therefore f \text{ es impar}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = x^2 + 4$. Verificar que f es par.

   Solución.

   $$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x) \quad \therefore f \text{ es par.}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Verificar que $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-2,-1) \\ 0, & \text{si } x \in [-1,1] \\ 1, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$ es par.

   Solución.

   P.D. $f(x) = f(-x)$

I) Si $-2 \leq x \leq -1 \Longrightarrow 1 < -x \leq 2 \Longrightarrow f(-x) = 1$

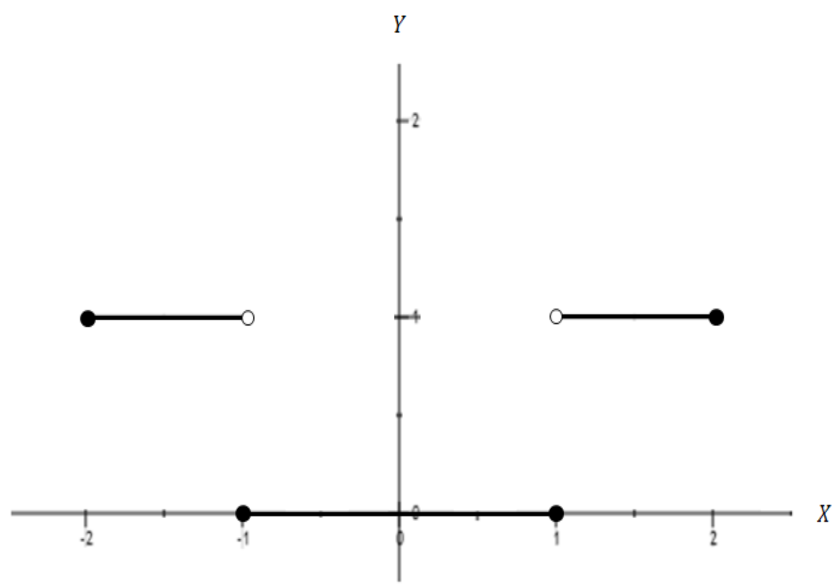
II) Si $-1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Longrightarrow f(-x) = 0$

III) Si $1 < x \leq 2 \Longrightarrow -2 \leq -x < -1 \Longrightarrow f(-x) = 1$

$$\therefore f(-x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-2,-1) \\ 0, & \text{si } x \in [-1,1] \\ 1, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

Luego $f(-x) = f(x)$, f es par.

Gráfica:



FIN .... FIN

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-1,0] \\ -1, & \text{si } x \in (0,1] \end{cases}$, verificar si f es impar.

Solución.

P.D. $f(-x) = -f(x), \forall x \in dom f - \{0\}$

I) Si $-1 \leq x < 0 \Longrightarrow 0 \leq -x \leq 1 \Longrightarrow f(-x) = -1$

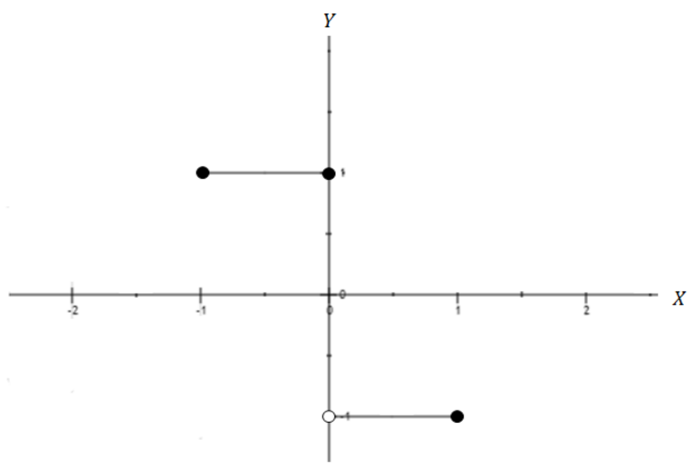
II) Si $0 < x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -x < 0 \Longrightarrow f(-x) = 1$

III) Si $x = 0 \Longrightarrow -x = 0 \Longrightarrow f(-x) = 1$

$$\therefore f(-x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 1, & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Luego $f(-x) = -f(x)$, f es impar.

Gráfica de $f(x)$



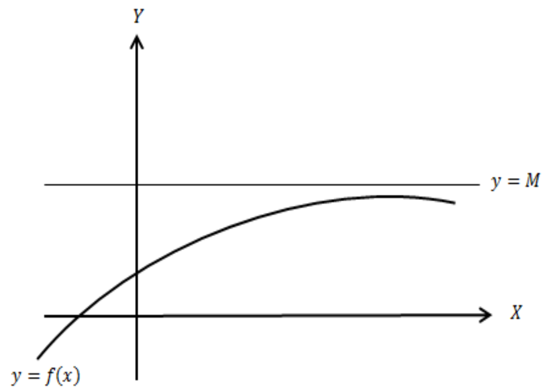
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Funciones Acotadas

Definición 20. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que la función f es acotada superiormente si:*

$$\exists M \in \mathbb{R} / f(x) \leq M, \forall x \in A$$

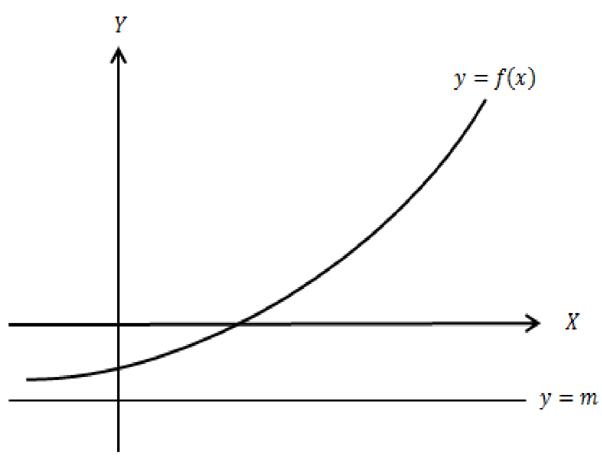
El significado geométrico de esta definición indica que f es acotada superiormente, si su gráfica queda debajo de la recta $y = M$.



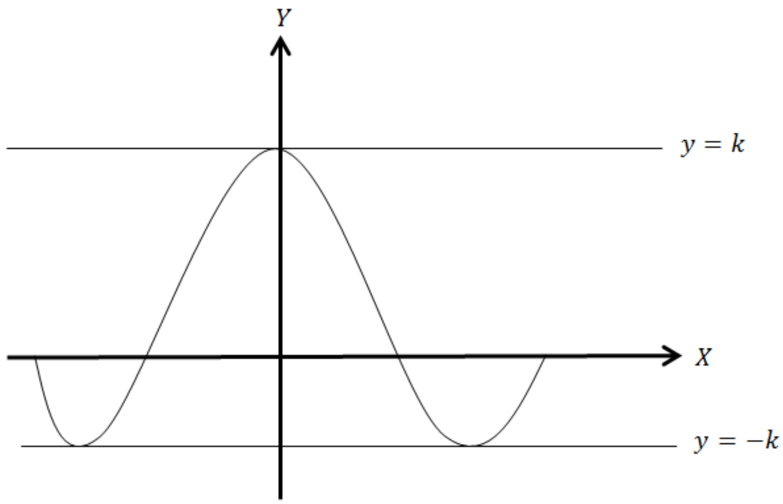
Definición 21. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que la función f es acotada inferiormente si:*

$$\exists m \in \mathbb{R}/f(x) \geq m, \forall x \in A$$

El significado geométrico de esta definición indica que f es acotada inferiormente, si su gráfica queda sobre la recta $y = m$.



Definición 22. *Se dice que la función f es acotada, si lo es superior e inferiormente. Si es acotada, su gráfica quedará contenida en una franja horizontal. Luego debe existir $k \in \mathbb{R}^+/|f(x)| \leq k$.*



Ejemplos

1. $f(x) = sen(x)$ es acotada ya que $|sen(x)| \leq 1$.

2. $f(x) = cos(x)$ es acotada ya que $|cos(x)| \leq 1$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ es acotada ya que $0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$.

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es acotada ya que:

   Como $(1+x)^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2+1 \geq -2x \quad / : x^2+1 \Longrightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2+1} \geq \dfrac{-2x}{x^2+1}$

   Como $x^2+1 > 0 \Longrightarrow 1 \geq \dfrac{-2x}{x^2+1} \Longrightarrow \dfrac{-1}{2} \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

   $(1-x)^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2+1 \geq 2x \quad / : x^2+1 \Longrightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2+1} \geq \dfrac{2x}{x^2+1} \Longrightarrow 1 \geq \dfrac{2x}{x^2+1} \Longrightarrow$ $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{x}{x^2+1}$

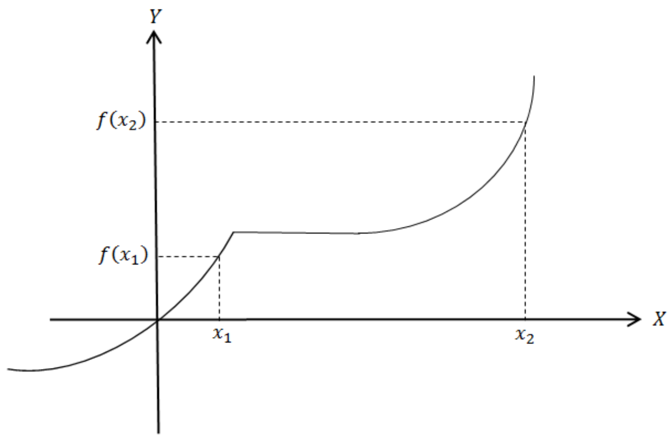
   $$\therefore -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{2}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es acotada, ya que $recf = \mathbb{R} - \{0\}$.

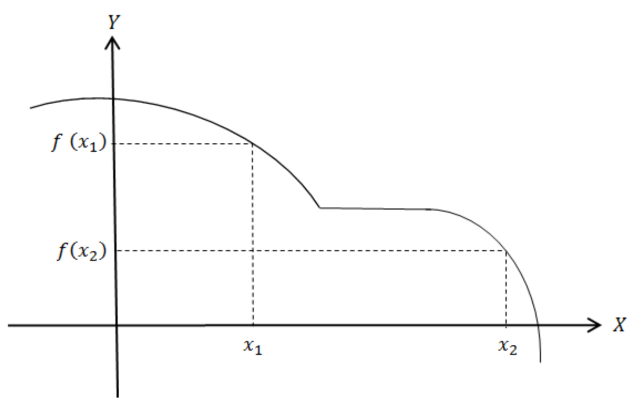
Funciones Monótonas

Definición 23. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que:*

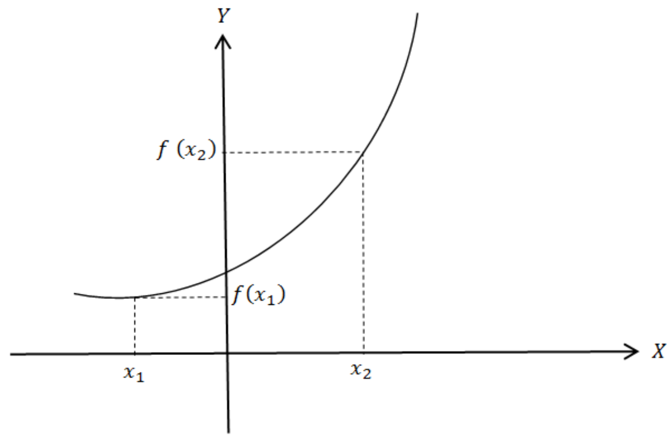
1. *f es creciente si:* $\forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.



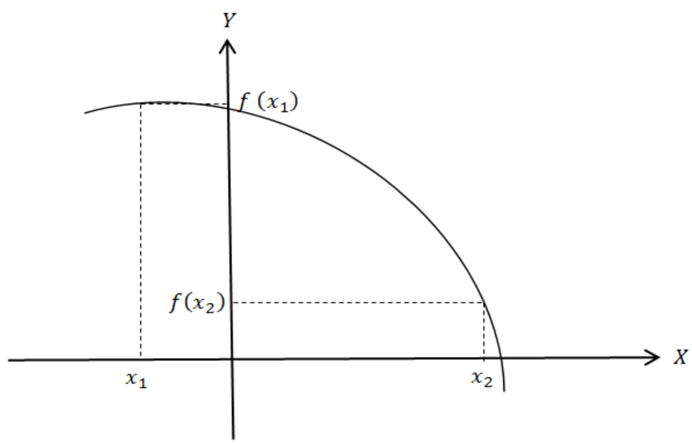
2. *f es decreciente si:* $\forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.



3. *f es estrictamente creciente si:* $\forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

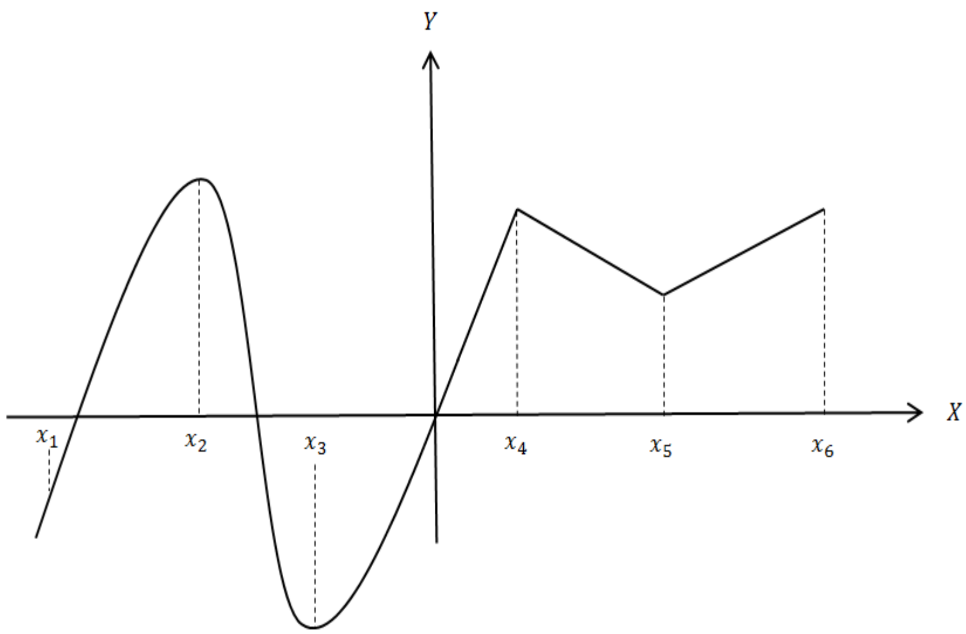


4. f es estrictamente decreciente si: $\forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



Una función f definida en un conjunto A es monótona, si es uno de los cuatro casos definidos anteriormente.

Sea el siguiente gráfico:



Se observa que la función correspondiente no es monónotona en su dominio (x_1, x_6). Sin embargo ella es creciente en los intervalos: (x_1, x_2); (x_3, x_4); (x_5, x_6) y decreciente en los intervalos: (x_2, x_3); (x_4, x_5).

Ejemplos

1. Sea $f(x) = 3x + 2$. Determinar su monotonía.

   Solución.

   $x_1 < x_2 \Longrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Longrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

   $\therefore$ f es estrictamente creciente.
   FIN .... FIN

2. $f(x) = -2x - 1$. Determinar su monotonía.

   Solución.

   $x_1 < x_2 \Longrightarrow -2x_1 > -2x_2 \Longrightarrow -2x_1 - 1 > -2x_2 - 1 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

   $\therefore$ f es estrictamente decreciente.
   FIN .... FIN

3. Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Determinar su monotonía.

   Solución.

   Como es una función par y considerando que el $dom f = [-3, 3]$, se tiene:

   $x_1,\, x_2 \in [-3, 0]$

   $x_1 < x_2 \Longrightarrow -x_2 < -x_1 \quad /()^2 \Longrightarrow x_2^2 < x_1^2 \quad / \cdot (-1) \Longrightarrow -x_2^2 > -x_1^2 \quad / + 9 \Longrightarrow$

   $9 - x_2^2 > 9 - x_1^2 \Longrightarrow \sqrt{9 - x_2^2} > \sqrt{9 - x_1^2} \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$

   $\therefore f$ es creciente en $(-3, 0)$ y como f es par, entonces en $(0, 3)$ es decreciente.
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Demostrar que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ es monótona creciente en $(1, +\infty)$.

   Solución.

   Sea $1 < x_1 < x_2$ P.D. $f(x_1) < f(x_2)$.

   $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} < x_2 - x_1$, ya que $x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} < x_2 - x_1$

   $\Longrightarrow \dfrac{1}{x_1} + x_1 < \dfrac{1}{x_2} + x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Funciones Periódicas

Definición 24. *Una función f se denomina **Función Periódica** si existe un número $T > 0$ tal que:*

1. $x \in dom f \Longrightarrow (x + kT) \in dom f$, $k \in \mathbb{Z}$

2. $f(x + kT) = f(x)$, $\forall x \in dom f$.

*El número T se denomina **Período de** f*

Ejemplo 25. *El período de las funciones seno y coseno es 2π;*
$sen(x + 2\pi) = sen(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos(x + 2\pi) = cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

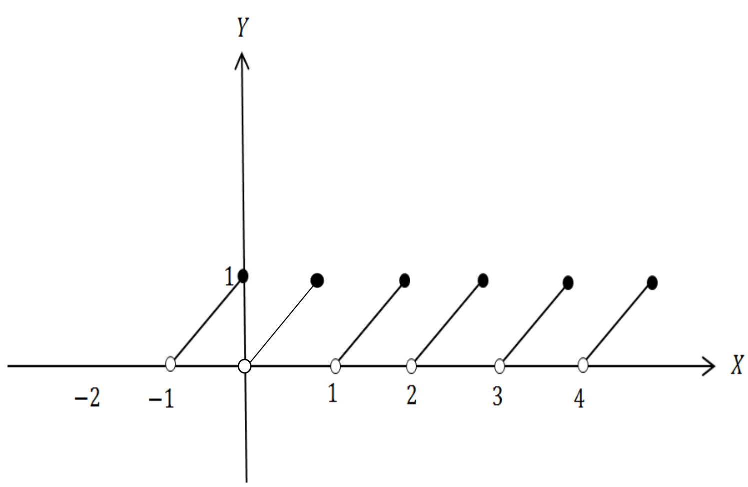
También son períodos de estas funciones 2π, 4π,... en general $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^+$, siendo 2π el menor período positivo.

Definición 26. *Se llama período fundamental de f al menor de los períodos positivos.*

Ejemplos

1. Determinar una expresión analítica para la función de la figura dada y calcular $f(1000, 4)$.

   Solución.



I) $f(x) = x$, $0 < x \leq 1$. Además se observa que

$f(x+1) = f(x)$, $f(x+2) = f(x)$, $f(x+3) = f(x), \ldots$ etc. Como periodo fundamental se tiene $T = 1$.

Luego la expresión analítica es: $f(x) = x$, $x \in (0, 1]$ y periódica de periodo $T = 1$.

II) $f(1000,4) = f(1000 + 0,4) = f(0,4) = 0,4$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

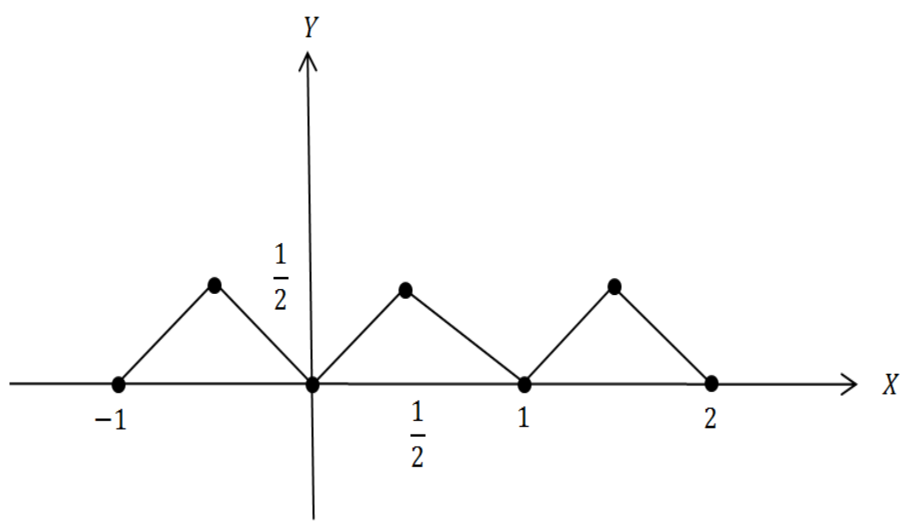
2. Se define la función $f(x) = \{x\}$ como la distancia de x al entero más próximo, es decir $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}$; $\left\{\dfrac{5}{4}\right\} = \dfrac{1}{4}$; $\{n\} = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

   a) Graficar $\{x\}$

   b) Probar que $\{x\}$ es periódica y determinar su periodo.

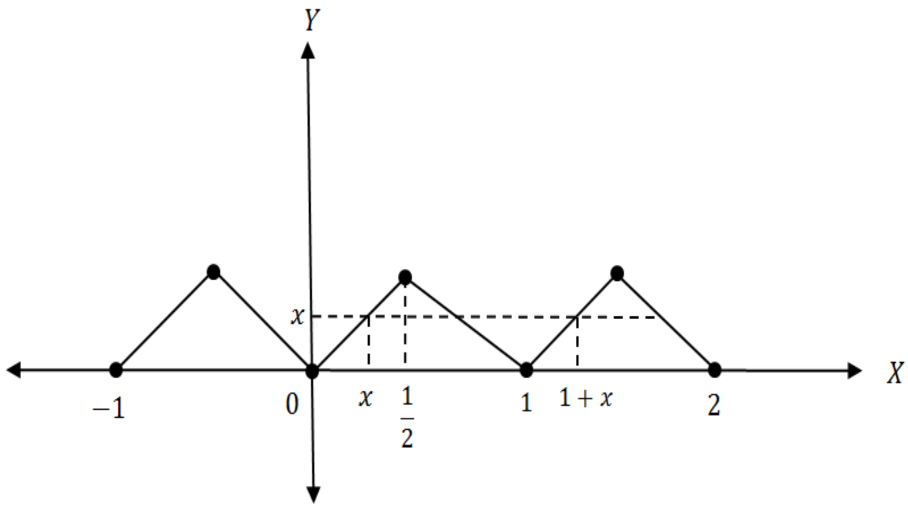
Solución.

a) Gráfica

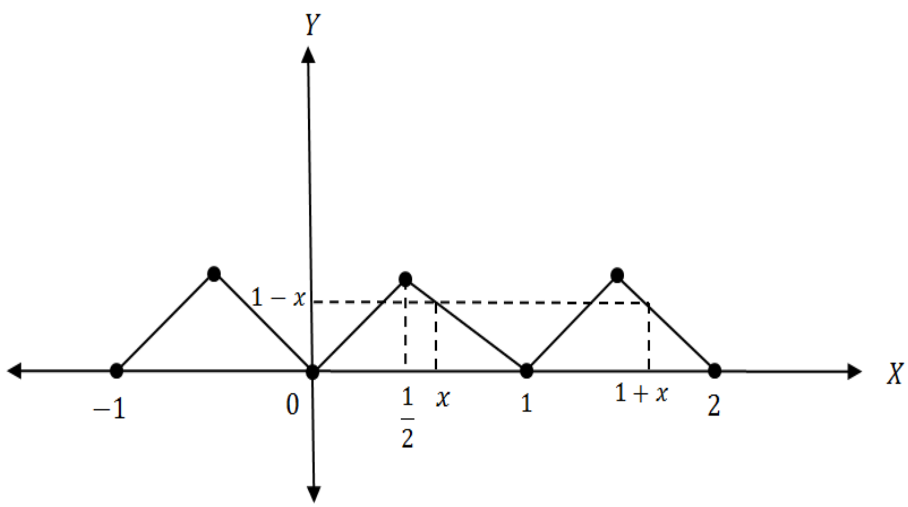


b) Según gráfico $T = 1$. Se probará que $f(x) = f(x+1)$.

I) Si $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = \{x\} = x \quad \wedge \quad f(x+1) = \{x+1\} = x$, ya que



II) Si $\dfrac{1}{2} \leq x < 1 \Longrightarrow f(x) = \{x\} = 1 - x \quad \wedge \quad f(x+1) = \{x+1\} = 1 - x$, ya que



$\therefore f(x) = f(x+1)$ es periódica con $T = 1$.

FIN .... FIN

3. Sea $f(x) = sen(4x)$, $g(x) = cos(x)$, $F(x) = cos(4x)$, $G(x) = sen(x)$.

   Probar que $4(f \cdot g + F \cdot G) + 6(F \cdot g - f \cdot G)$ es periódica y hallar el periodo fundamental.

Solución.

$$\begin{array}{rcl} 4(f\cdot g+F\cdot G) & = & 4(sen(4x)\cdot cos(x)+cos(4x)\cdot sen(x)) \\ 4(f\cdot g+F\cdot G) & = & 4sen(4x+x) \\ 4(f\cdot g+F\cdot G) & = & 4sen(5x) \end{array}$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{array}{rcl} 6(F\cdot g-f\cdot G) & = & 6(cos(4x)\cdot cos(x)-sen(4x)\cdot sen(x)) \\ 6(F\cdot g-f\cdot G) & = & 6cos(4x+x) \\ 6(F\cdot g-f\cdot G) & = & 6cos(5x) \end{array}$$

Luego, sea $h(x)=4sen(5x)+6cos(5x)$

$$\begin{array}{rcl} h(x+T) & = & 4sen(5(x+T))+6cos(5(x+T)) \\ & = & 4sen(5x+5T)+6cos(5x+5T) \end{array}$$

Como $sen(x)$ y $cos(x)$ son periódicas de periodo $2\pi \Longrightarrow 5T=2\pi \quad \therefore T=\dfrac{2\pi}{5}$

$h\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)=4sen(5x+2\pi)+6cos(5x+2\pi)$

$\therefore h(x)=h\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)$, siendo $T=\dfrac{2\pi}{5}$.

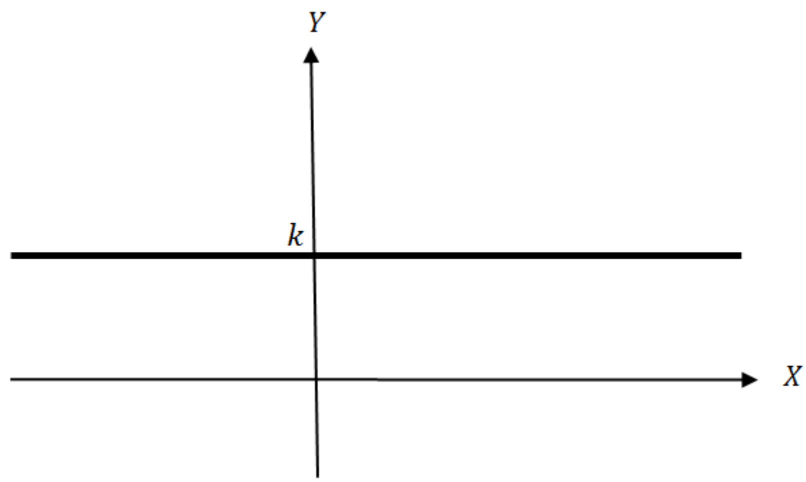
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2.4. Funciones Especiales

Función Constante

Es de la forma $f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$. Luego $domf=\mathbb{R}$ y $rec\ f=\{k\}$.

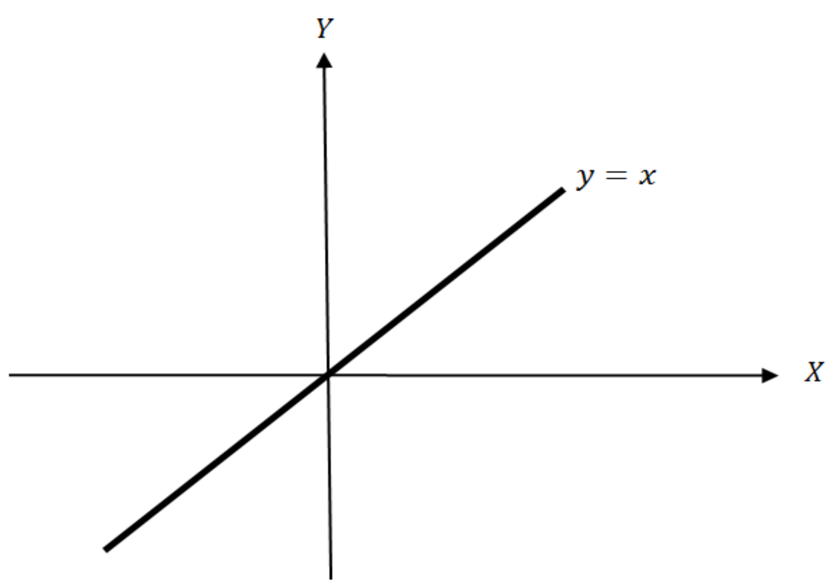
- La función es par.
- Su gráfica es una recta paralela o coincidente con el eje X.



Función Idéntica

Es de la forma $f(x) = x$ ó también se simboliza por $I(x) = x$, $domf = \mathbb{R}$ y $rec\ f = \mathbb{R}$.

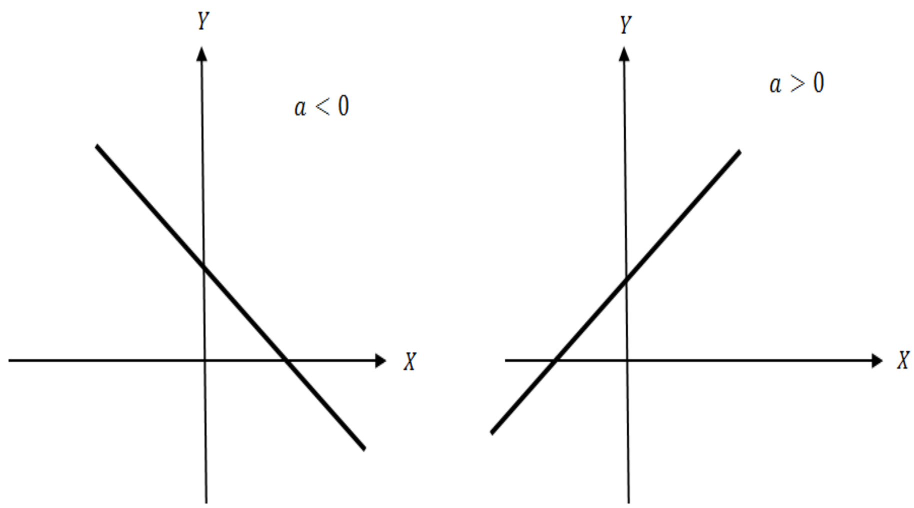
- La función es impar y monótona creciente.
- Su gráfica es una recta que biseca al I y III cuadrante.



Función Lineal

Es de la forma $f(x) = ax + b$, $a \neq 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$. Luego $dom f = \mathbb{R}$ y $rec\ f = \mathbb{R}$.

- Si $a < 0$, f es estrictamente decreciente y si $a > 0$, f es estrictamente creciente.
- Su gráfica es una recta.



Función Cuadrática

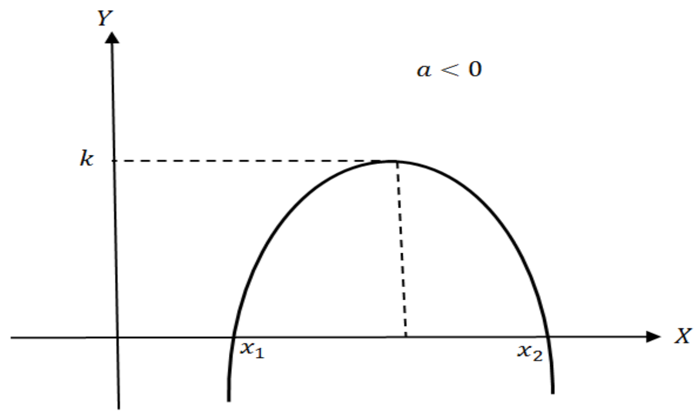
Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$. $dom f = \mathbb{R}$. El recorrido se determinará en cada caso particular.

Su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$, y si abre hacia abajo si $a < 0$.

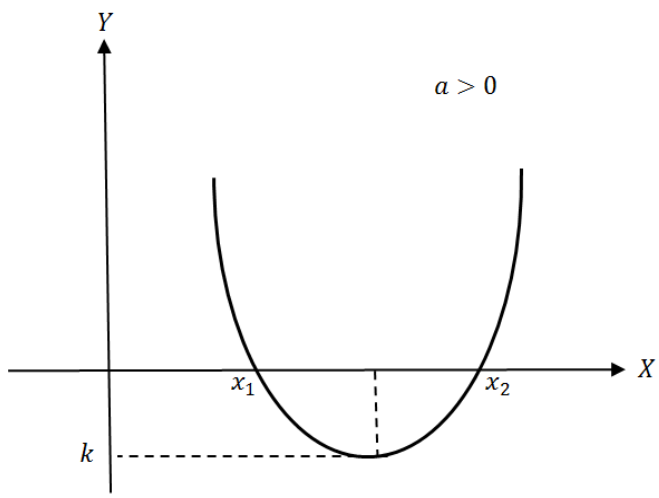
Los ceros de f se obtienen resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, la parábola intercepta en 2 puntos al eje X.

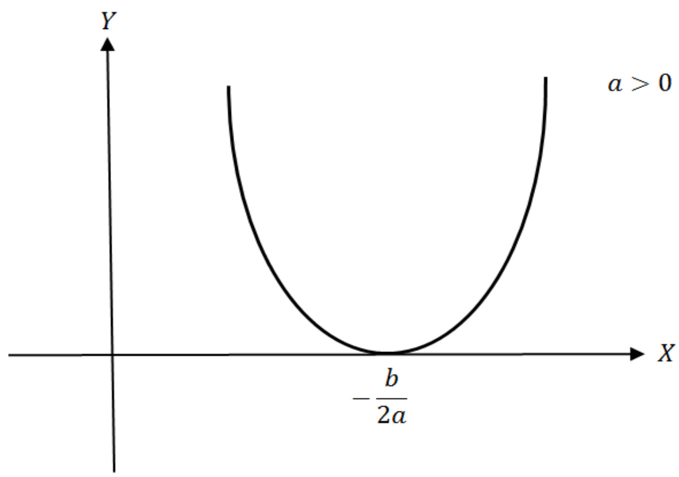


$dom f = \mathbb{R}$; $rec f = (-\infty, k]$.

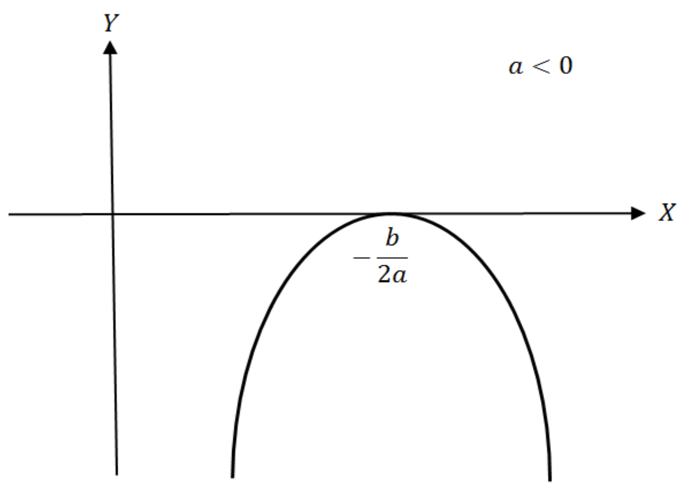


$dom f = \mathbb{R}$; $rec f = [k, +\infty)$.

b) Si $b^2 - 4ac = 0$, la parábola intercepta en un punto al eje X.

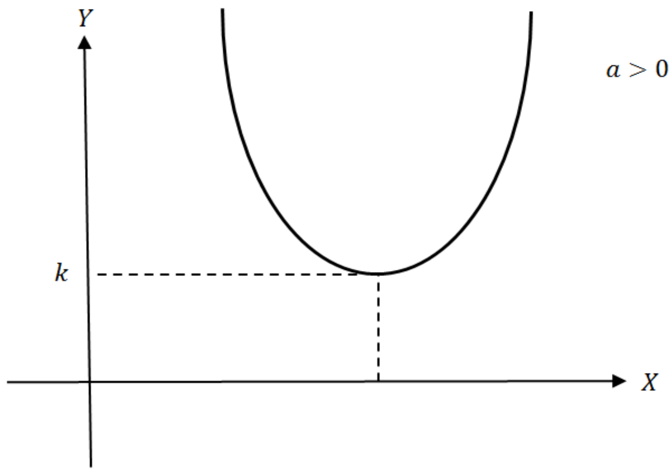


$dom f = \mathbb{R}$; $rec f = [0, +\infty)$.

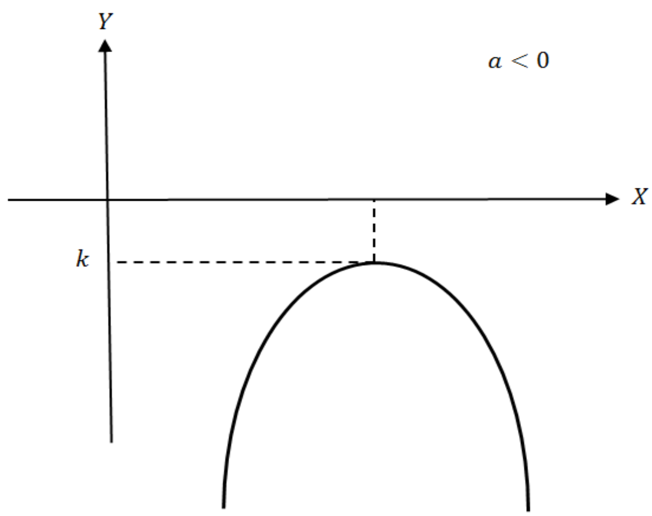


$dom f = \mathbb{R}$; $rec f = (-\infty, 0]$.

c) Si $b^2 - 4ac < 0$, la parábola no intercepta al eje X.



$dom f = \mathbb{R}$; $rec f = [k, +\infty)$.



$dom f = \mathbb{R}$; $rec f = (-\infty, k]$.

Función Polinómica

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de grado n, con $a_n = 0$.

a_n se llama coeficiente principal, $n \in \mathbb{Z}_0^+$, $dom f = \mathbb{R}$ y $rec\ f$ se determinará en cada caso.

Ejemplo 27. $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + x - 1$.

Función Racional

Es de la forma $y = f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones polinómicas.

$dom f = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad q(x) \neq 0\}$.

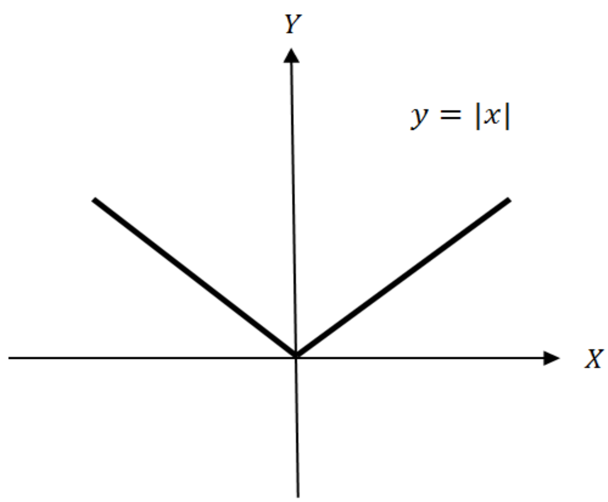
Algunos ejemplos:

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$.

Función Valor Absoluto

Es de la forma $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

siendo $dom f = \mathbb{R}$, $rec\ f = \mathbb{R}_0^+$



Función Parte Entera

Es de la forma $f(x) = [x]$.

Se define $[x]$ como el mayor de todos los números enteros menores o iguales a x; es decir

$[x] = n \Longleftrightarrow n \leq x < n+1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos

1. $f(3,2) = [3,2] = 3$

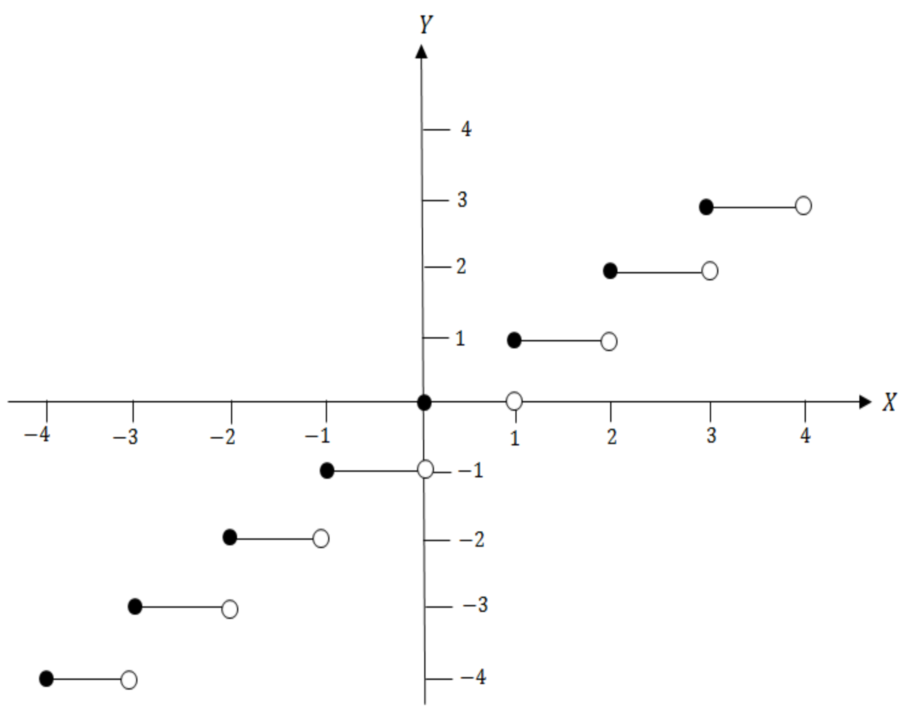
2. $f(4,9) = [4,9] = 4$

3. $f(-2,1) = [-2,1] = -3$

4. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\text{Así } [x] = \begin{cases} \vdots \\ -3, & \text{si } x \in [-3,-2) \\ -2, & \text{si } x \in [-2,-1) \\ -1, & \text{si } x \in [-1,0) \\ 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ \vdots \end{cases}$$

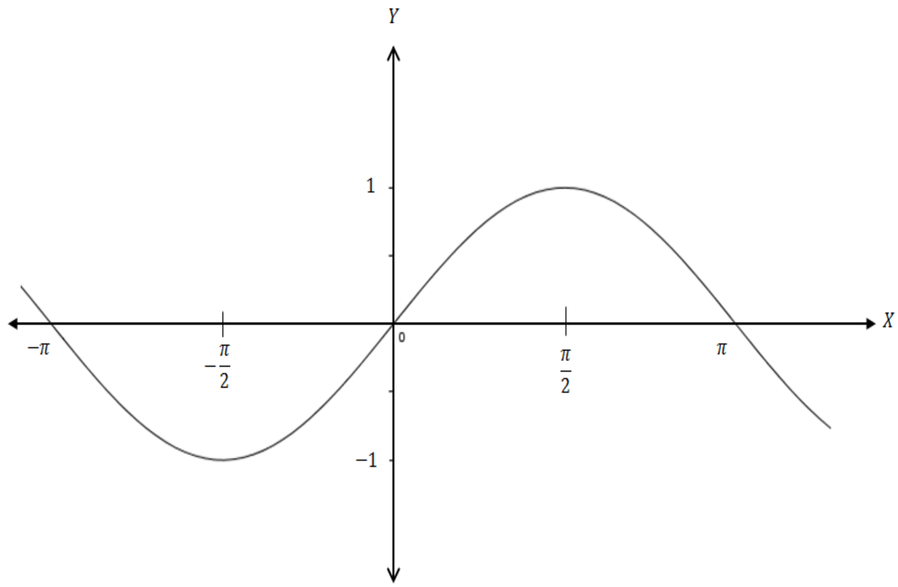
$dom f = \mathbb{R}$, $rec f = \mathbb{Z}$



Funciones Circulares

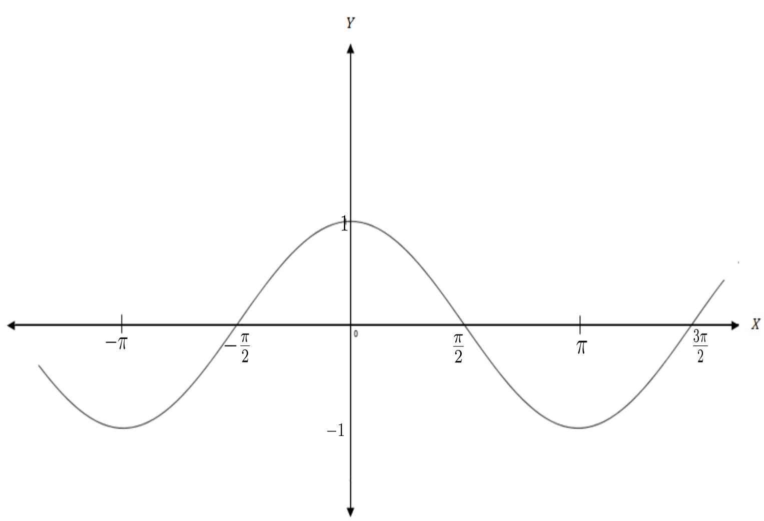
a) $f(x) = sen(x)$, x medido en radianes.

$domf = \mathbb{R}$ y $recf = [-1, 1]$, de período $T = 2\pi$.

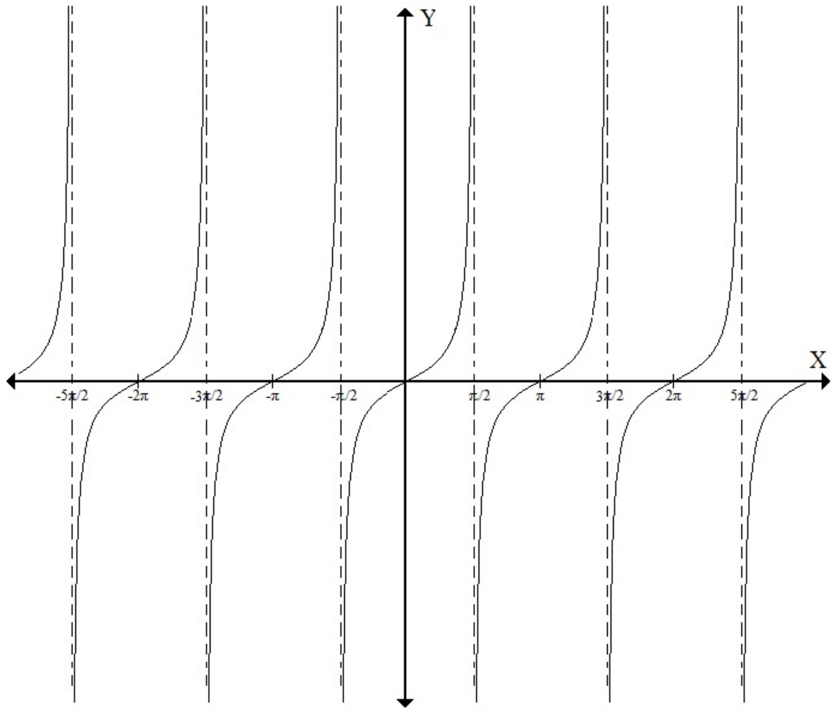


b) $f(x) = cos(x)$, x medido en radianes.

$domf = \mathbb{R}$ y $recf = [-1, 1]$, de período $T = 2\pi$.



c) $f(x) = \text{tg } x$, x medido en radianes.
$domf = \mathbb{R} - \{x \mid x = (2u+1)\pi/2, u \in \mathbb{Z}\}$ y $recf = \mathbb{R}$, de período $T = \pi$



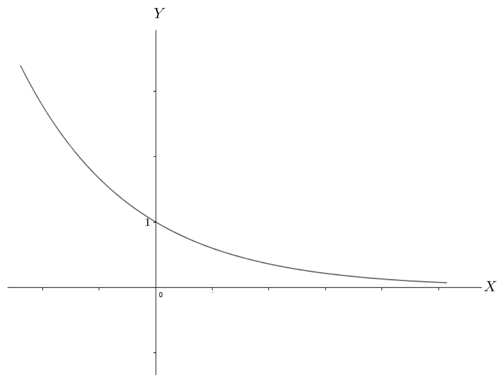
Función Exponencial

Sea $a > 0$, $a \neq 1$, la función $f(x) = a^x$ se denomina función exponencial en base a, con $domf = \mathbb{R}$, $recf = \mathbb{R}^+$.

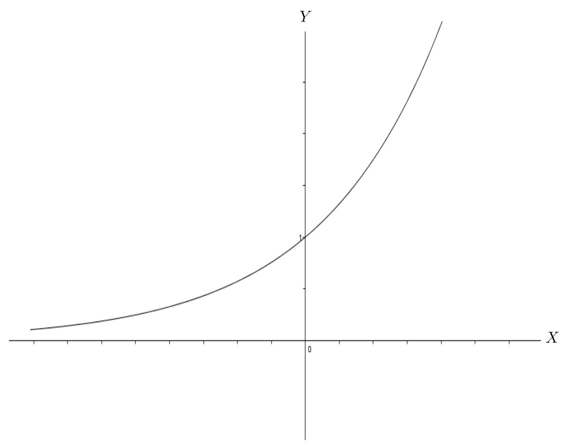
Observaciones

1. $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

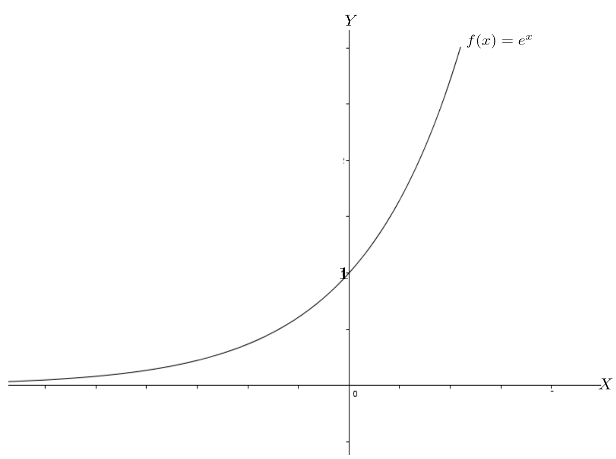
    - Si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función decreciente.



- Si $a > 1,\ f(x) = a^x$ es una función creciente.



- Si $a = e \approx 2,71828\ldots \qquad \therefore e > 1$



2. Esta función transforma las sumas en productos.

$$\forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

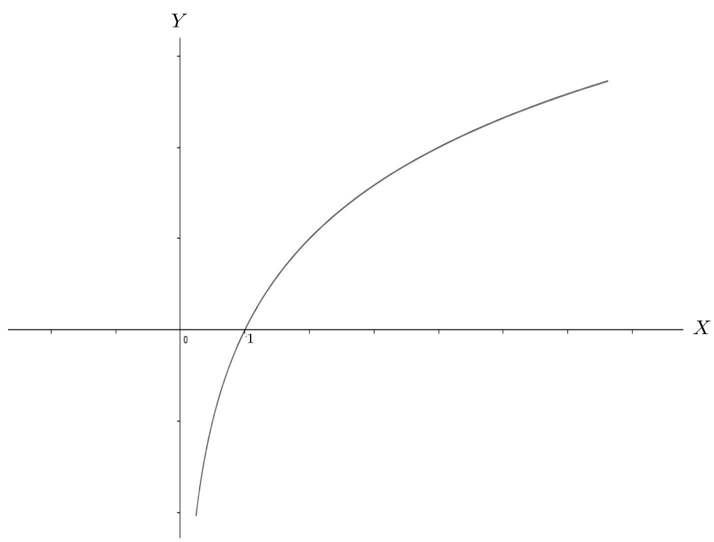
$$\forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1 - x_2) = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}, \quad f(x_2) \neq 0.$$

Función Logarítmica

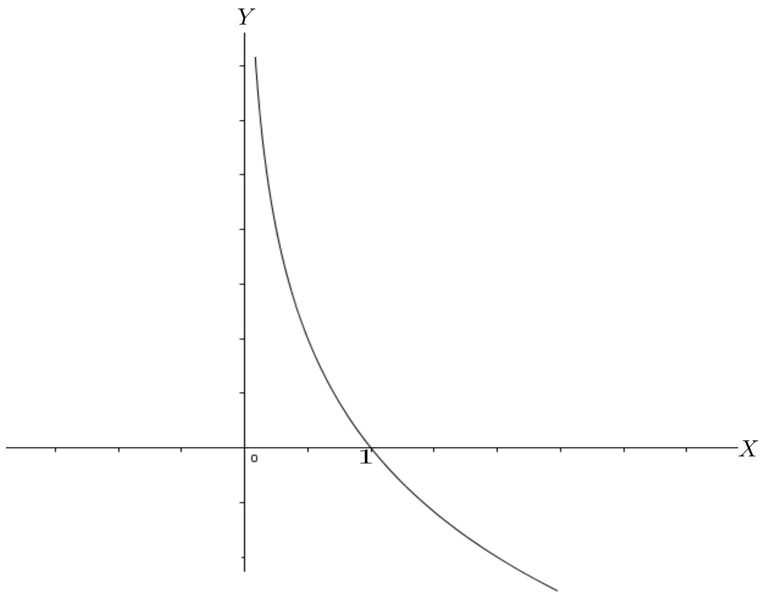
Sea $a > 0$, $a \neq 1$, la función $f(x) = \log_a x$ se denomina función logarítmica en base a, con $dom f = \mathbb{R}^+$ y $rec f = \mathbb{R}$.

Observaciones

a) Si $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ es una función creciente.



b) Si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ es una función decreciente.



c) Si $a = e$, $f(x) = \log_e x$ se llama función logaritmo natural, y se simboliza como $f(x) = \ln x$

d) $x = 1$ es el único cero de la función.

e) $\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
4. $\log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n$
5. $\log_a m^p = p \log_a m$
6. $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

Ejercicios

1. Hallar el dominio, recorrido y la gráfica de $f(x) = [\sqrt{x}]$.

   Solución.

   Sea $f(x) = [\sqrt{x}] = n$. Como $x \geq 0 \Longrightarrow n \in \mathbb{Z}_0^+ \Longrightarrow n \leq \sqrt{x} < n+1 \Longrightarrow$ $n^2 \leq x < (n+1)^2$

   Por ejemplo:

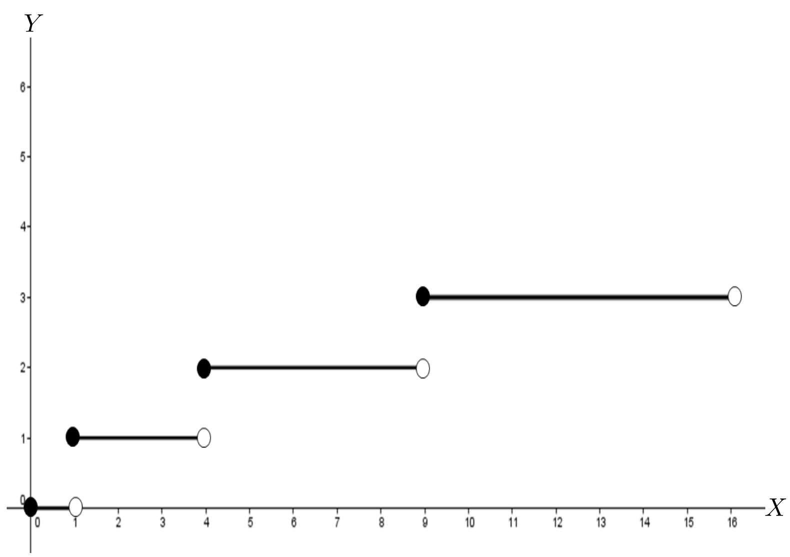
   Si $0 \leq x < 1 \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Longrightarrow f(x) = [\sqrt{x}] = 0$.

   Si $1 \leq x < 4 \Longrightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Longrightarrow f(x) = [\sqrt{x}] = 1$.

   Si $4 \leq x < 9 \Longrightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Longrightarrow f(x) = [\sqrt{x}] = 2$.

$$\therefore f(x) = \left[\sqrt{x}\right] = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ 1, & \text{si } x \in [1,4) \\ 2, & \text{si } x \in [4,9) \\ 3, & \text{si } x \in [9,16) \\ \vdots & \end{cases}$$

   $\therefore dom f = [0, +\infty);\ rec f = \mathbb{Z}_0^+$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determinar el dominio, recorrido y gráfico de $f(x) = [2x]$.

Solución.

$[2x] = n \Longleftrightarrow n \leq 2x < n+1 \Longrightarrow \dfrac{n}{2} \leq x < \dfrac{n+1}{2}$.

Si $-1 \leq x < -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow -2 \leq 2x < -1 \Longrightarrow f(x) = [2x] = -2$.

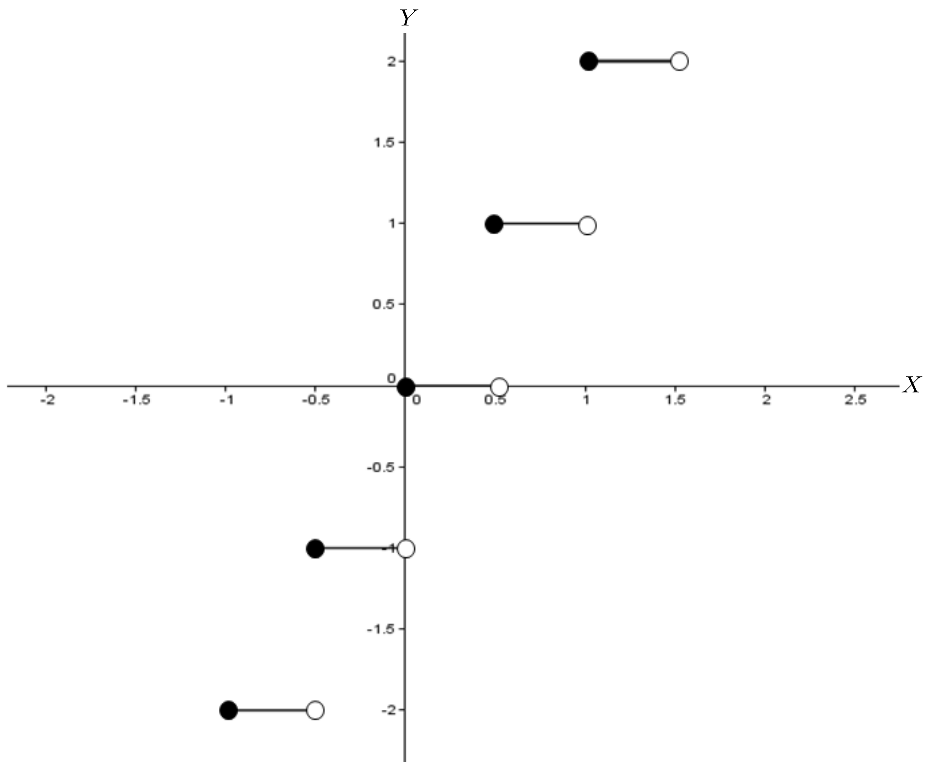
Si $-\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \Longrightarrow -1 \leq 2x < 0 \Longrightarrow f(x) = [2x] = -1$

Si $0 \leq x < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 0 \leq 2x < 1 \Longrightarrow f(x) = [2x] = 0$

Si $\dfrac{1}{2} \leq x < 1 \Longrightarrow 1 \leq 2x < 2 \Longrightarrow f(x) = [2x] = 1$, etc.

$$\therefore f(x) = [2x] = \begin{cases} \vdots & \\ -2, & \text{si } -1 \leq x < -\dfrac{1}{2} \\ -1, & \text{si } -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1, & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2, & \text{si } 1 \leq x < \dfrac{3}{2} \\ \vdots & \end{cases}$$

$\therefore dom f = \mathbb{R}$; $rec f = \mathbb{Z}$



FIN .... FIN

3. Hallar el dominio y gráfica de $f(x) = |x| - [x]$.

   Solución.

   $dom f = \mathbb{R}$

   a) Si $x \geq 0 \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow f(x) = x - [x] = x - n$, donde $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

   b) Si $x < 0 \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow f(x) = -x - [x] = -x - n$, donde $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}^-$.

   Si $-3 \leq x < -2 \Longrightarrow f(x) = -x + 3$

   Si $-2 \leq x < -1 \Longrightarrow f(x) = -x + 2$

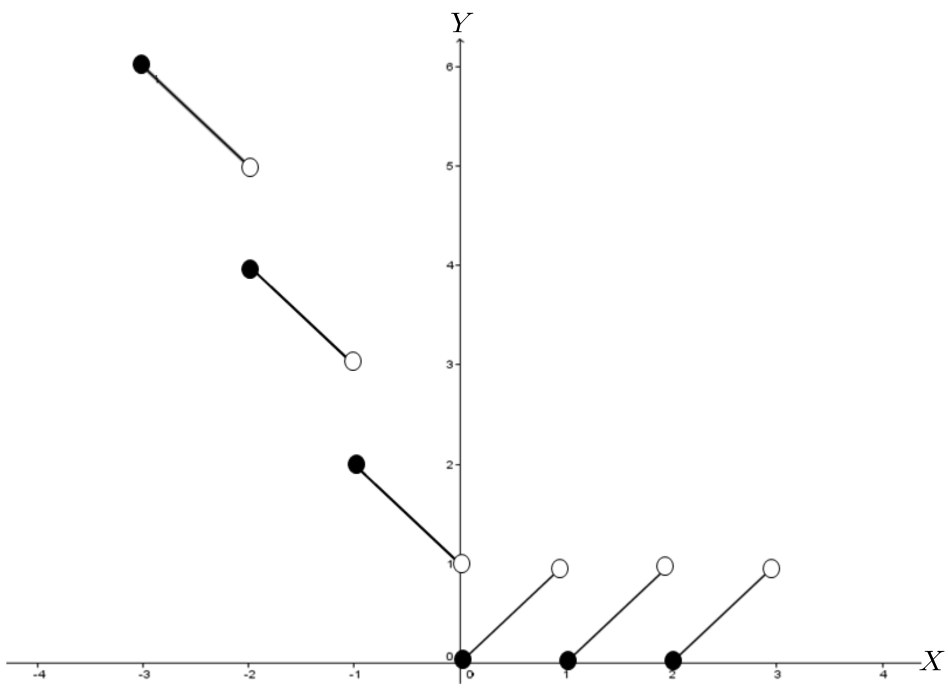
   Si $-1 \leq x < 0 \Longrightarrow f(x) = -x + 1$

   Si $0 \leq x < 1 \Longrightarrow f(x) = x$

   Si $1 \leq x < 2 \Longrightarrow f(x) = x - 1$

   Si $2 \leq x < 3 \Longrightarrow f(x) = x - 2$

$$\therefore f(x) = |x| - [x] = \begin{cases} \quad \vdots \\ -x+3, & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -x+2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -x+1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x-2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \quad \vdots \end{cases}$$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Determinar dominio y recorrido de $f(x) = \sqrt{[x] - x}$.

Solución.

$\sqrt{[x] - x} \in \mathbb{R} \Longrightarrow [x] - x \geq 0$ $(*)$. Pero esta relación es falsa porque $x \geq [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow [x] - x \leq 0$ $(**)$. De $(*)$ y $(**)$ $[x] - x = 0 \Longrightarrow x = [x] \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

$\therefore dom f = \mathbb{Z}$ y $rec f = 0$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Determinar dominio y recorrido de $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.

Solución.

$x - [x] \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow dom f = \mathbb{R}$.

Si $[x] = n \Longrightarrow n \leq x < n+1,\ n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f(x) = n + \sqrt{x-n}$

Si $-2 \leq x < -1,\ f(x) = -2 + \sqrt{x+2}$.

Si $-1 \leq x < 0,\ f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$.

Si $0 \leq x < 1,\ f(x) = \sqrt{x}$.

$1 \leq x < 2,\ f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, etc.

$$\therefore f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]} = \begin{cases} \qquad \vdots & \\ -2 + \sqrt{x+2}, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 + \sqrt{x+1}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 + \sqrt{x-1}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \qquad \vdots & \end{cases}$$

Para determinar $rec\ f$:

Si $-2 \leq x < -1 \Longrightarrow 0 \leq x+2 < 1 \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{x+2} < 1 \Longrightarrow -2 \leq -2 + \sqrt{x+2} < -1$

$\therefore rec\ f_1 = [-2, -1)$.

Si $-1 \leq x < 0 \Longrightarrow 0 \leq x+1 < 1 \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{x+1} < 1 \Longrightarrow -1 \leq -1 + \sqrt{x+1} < 0$

$\therefore rec\ f_2 = [-1, 0)$.

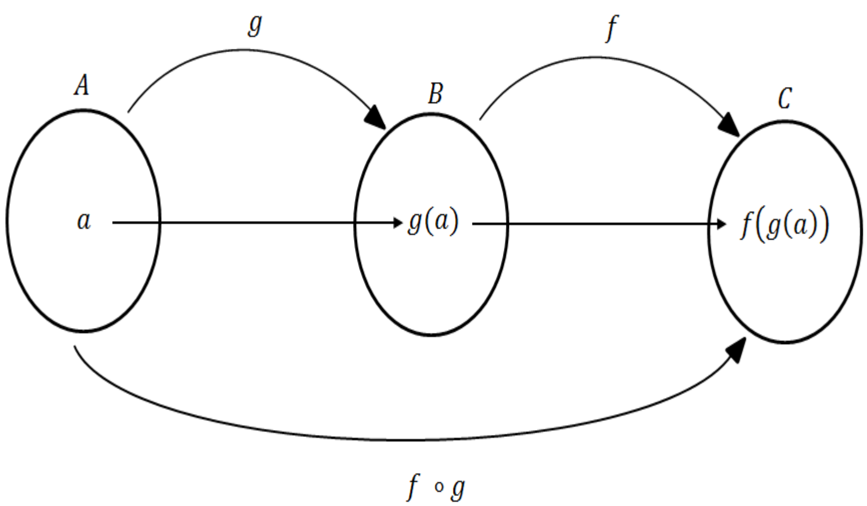
Continuando con este desarrollo ¿ Cuál es $rec\ f$?.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2.5. Composición de Funciones

Sea g una función de A en B y f una función de B en C, es decir, $g : A \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow C$ y sea $a \in A$ / $g(a) \in B$, siendo $B = dom f$, entonces se puede encontrar una imagen de $g(a)$ a través de la función f, es decir, $f(g(a))$.

O sea a cada elemento de A se le hace corresponder un $f(g(a)) \in C$. Es decir, se tiene una función de A en C, lo que se denotará por $(f \circ g)$.



Definición 28. *Sea* $g : A \longrightarrow B$, $\quad f : B \longrightarrow C$ *funciones, entonces* $f \circ g : A \longrightarrow C$*, es una función definida por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *siendo* $dom(f \circ g)$ *el conjunto de todos los números* $x \in dom\ g$*, tal que* $g(x)$ *se encuentra en el dominio de* f*.*

$$dom(f \circ g) = \{x \in dom\, g / \quad g(x) \in dom f\} = \{x \in dom\, g \quad \wedge \quad g(x) \in dom f\}$$

Para que exista la composición $(f \circ g)$ debe ocurrir que: $rec\ g \cap dom f \neq \emptyset$.

Ejemplos

1. Sean $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = 2x - 3$.

   a) Determinar el dominio y la expresión analítica de $f \circ g$.

Solución. $dom f = \mathbb{R}$, $dom\, g = \mathbb{R}_0^+$ y $rec\ g = \mathbb{R}_0^+$.

Como $rec\ g \cap dom f = \mathbb{R}_0^+ \neq \emptyset$, existe composición.

$$\begin{aligned}
dom(f \circ g) &= \{x \in dom\, g / \quad g(x) \in dom f\}\\
dom(f \circ g) &= \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ / \quad \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ / \quad x \in \mathbb{R}_0^+\right\}\\
dom(f \circ g) &= \left\{x \in \mathbb{R}_0^+\right\} = \mathbb{R}_0^+.
\end{aligned}$$

Como $rec\ g \subset dom f$, $dom(f \circ g) = dom\, g$.

Su expresión analítica es: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} - 3$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

$b)$ Determinar el dominio y la expresión analítica de $g \circ f$.

Solución.

$dom\, g = \mathbb{R}_0^+$, $rec\ f = \mathbb{R}$.

donde $rec\ f \cap dom\, g = \mathbb{R}_0^+ \neq \emptyset$, luego existe composición.

$$\begin{aligned}
dom(f \circ g) &= \{x \in dom f \quad \wedge \quad f(x) \in dom\, g\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad (2x-3) \in \mathbb{R}_0^+\right\}\\
&= \{x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad 2x - 3 \geq 0\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x \geq \frac{3}{2}\right\} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

En este caso $dom(f \circ g) \subset dom f$, ya que $recf \not\subseteq dom\, g$.

Su expresión analítica es: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \sqrt{2x-3}$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Si $f(x) = -x^2 \quad \wedge \quad g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

Determinar el dominio y la expresión analítica de $g \circ f$, si es que existen.

Solución.

$dom\, g = \mathbb{R}^+$ y $rec\ f = \mathbb{R}_0^-$, pero $dom\, g \cap rec\ f = \emptyset$, $\therefore$ no existe composición.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Si $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$.

$a)$ Encontrar $(f \circ h)\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ y $(g \circ h)(\pi)$, si es que existen.

Solución.

$(f \circ h)\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = f\left(h\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = f\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

$(g \circ h)(\pi) = g(h(\pi)) = g(\operatorname{sen}\pi) = g(0) = \quad \nexists$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

b) Determinar el dominio y la expresión analítica de $(g\circ h)$ y $(g\circ g)$, si es que existen.

Solución.

$dom\, g = \mathbb{R} - \{0\}; \quad dom\, h = \mathbb{R}.$

$rec\ g = \mathbb{R} - \{0\}; \quad rec\ h = [-1, 1].$

I)

$$\begin{aligned} dom(g\circ h) &= \{x \in dom\, h \quad \wedge \quad h(x) \in dom\, g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \operatorname{sen} x \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x \neq h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{R} - \{x = h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

La expresión analítica correspondiente es:

$$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

II)

$$\begin{aligned} dom(g\circ g) &= \{x \in dom\, g \quad \wedge \quad g(x) \in dom\, g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \wedge \quad \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

La expresión analítica correspondiente es:

$$(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sean $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = x^2 - 2$. Determinar el dominio y la expresión analítica de $(g\circ f)$.

Solución.

$dom f = [2, +\infty)$; $\quad dom\, g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} dom(g \circ f) &= \{x \in dom f \quad \wedge \quad f(x) \in dom\, g\} \\ &= \left\{x \geq 2 \quad \wedge \quad \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x \geq 2 \quad \wedge \quad x - 2 \geq 0\} \\ &= \{x \geq 2 \quad \wedge \quad x \geq 2\} \\ &= [2, +\infty) \end{aligned}$$

La expresión analítica correspondiente es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-2}\right) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 2 = x - 4.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Observación 29. *En el caso de funciones por tramos se tiene:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 = dom f_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 = dom f_2 \end{cases} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$g(x) = \left\{\begin{matrix} g_1(x), & x \in B_1 = dom\, g_1 \\ g_2(x), & x \in B_2 = dom\, g_2 \\ g_3(x), & x \in B_3 = dom\, g_3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow B_1,\ B_2 \text{ y } B_3 \text{ conjuntos disjuntos.}$$

Luego el dominio de $(f \circ g)$ queda determinado por:

$$\begin{aligned} dom(f \circ g) &= \{x \in dom\, g \quad \wedge \quad g(x) \in dom f\} \\ &= dom(f_1 \circ g_1) \cup dom(f_1 \circ g_2) \cup dom(f_1 \circ g_3) \cup dom(f_2 \circ g_1)\ . \\ &\quad \cup dom(f_2 \circ g_2) \cup dom(f_2 \circ g_3) \end{aligned}$$

Ejemplo 30. *Sean* $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \in [0, 2];\ f_1 \\ -x + 1, & x \in (2, 5];\ f_2 \end{cases}$ $\quad y \quad$ $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 3);\ g_1 \\ 4, & x \in [3, 6];\ g_2 \end{cases}$

Determinar el dominio y la expresión analítica de $(f \circ g)$.

Solución.

$$\begin{aligned} dom(f_1 \circ g_1) &= \{x \in dom\, g_1 \quad \wedge \quad g_1(x) \in dom f_1\} \\ &= \{x \in [0, 3) \quad \wedge \quad x^2 \in [0, 2]\} \\ &= \left\{x \in [0, 3) \quad \wedge \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\} \\ &= [0, \sqrt{2}]. \end{aligned}$$

La expresión analítica es: $(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x^2) = 3x^2 + 4$.

$$\begin{aligned}
dom(f_1 \circ g_2) &= \{x \in dom\, g_2 \quad \wedge \quad g_2(x) \in dom f_1\} \\
&= \{x \in [3,6] \quad \wedge \quad 4 \in [0,2]\} \\
&= \{x \in [3,6] \quad \wedge \quad Falsedad\} \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

$\therefore$ no existe expresión analítica para $(f_1 \circ g_2)$

$$\begin{aligned}
dom(f_2 \circ g_1) &= \{x \in dom\, g_1 \quad \wedge \quad g_1(x) \in dom f_2\} \\
&= \{x \in [0,3) \quad \wedge \quad x^2 \in (2,5]\} \\
&= \left\{x \in [0,3) \quad \wedge \quad x \in [-\sqrt{5}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{5}]\right\} \\
&= (\sqrt{2}, \sqrt{5}].
\end{aligned}$$

La expresión analítica es: $(f_2 \circ g_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(x^2) = -x^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
dom(f_2 \circ g_2) &= \{x \in dom\, g_2 \quad \wedge \quad g_2(x) \in dom f_2\} \\
&= \{x \in [3,6] \quad \wedge \quad 4 \in (2,5]\} \\
&= \{x \in [3,6] \quad \wedge \quad Verdad\} \\
&= [3,6].
\end{aligned}$$

La expresión analítica es: $(f_2 \circ g_2)(x) = f_2(g_2(x)) = -3$.

$$\therefore (f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4, & x \in [0, \sqrt{2}] \\ -x^2 + 1, & x \in (\sqrt{2}, \sqrt{5}] \\ -3, & x \in [3,6] \end{cases}$$

Propiedades de las Funciones Compuestas

Sean f, g y h funciones e I la función idéntica.

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, asociatividad.
2. Existe una única función idéntica tal que: $f \circ I = I \circ f = f, \quad \forall\, f$.
3. $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$.
4. $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$.
5. $I^n \circ I^m = I^{n \cdot m}$, $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}^+$.
6. $I^n \circ (f + g) = (f + g)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.
7. En general no se cumple la propiedad conmutativa, es decir, $f \circ g \neq g \circ f$.

Ejemplos

1. Sean $f(x) = 3x - 5$ y $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determinar g.

   Solución.

   Si $f(x) = 3x - 5 \Longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 5 = x^2 - 3 \Longrightarrow g(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3}$.

   FIN .... FIN

2. Sean $g(x) = 3x - 2$ y $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determinar f.

   Solución.

   Como:

   $$g(x) = 3x - 2 \Longrightarrow x = \frac{g(x) + 2}{3} \Longrightarrow f(g(x)) = 9\left(\frac{g(x) + 2}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{g(x) + 2}{3}\right) + 1$$

   $= g^2(x) + 3g(x) + 3 \Longrightarrow f(x) = x^2 + 3x + 3$.

   FIN .... FIN

3. Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$. Verificar que $f \circ g = g \circ f$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

   Solución.

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4) = x^{12}$.

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^{12}$.

   $\therefore\ f \circ g = g \circ f$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

   FIN .... FIN

4. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$. Determinar si $f \circ g = g \circ f$.

   Solución.

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2$.

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$.

   $\therefore\ f \circ g \neq g \circ f$.

   FIN .... FIN

Ejercicios Propuestos

1. Determinar dominio, recorrido, ceros y gráfico para:

   a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ **Resp:** $\begin{array}{rcl} dom f &=& \mathbb{R} \\ rec f &=& [-1, +\infty). \end{array}$

   b) $f(x) = |-\sqrt{x}|$ **Resp:** $dom f = rec f = \mathbb{R}_0^+$.

   c) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **Resp:** $dom f = \mathbb{R}$, $rec\, f = \mathbb{R}_0^+$

   d) $f(x) = \dfrac{4-x}{x-3}$ **Resp:** $\begin{array}{rcl} dom f &=& \mathbb{R} - \{3\} \\ rec f &=& \mathbb{R} - \{-1\} \end{array}$

   e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ **Resp:** $\begin{array}{rcl} dom f &=& \mathbb{R} \\ rec f &=& [1, +\infty). \end{array}$

   f) $f(x) = [\sqrt{x}]$ **Resp:** $\begin{array}{rcl} dom f &=& \mathbb{R}_0^+ \\ rec f &=& \mathbb{Z}_0^+ \end{array}$

   g) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **Resp:** $\begin{array}{rcl} dom f &=& \mathbb{R} \\ rec f &=& [-4, +\infty). \end{array}$

   h) $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -9 \\ x^2 - |x| & \text{si } -9 \leq x \leq 9 \\ 2x + 5 & \text{si } x > 9 \end{cases}$ **Resp:** $\begin{array}{rcl} dom f &=& \mathbb{R} \\ rec f &=& [-\infty, -13) \cup \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right). \end{array}$

   i) $f(x) = 2x + |x+1| - |2x - 4|$ **Resp:** $dom f = rec\, f = \mathbb{R}$.

   j) $f(x) = [\operatorname{sen} x], \quad x \in [0, 2\pi]$ **Resp:** $rec\, f = \{-1, 0, 1\}$.

2. Sean $4f(x-3) = x^2 + 4$ y $g(x) = \dfrac{f(2x-3) - kx}{f(2x-3) + x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, determinar los valores de k tal que $rec\, g = (-3, 3)$.

   Resp: $k \in (-5, 1)$.

3. Sean $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$, hallar $dom f$ y $dom\, g$ y determinar si $f = g$.

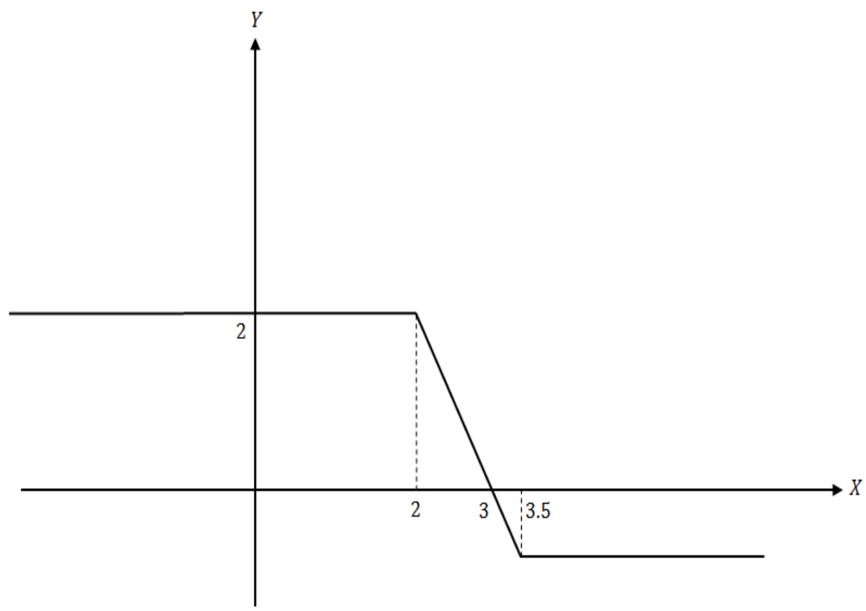
4. Sean $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \in [0,2] \\ 3, & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \in [1,4] \\ x-6, & \text{si } x \in [5,6] \end{cases}$,

   hallar $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$.

5. Sean $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ x+2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 1 \\ 4x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$,

   determinar $-f$, $|f|$, $f+3$, $5 \cdot g$, $f+g$, $\dfrac{f}{g}$.

6. Dado el gráfico de f:



   Dibujar los gráficos de las siguientes funciones:

   $f(x-2)$, $f(2-x)$, $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $1+f(x)$.

7. Sea $f(x) = \left(x|x| + \dfrac{1}{x}\right) \operatorname{sen} x^2$, determinar si f es par o impar.

   Resp: f es impar.

8. Demostrar que si f es par y g es impar, entonces $f \cdot g$ es impar.

9. Determinar el período mínimo de: $f(x) = \cos 2x + \operatorname{sen} 4x$.

   Resp: $T = \pi$.

10. Gráficar f tal que su dominio es $\mathbb{R}$ y $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

    Sabiendo que:

    a) f es impar y tiene período 4.

    b) f es par y tiene período 4.

11. Determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento:

    a) $f(x) = x^3 + 3x + 5$

    b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ **Resp:** $\begin{array}{ll} x \in (-1,1) & \text{creciente.} \\ x \in \mathbb{R} - [-1,1] & \text{decreciente} \end{array}$

12. Sean $f(x) = 2x + 6$, $x \in [0,8]$ y $g(x) = x^2 - 1$, $x \in [-2,2)$, determinar $dom(f \circ g)$ y la expresión analítica de $f \circ g$.

13. Sean $g(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ y $(f \circ g)(x) = 2x + 3$. Determinar $f(x)$.

    Resp: $f(x) = \sqrt[3]{x} + 4$.

14. Sean $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x+2, & \text{si } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$,

    determinar $g \circ f$ y $f \circ g$.

15. Sean $f(x) = 4|x| - x^2$, $x \in (-8,1)$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in (-4,0)$, determinar $dom(g \circ f)$ y la expresión analítica de $g \circ f$.

16. Sean $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Demostrar que: $f \circ g = g \circ f$.

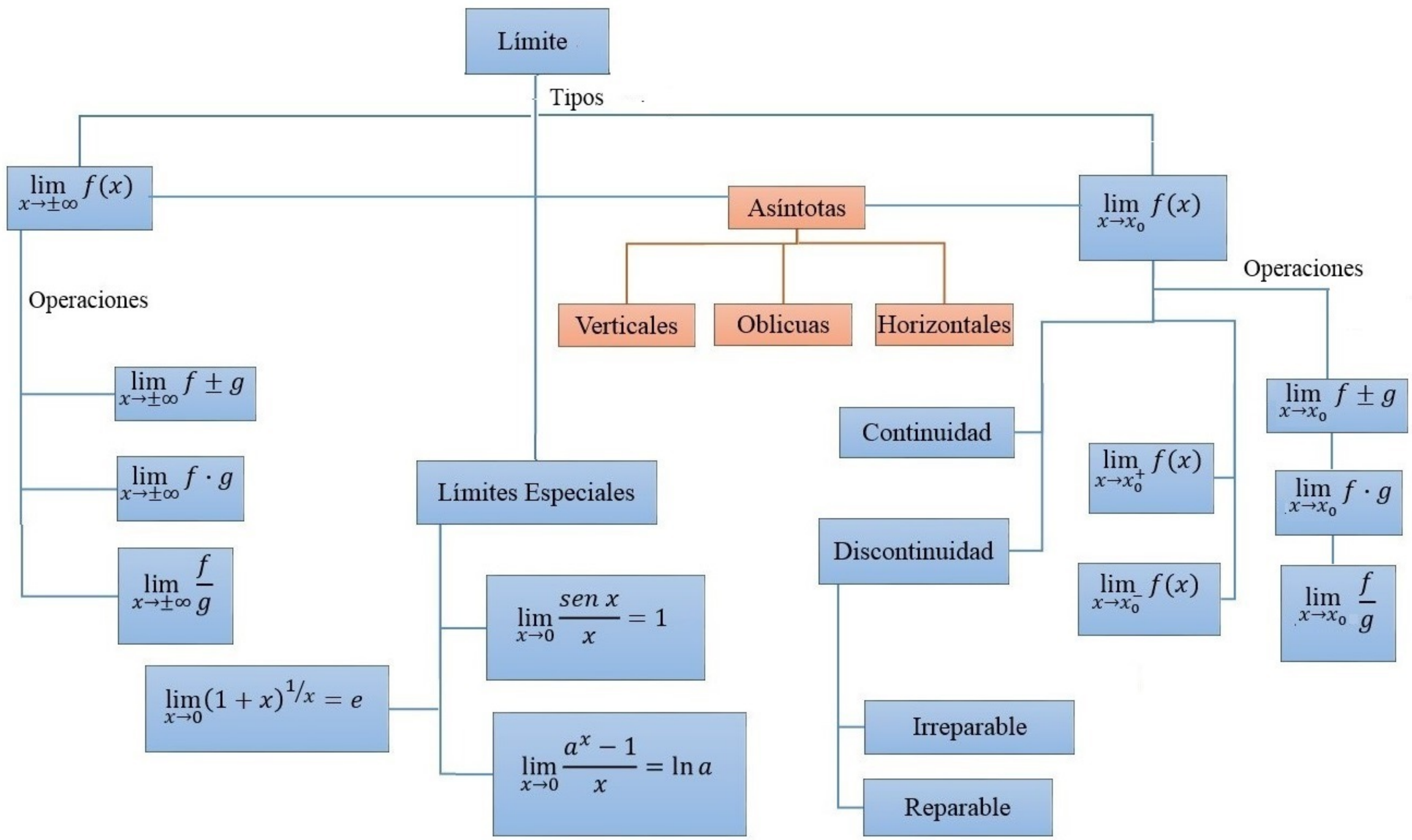
17. Sean $g(x) = 2x - 3$ y $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 4x + 3, & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Determinar $f(x)$.

    Resp: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1, & \text{si } x \geq -1 \\ 2x + 9, & \text{si } x < -1 \end{cases}$

Capítulo 3

Límite y Continuidad de Funciones

Mapa Conceptual



Competencias a lograr

Al término del presente capítulo, el alumno será capaz de:

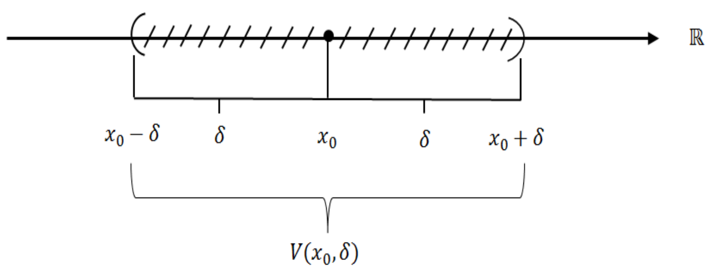
- Comprender el concepto de límite.
- Calcular límites de funciones cuando la variable tiende a un número real o al infinito.
- Calcular límites laterales.
- Determinar las ecuaciones de las asíntotas de una curva.
- Determinar la continuidad de una función.

3.1. Límite de Funciones

Se inicia el estudio del límite de funciones definiendo algunos conceptos básicos.

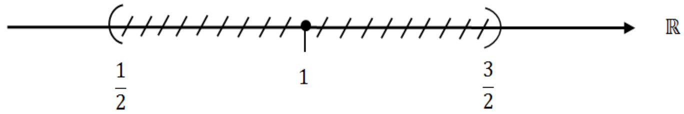
Definición 31. ***(Vecindad)****. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, se define vecindad (o entorno) de x_0 y de radio $\delta > 0$, al conjunto denotado por $V(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < \delta\}$.*

Se observa que $V(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$.



Ejemplo 32.

$$\begin{aligned} V\left(1, \frac{1}{2}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R} / \quad |x - 1| < \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$



Definición 33. ***(Vecindad Reducida)***. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, se define vecindad reducida de centro x_0 y de radio $\delta > 0$, al conjunto denotado por $V^*(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0\}$.*

Para visualizar el concepto de límite de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se analizarán los siguientes ejemplos:

1. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; $dom f = \mathbb{R} - \{-2\}$

   ¿ Qué pasa con $f(x)$ cuando x toma valores cercanos a -2?

   Se analizará primero por la izquierda de -2, y luego por la derecha de -2.

   a) Por la izquierda

x	$-2,9$	$-2,8$	$-2,5$	$-2,4$	$-2,3$	$-2,1$	$-2,01$	$-2,001$
$f(x)$	$-4,9$	$-4,8$	$-4,5$	$-4,4$	$-4,3$	$-4,1$	$-4,01$	$-4,001$

   b) Por la derecha

x	-1	$-1,3$	$-1,5$	$-1,6$	$-1,7$	$-1,8$	$-1,9$	$-1,999$
$f(x)$	-3	$-3,3$	$-3,5$	$-3,6$	$-3,7$	$-3,8$	$-3,9$	$-3,999$

   Se aprecia que a medida que x se aproxima a -2, $f(x)$ se aproxima a -4.

2. Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ que no está definida para $x = 0$.

   ¿ Qué pasará con $f(x)$ cuando x se aproxima a 0?

   a) Por la izquierda

x	$-0,1$	$-0,05$	$-0,001$	$-0,00015$
$f(x)$	$0,9983$	$0,99958$	$0,99999983$	$0,999999996$

   b) Por la derecha

x	$0,1$	$0,05$	$0,001$	$0,00015$
$f(x)$	$0,998$	$0,9995$	$0,99999983$	$0,999999996$

Para el ejemplo 1, se dice que el límite de $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$, cuando x tiende a -2, es -4, lo que se denota por $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$.

En el ejemplo 2, se dice que el límite de $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es 1 cuando x tiende a cero, lo que se denota por $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$.

Observaciones

1. En el ejemplo 1) este límite indica que la distancia de $f(x)$ y -4 es pequeña cuando la distancia de x y -2 también lo es. Es decir, $|f(x)-(-4)|$ es pequeño cuando $|x-(-2)|$ lo es. Así si $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ son tan pequeños como se quiera, se dice que $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=-4$, significando que $|f(x)-(-4)|<\varepsilon$ cuando $|x-(-2)|<\delta$. Es decir, para cualquier número pequeño ε es posible determinar otro número pequeño δ.

2. Aunque en los ejemplos anteriores f no está definida para $x_0=-2$ y para $x_0=0$, el proceso del límite es válido.

Definición 34. *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$. Se dice que un número $L\in\mathbb{R}$ es el límite de f cuando x tiende a x_0, si y sólo si para todo $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ cuando $0<|x-x_0|<\delta$, es decir,*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\quad/\quad 0<|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

Además $|f(x)-L|<\varepsilon\Longrightarrow-\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon\Longrightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$.

$0<|x-x_0|<\delta\Longrightarrow-\delta<x-x_0<\delta,\ x\neq x_0\Longrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

Es decir, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tal que $f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ siempre que $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Teorema 35. *Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ existe y es igual a L, L es único.*

Demostración. Sean L_1 y L_2 los límites de $f(x)$, cuando $x\longrightarrow x_0$.

Luego

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L_1\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0\quad/\quad 0<|x-x_0|<\delta_1\Longrightarrow|f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L_2\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0\quad/\quad 0<|x-x_0|<\delta_2\Longrightarrow|f(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ y $\varepsilon>0$ cualquiera

$\therefore$ si $0<|x-x_0|<\delta\Longrightarrow\quad 0<|x-x_0|<\delta_1\quad\wedge\quad 0<|x-x_0|<\delta_2$

$\Longrightarrow|f(x)-L_1|<\dfrac{\varepsilon}{2}\quad\wedge\quad|f(x)-L_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\therefore|L_1-L_2|=|L_1-f(x)+f(x)-L_2|\le|f(x)-L_1|+|f(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\therefore |L_1 - L_2| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \qquad \therefore L_1 - L_2 = 0 \Longleftrightarrow L_1 = L_2$$

$\square$

Ejemplos

1. Sea $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, demostrar que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

   Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que:

   $0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$, pero como $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

   se tiene que para cualquier $\delta > 0$, $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ (verdadero)

   $$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

   $\square$

2. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 3}(4x - 1) = 11$.

   Demostración.

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x - 3| < \delta \Longrightarrow |4x - 12| < \varepsilon$$

   $|4x - 12| = 4|x - 3| < \varepsilon \Longrightarrow |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

   Sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow |x - 3| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 11| < \varepsilon$

   $$\therefore \lim_{x \to 3}(4x - 1) = 11$$

   $\square$

3. Sea $f(x) = 4x - 1$. Si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 11$, determinar δ para $\varepsilon = 0,001$ tal que $|f(x) - 11| < 0,01$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$.

   Solución.

   $|f(x) - 11| < 0,01 \Longrightarrow |4x - 1 - 11| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 0,01 \Longrightarrow |x - 3| < 0,0025$.

   Luego considerando $\delta = 0,0025$ se tiene que $|4x - 1 - 11| < 0,01$ siempre que $0 < |x - 3| < 0,0025$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Demostración.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \quad / \quad 0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow |x^2-4| < \varepsilon$$

Se tiene que $|x^2-4| = |x-2||x+2|$.

Para acotar $|x+2|$, sea $\delta_1 = 1 \Longrightarrow |x-2| < 1 \Longrightarrow -1 < x-2 < 1$

$\Longrightarrow 1 < x < 3 \Longrightarrow 3 < x+2 < 5 \Longrightarrow -5 < 3 < x+2 < 5 \Longrightarrow |x+2| < 5$

Como $|x^2-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < \varepsilon \Longrightarrow |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Sea $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

$\therefore$ Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$

$$\therefore \lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

$\square$

5. Demostrar que $\lim\limits_{x\to -2} x^3 = -8$

Demostración.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \quad / \quad 0 < |x+2| < \delta \Longrightarrow |x^3+8| < \varepsilon$$

Se tiene que $|x^2+8| = |(x+2)(x^2-2x+4)| = |x+2||x^2-2x+4|$. Para acotar $|x^2-2x+4|$, se tiene

Sea $\delta_1 = 1 \Longrightarrow |x+2| < 1 \Longrightarrow -1 < x+2 < 1 \Longrightarrow -3 < x < -1$, de donde se obtiene:

$1 < x^2 < 9 \quad \text{y} \quad 2 < -2x < 6$

$\therefore 3 < x^2 - 2x < 15 \quad / + 4$

$7 < x^2 - 2x + 4 < 19 \Longrightarrow |x^2 - 2x + 4| < 19$

$\therefore |x+2||x^2 - 2x + 4| < |x+2| \cdot 19 < \varepsilon$

$\therefore |x+2| < \dfrac{\varepsilon}{19} = \delta_2.$

Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\} = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{19}\right\}$

$$\therefore \lim_{x \to -2} x^3 = -8$$

$\square$

6. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{2}{x-4} = 2.$

Demostración.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x-5| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{2}{x-4} - 2 \right| < \varepsilon$$

Se tiene que $\left| \dfrac{2}{x-4} - 2 \right| = \left| \dfrac{2 - 2x + 8}{x-4} \right| = \left| \dfrac{-2(x-5)}{x-4} \right| = 2 \left| \dfrac{x-5}{x-4} \right|.$

Para acotar $\left| \dfrac{1}{x-4} \right|$, se tiene:

Sea $\delta_1 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow |x-5| < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} < x-5 < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} < x-4 < \dfrac{3}{2} \Longrightarrow \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{x-4} < 2$

$\therefore \left| \dfrac{1}{x-4} \right| < 2$

$\therefore \dfrac{2|x-5|}{|x-4|} < 4|x-5| < \varepsilon \qquad \therefore |x-5| < \dfrac{\varepsilon}{4} = \delta_2.$

Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\} = \text{mín}\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$

$$\therefore \lim_{x \to 5} \frac{2}{x-4} = 2$$

$\square$

Operaciones con Límite

Teorema 36. *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *funciones,* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ *y* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$. *Entonces:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot L_1, \quad c \in \mathbb{R}.$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, \qquad$ *con* $L_2 \neq 0$

5. *Sea* $f(x) = c \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}.$

6. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, *siempre que* $\sqrt[n]{L_1} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{R}.$

7. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)^n = L_1^n, \quad n \in \mathbb{R}.$

Demostración. Probaremos la parte 1 del teorema 36.

Sean $\varepsilon > 0$ y δ_1 y δ_2 tales que:

$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Luego $0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \wedge \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2$, siendo

$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$$

□

Observación 37. *Usando inducción matemática puede demostrarse una generalización de la parte 1) y 2) del teorema 36 a más de dos límites, es decir,*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1, \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x) = L_n$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$$

y

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\right] = L_1\cdot L_2\cdot\ldots\cdot L_n$$

Ejemplos

1. $\displaystyle\lim_{x\to 7} 7 = 7$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 3}(2x+1) = 2\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1 = 2\cdot 3 + 1 = 7$

3. $\displaystyle\lim_{x\to -2}(5x+7) = -3$

4. $\displaystyle\lim_{x\to -2}(5x+7)^4 = \left(\lim_{x\to -2}(5x+7)\right)^4 = (-3)^4 = 81$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1} = \frac{\lim_{x\to 4} x}{\lim_{x\to 4}(-7x+1)} = \frac{4}{-27}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1}} = \left(-\frac{4}{27}\right)^{1/3} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = 27$

9. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\cdot\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x} = (*)$

    Sea $z^6 = x+1$. Si $x\longrightarrow 0$ entonces $z\longrightarrow 1$

    Además $z^2 = \sqrt[3]{x+1}$ y $z^3 = \sqrt{x+1}$

    $\therefore$ de $(*)$ se tiene:

    $\displaystyle\lim_{z\to 1} = \frac{z^3-z^2}{z^6-1} = \lim_{z\to 1} = \frac{z^2(1-z)}{(z^3-1)(z^3+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{-z^2(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)(z^3+1)} = -\frac{1}{6}$

11. $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n; \quad n \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} x^n &= \lim_{x\to x_0} x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x\\
\lim_{x\to x_0} x^n &= \lim_{x\to x_0} x\cdot \lim_{x\to x_0} x\cdot \lim_{x\to x_0} x\ldots\cdot \lim_{x\to x_0} x\\
\lim_{x\to x_0} x^n &= x_0\cdot x_0\cdot x_0\ldots\cdot x_0\\
\lim_{x\to x_0} x^n &= x_0^n
\end{aligned}$$

12. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ no existe.

Demostración. Sea $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = L$.

$\therefore 1 = \lim\limits_{x\to 0} 1 = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = 0\cdot L = 0, \quad$ pero $1\neq 0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ no existe. $\square$

Límites Laterales

Cuando en un límite $x \longrightarrow x_0$, se entiende que este acercamiento es tanto por la derecha de x_0 como por la izquierda de x_0.

Definición 38.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0/ \quad 0<x-x_0<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

*llamado **límite lateral derecho**. En este caso x tiende a x_0 con valores mayores que x_0.*

Definición 39.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0/ \quad 0<x_0-x<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

*llamado **límite lateral izquierdo**. En este caso x tiende a x_0 con valores menores que x_0.*

Observaciones 40.

1. *De las definiciones dadas, se tiene que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \quad\wedge\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

2. Si alguno de los límites laterales no existe, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \nexists$.

3. Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L_2$*,* $L_1 \neq L_2$*, entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *no existe.*

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} |x|$.

   Solución.

   $$\text{Como } |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \text{ se tiene:}$$

   a) Si $x > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

   b) Si $x < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = -0 = 0$.

   $\therefore \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.

   FIN .... FIN

2. Analizar $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$

   Solución. Como $domf = \mathbb{R}_0^+$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ no existe. Luego $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$ no existe, aunque $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

   FIN .... FIN

3. Analizar $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{|x|} + 1 \right)$

   Solución. Sea $f(x) = \dfrac{x}{|x|} + 1$, entonces $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   Luego $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 \quad$ y $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2 = 2$

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

   Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{|x|} + 1 \right)$ no existe.

   FIN .... FIN

4. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Solución.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0.$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$. Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces:

$\lim_{x \to 0} f(x)$ no existese.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Sea $g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \neq 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x \to 0} g(x)$.

Solución.

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\therefore \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \wedge \lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

6. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq 1 \\ -x+2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$

Solución.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x+2) = 1$$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

7. Sea $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 1 \\ 3x+1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \\ -5x+7, & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $\lim_{x \to 2} f(x)$

Solución.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1) = 4 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 4.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 2^-}(3x+1) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 2^+}(-5x+7) = -3 \end{array}\right\} \neq \therefore \lim_{x\to 2} f(x) \nexists.$$

FIN .... FIN

Teorema 41. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *y* $g(x)$ *es acotada en un entorno de* x_0*, entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0.$

Ejemplo 42. *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sen} x = 0.$

Demostración. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$.

Se tiene que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, $\therefore f(x)$ es acotada. Entonces, según teorema: $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sen} x = 0$ □

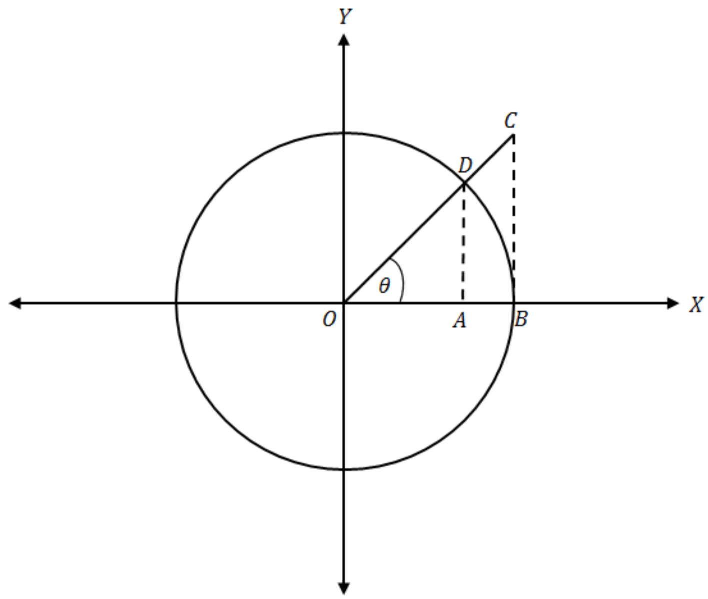
Teorema 43. *(* ***Teorema de Acotación****). Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$*,* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$ *y* $h(x)$ *es tal que* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$*,* $\forall x \in V(x_0,\delta)$*, entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L.$

Límites Trigonométricos

I. Obtención de los siguientes límites:

$$\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta, \quad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta, \quad \lim_{\theta\to 0} \operatorname{tg}\theta.$$

1.- Considerando una circunferencia $C(0,0)$ y radio 1, se tiene:



Del gráfico se deduce que:
$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}\theta| &= \overline{AD} \\ |\cos\theta| &= \overline{OA} \\ |\operatorname{tg}\theta| &= \overline{BC} \end{aligned}$$

Además: $\overline{AD} \leq \overset{\frown}{\mathrm{AB}} \leq \overline{BC} \Longrightarrow |\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta| \Longrightarrow -|\theta| \leq \operatorname{sen}\theta \leq |\theta|$.

Como $\lim_{\theta\to 0} |\theta| = 0$, por teorema de acotamiento, $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$.

$$\therefore \boxed{\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = 0}$$

2.- En la figura se observa también que $\overline{BD} \leq \overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ y en triángulo DAB se tiene:

$\overline{BD}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2$; $\quad \overline{DA} = \operatorname{sen}\theta$; $\quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 1 - \cos\theta$.

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \operatorname{sen}^2\theta + (1-\cos\theta)^2 \\ \overline{BD}^2 &= \operatorname{sen}^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta \\ \overline{BD}^2 &= 2 - 2\cos\theta \end{aligned}$$

Como $\overline{BD} \leq \overset{\frown}{\mathrm{BD}} \Longrightarrow \sqrt{2-2\cos\theta} \leq |\theta| \Longrightarrow 2 - 2\cos\theta \leq \theta^2 \Longrightarrow 1 - \cos\theta \leq \dfrac{\theta^2}{2}$

$$\Longrightarrow -\frac{\theta^2}{2} \leq -1 + \cos\theta \leq 1 - \frac{\theta^2}{2} \leq \cos\theta \leq 1.$$

Pero $\lim\limits_{\theta \to 0} \left(1 - \dfrac{\theta^2}{2}\right) = 1$, y por teorema de acotación, $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$.

$$\therefore \boxed{\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1}$$

3.- $\lim\limits_{\theta \to 0} \operatorname{tg}\theta = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{0}{1} = 0$

$$\therefore \boxed{\lim_{\theta \to 0} \operatorname{tg}\theta = 0}$$

Además $\lim\limits_{\theta \to 0} \operatorname{cotg}\theta \nexists$, $\quad \lim\limits_{\theta \to 0} \sec\theta = 1$, $\quad \lim\limits_{\theta \to 0} \operatorname{cosec}\theta \nexists$.

II. Obtención de los siguientes limites:

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} \cos x.$$

1.- Sea $x - x_0 = h$, $\quad x \longrightarrow x_0 \Longrightarrow h \longrightarrow 0$.

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \lim\limits_{h \to 0} \operatorname{sen}(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0} (\operatorname{sen} x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \operatorname{sen} h) = \operatorname{sen} x_0$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0}$$

2.- Análogamente.

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \lim\limits_{h \to 0} \cos(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0} (\cos x_0 \cdot \cos h - \operatorname{sen} x_0 \cdot \operatorname{sen} h) = \cos x_0$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0}$$

III. Obtención de $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

De la parte I) se tiene que $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta| \leq |\operatorname{tg}\theta|$. Considerando límites laterales, se tiene:

a) Si $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\quad \operatorname{sen}\theta \leq \theta \leq \operatorname{tg}\theta \quad / : \operatorname{sen}\theta \Longrightarrow 1 \leq \dfrac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \leq \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\Longrightarrow \cos\theta \leq \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1$. Como $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \cos\theta = 1$ y por teorema de acotamiento, $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$.

b) Si $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow -\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \cos(-\theta) \leq \dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} \leq 1$

$\Longrightarrow \cos\theta \leq \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Luego de *a*) y *b*)

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1}$$

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}$.

   Solución.

   $$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

   $$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}=1\cdot\frac{0}{2}=0.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

   Solución.

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

   $$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.

   Solución.

   $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\sqrt{x}=1\cdot 0=0.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$.

   Solución.

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+2\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(\cos x-1)}{x^2}$$

   $$2\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{\cos x}{\cos x+1}=\frac{-2}{2}=-1.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Observación 44. *Sean f y g funciones tales que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$, entonces $L_1 \leq L_2$.*

Límites Especiales

Se considerarán límites especiales, los siguientes:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}, \quad a > 0.$

Demostración. 3: Sea $x = \dfrac{1}{t}$. Si $x \longrightarrow 0 \Longrightarrow t \longrightarrow \infty$. Sustituyendo, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

□

Demostración. 4: Sea $a^x - 1 = t \Longrightarrow a^x = t + 1 \quad / \ln \Longrightarrow x \ln a = \ln(t + 1)$,

si $x \longrightarrow 0 \Longrightarrow t \longrightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln a}{\dfrac{1}{t} \ln(t + 1)} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln a}{\ln(t + 1)^{1/t}} = \frac{\ln a}{\ln \left(\lim\limits_{t \to 0} (t + 1)^{1/t}\right)} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$$

Si $a = e$ entonces $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$ □

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 2^{\lim\limits_{x\to 0} x} = 2^0 = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\operatorname{cosec}\pi x = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\operatorname{sen}\pi x}$

   Sea $x-3=t$. Si $x \longrightarrow 3 \Longrightarrow t \longrightarrow 0$. Sustituyendo se tiene que:

   $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\operatorname{sen}\pi(3+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\operatorname{sen}(3\pi+\pi t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\operatorname{sen}(\pi+\pi t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{-\operatorname{sen}\pi t}$

   $= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{-\pi\dfrac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}} = -\dfrac{1}{\pi}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-ax}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-bx}-1}{x}$

   $= \lim\limits_{x\to 0}(-a)\left(\dfrac{e^{-ax}-1}{-ax}\right) - \lim\limits_{x\to 0}(-b)\left(\dfrac{e^{-bx}-1}{-bx}\right) = -a+b = b-a.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(x+1)-\ln x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

   $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e\cdot 1 = e.$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}}{\dfrac{c^x-1}{x}-\dfrac{d^x-1}{x}} = \dfrac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d} = \dfrac{\ln\dfrac{a}{b}}{\ln\dfrac{c}{d}}.$

Límites Infinitos

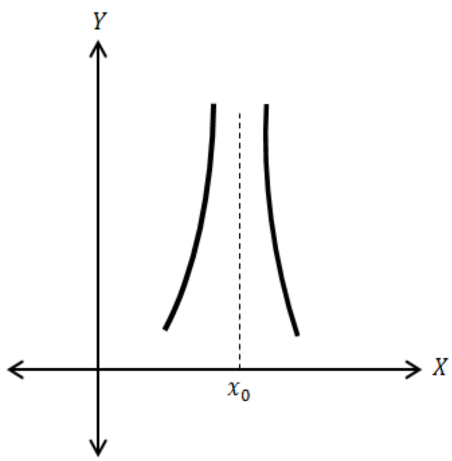
Definición 45.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall\ M > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$

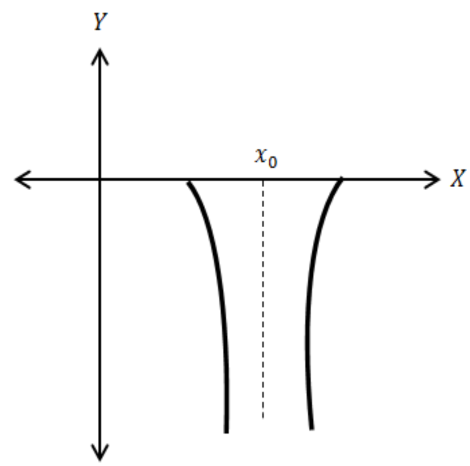
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall\ M > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -M$

Gráficamente se tiene:

Caso 1:



Caso 2:



La recta $x = x_0$, se denomina asíntota vertical. Según los gráficos, a medida que x se aproxima a x_0, $f(x)$ aumenta indefinidamente (caso 1) o disminuye indefinidamente (caso 2).

Con respecto a los límites laterales, se tiene:

I. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall\ M > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$

II. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall\ M > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$

III. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall\ M > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) < -M.$

IV. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall\ M > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow f(x) < -M.$

Ejemplos

1. Probar que $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4} = +\infty$

   Demostración.

   $\forall\ M > 0, \exists > 0\ /\ 0 < x-4 < \delta \Longrightarrow \dfrac{1}{x-4} > M$, es decir debe $\exists\ \delta > 0\ /\ x-4 < \delta$.

   Si $\dfrac{1}{x-4} > M \Longrightarrow \dfrac{1}{M} > x-4$, ya que $x > 4$, $\therefore\ x-4 > 0 \Longrightarrow x-4 < \dfrac{1}{M} = \delta$.

   $\therefore\ \exists\ \delta = \dfrac{1}{M}\ /\ 0 < x-4 < \delta \Longrightarrow \dfrac{1}{x-4} > M$. $\square$

2. Probar que $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$

   Demostración.

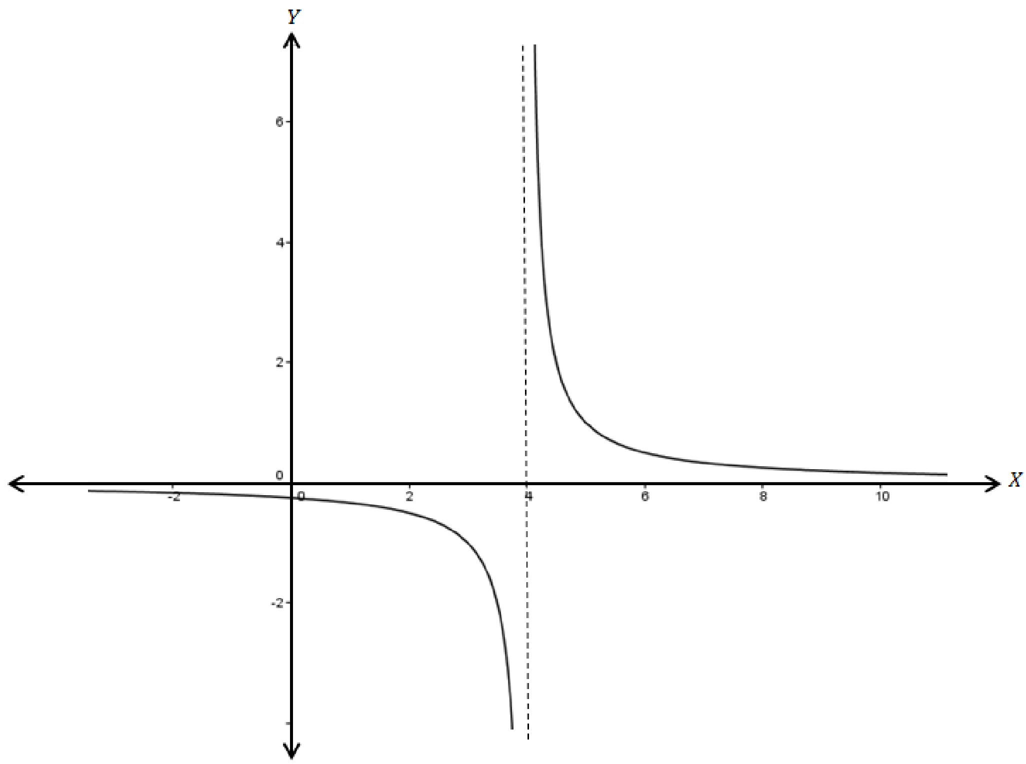
   $\forall\ M > 0, \exists > 0\ /\ 0 < x-4 < \delta \Longrightarrow \dfrac{1}{x-4} < -M$.

   $\dfrac{1}{x-4} < -M;\quad$ con $x < 4$, $x-4 < 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{M} < x-4\ /\ (-1)$

   $\dfrac{1}{M} > 4-x \Longrightarrow 4-x < \dfrac{1}{M} = \delta$.

   $\therefore\ \delta = \dfrac{1}{M}\ /\ \dfrac{1}{x-4} < -M,\quad$ cuando $0 < 4-x < \delta$. $\square$

Gráficamente la situación de ambos es:



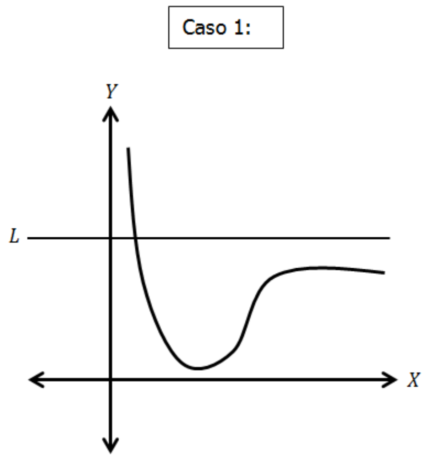
Límites Al Infinito

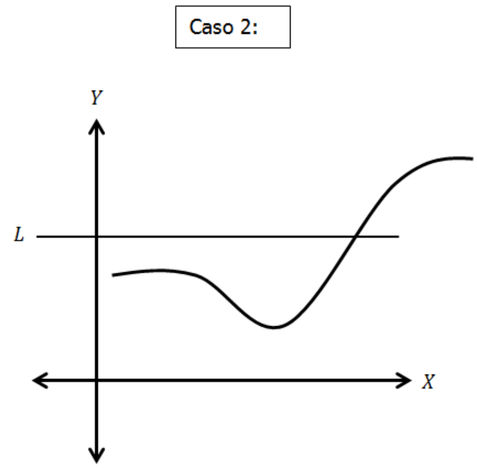
Definición 46.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0\ /\ x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0\ /\ x < -M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

Gráficamente se tiene:





La recta $y = L$ se denomina asíntota horizontal.

Ejemplos

1. Demostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

   Demostración.

   P.D. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M > 0 \ / \ x > M \Longrightarrow \left| \dfrac{1}{x-1} \right| < \varepsilon.$

   $\dfrac{1}{|x-1|} < \varepsilon \Longrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} < |x-1|.$

   Sea $x - 1 > 0 \Longrightarrow x - 1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow x > \dfrac{1}{\varepsilon} + 1.$

   Haciendo $M = 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, se verifica que M existe.

   $\therefore\ x > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow x - 1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-1} < \varepsilon \Longleftrightarrow \left| \dfrac{1}{x-1} \right| < \varepsilon \qquad \therefore\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0. \quad \square$

2. Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 1}{6x^4 - 7x + 3}$.

   Solución.

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 1}{6x^4 - 7x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 1}{6x^4 - 7x + 3} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{6 - \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$.

Solución.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}} = 0.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$.

Solución.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{\left(2 - \frac{5}{x^2}\right)}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x+1}, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}, & \text{si } 0 < x < 2 \\ 5x + 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solución.

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3}{x+1} = 3 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to 0^+} 3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 3.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \frac{\operatorname{sen} 6}{2} \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to 2^+} (5x+1) = 11 \end{array}\right\} \neq \therefore \lim_{x\to 2} f(x) \nexists.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

6. Calcular $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$.

Solución.

$$\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1+\left(\cos\frac{x}{m}\right)-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{m}-1}\cdot m\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)}$$

Si $m\longrightarrow\infty\Longrightarrow\left(\cos\dfrac{x}{m}-1\right)\longrightarrow 0$.

Entonces

$$\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\cos\frac{x}{m}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{m}-1}}\right]^{m\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)}=e^{\lim\limits_{m\to\infty}m\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)}=e^0=1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

7. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\operatorname{sen}x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

Solución.

Sea $x-\dfrac{\pi}{2}=t$. Si $x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow t\longrightarrow 0$.

$$\therefore\lim_{t\to0}\frac{\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{-t}=\lim_{t\to0}\ln(\cos t)^{-1/t}=\lim_{t\to0}\ln(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}\cdot\frac{-(\cos t-1)}{t}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t}}=$$

$$\ln\lim_{t\to0}\left[(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}}\right]^{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\cdot\frac{1}{1+\cos t}}=\ln e^0=0$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

8. Calcular $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+4x-4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+4x-4}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{-3x+3}{x^2+4x-4}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{-3(x-1)}{x^2+4(x-1)}\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{-3(x-1)}{x^2+4(x-1)}\right)^{\frac{x^2+4(x-1)}{-3(x-1)}}\right]^{\frac{-3(x-1)}{x^2+4(x-1)}\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{-3}$$

FIN .... FIN

Asíntotas Verticales, Horizontales y Oblicuas

Definición 47.

1. *La recta $x = a$ es una asíntota vertical de f, si* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ó* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.
2. *La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua derecha de f, si*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = b$$

3. *La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua izquierda de f, si*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = b$$

4. *Si en los casos* 2 *ó* 3, $m = 0$ *se tendrá una asíntota horizontal* $y = b$.

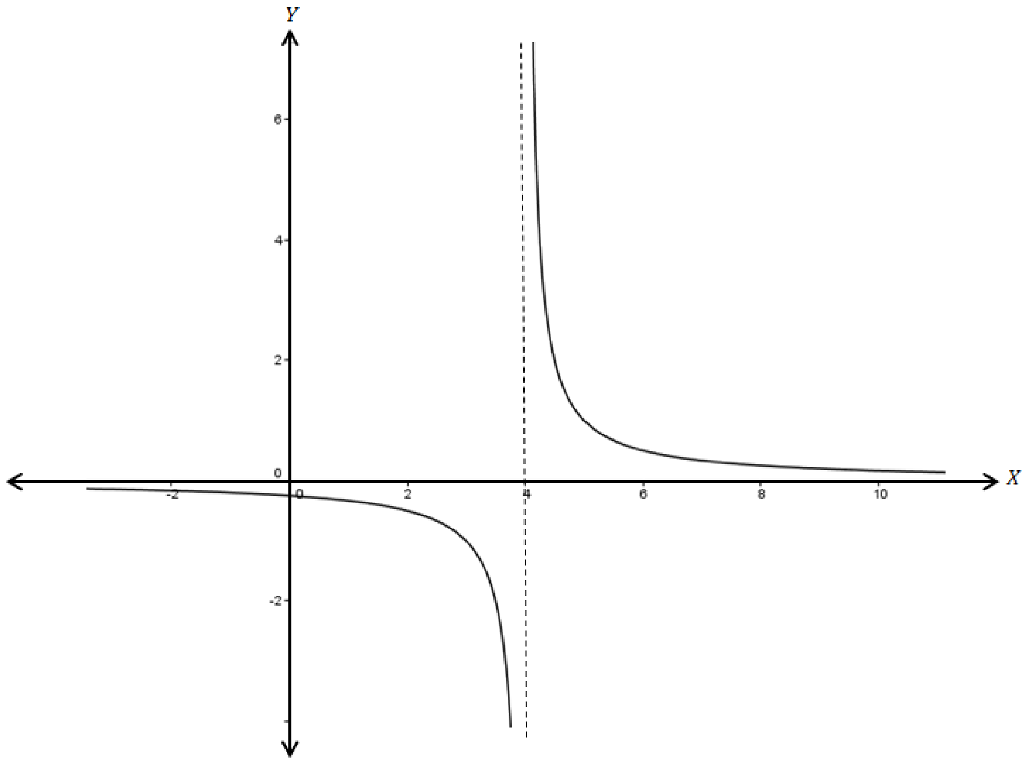
Ejemplos

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, determinar las asíntotas verticales y horizontales.

   Solución.

   $\lim_{x\to 4^+}\dfrac{1}{x-4} = +\infty$ y $\lim_{x\to 4^-}\dfrac{1}{x-4} = -\infty$.

   Luego $x = 4$ es asíntota vertical. Además $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(x-4)} = 0 = m$ y $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-4} = 0$
   $\therefore y = 0$ es una asíntota horizontal.



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determinar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Solución.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{(x+1)(x-1)}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^+} x^2}{\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x+1} \cdot \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}}$

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$

$\therefore$ $x = 1$ es una asíntota vertical .

Análogamente $x = -1$ es otra asíntota vertical ya que f es par.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1=m.$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{x^2+x\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4-x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}+x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+x^2-1}\cdot\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

$\therefore\ y=x$ es una asíntota oblicua derecha.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=-1=m.$$

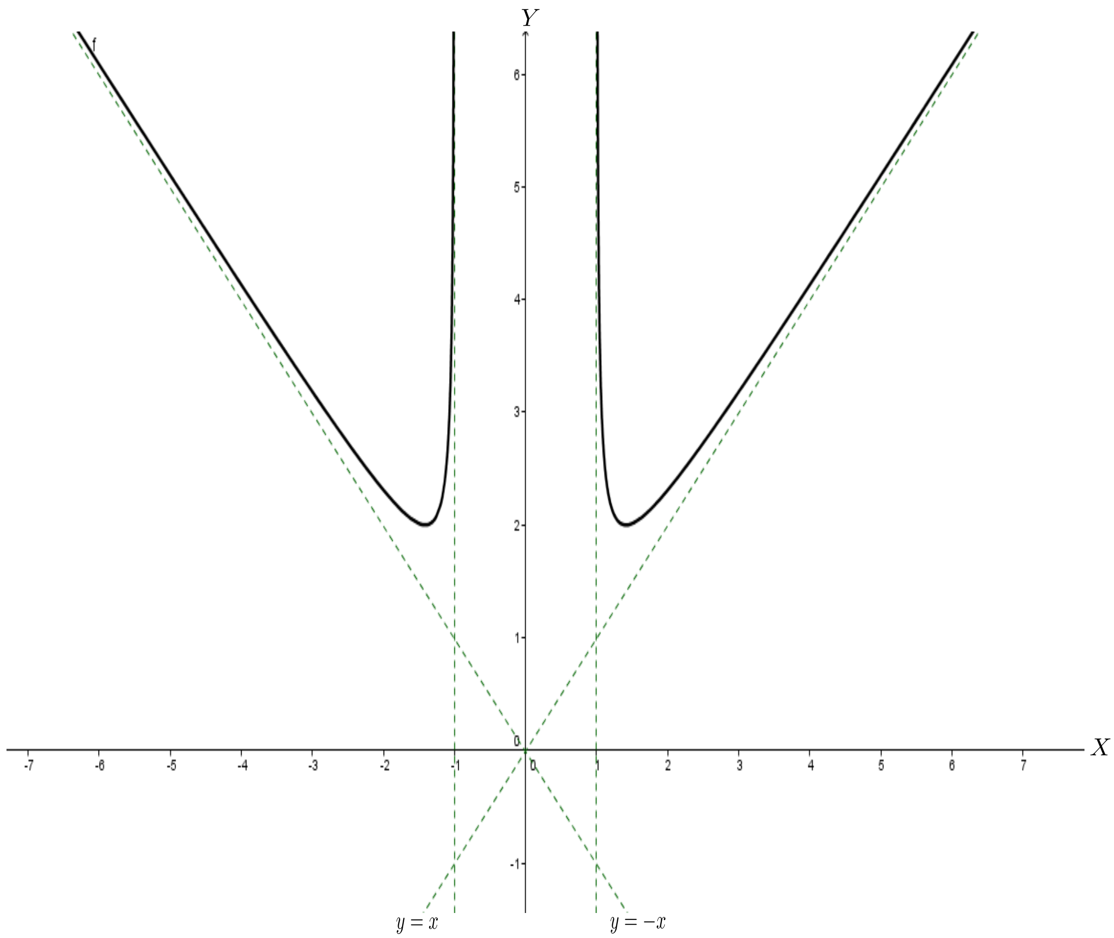
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right]$$

Sea $z=-x$. Si $x\longrightarrow-\infty\Longrightarrow z\longrightarrow+\infty$.

Luego $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{z^2}{\sqrt{z^2-1}}-z\right]=0=b$ (Calculado anteriormente).

$\therefore\ y=-x$ es una asíntota oblicua izquierda.

Gráficamente:



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = |x+4| + \dfrac{4}{|x|-3}$. Hallar las asíntotas de f.

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$

$\therefore$ $x = 3$, $x = -3$ son asíntotas verticales.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+4}{x} + \dfrac{4}{x(x-3)}\right) = 1 = m.$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + 4 + \frac{4}{x-3} - x\right) = 4 = b.$$

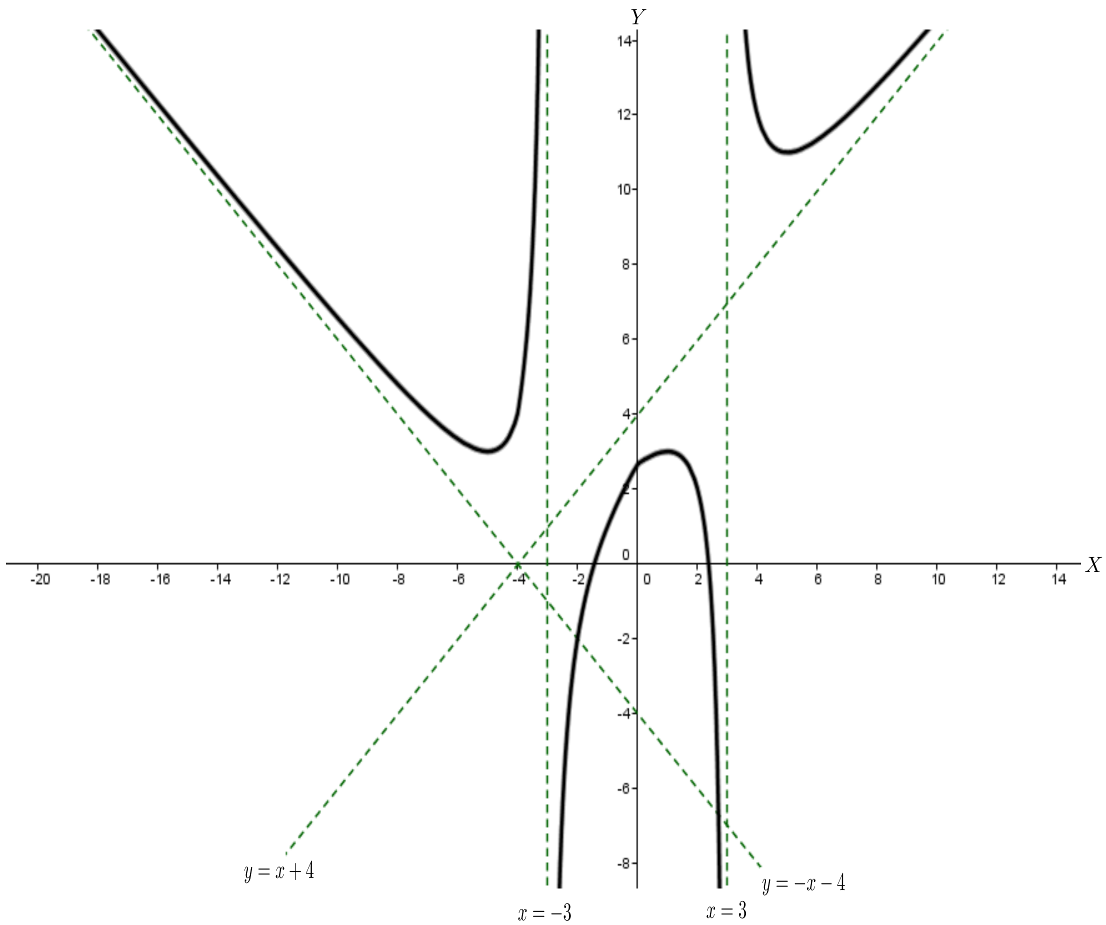
$\therefore$ $y = x + 4$ es asíntotas oblicua derecha.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-x-4}{x}+\dfrac{4}{x(-x-3)}\right)=-1=m.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-4-\dfrac{4}{x-3}+x\right)=-4=b.$

$\therefore\ y=-x-4$ es asíntotas oblicua izquierda.

Gráficamente:



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Dada $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{1}{x+1}, & \text{si } x<-1\\ \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & \text{si } x>-1\end{cases}$. Hallar las asíntotas.

Solución.

a) Para $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x+2}{x+1} = -\infty.$$

$\therefore x=-1$ es asíntota vertical.

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^3+x} = 0 = m.$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2+1}-0\right) = 2 = b.$$

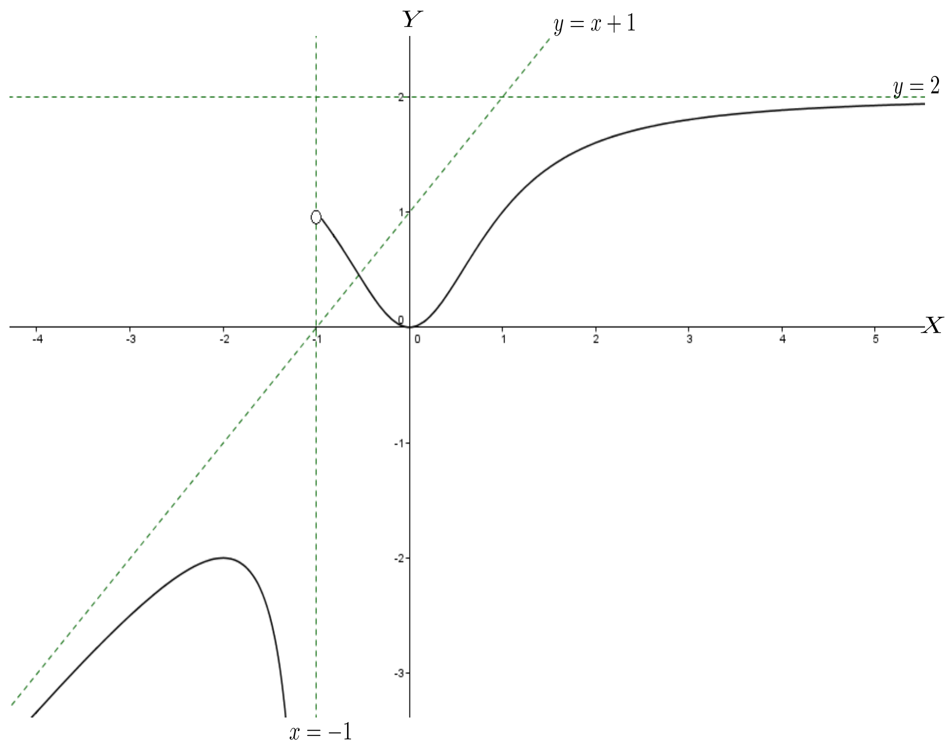
$\therefore y=2$ es asíntota horizontal.

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x^2+x}\right) = 1 = m.$

$$\lim_{x\to -\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to -\infty}\left(x+1+\frac{1}{x+1}-x\right) = 1 = b.$$

$\therefore y=x+1$ es asíntota oblicua izquierda.

Gráficamente:



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Ejercicios Propuestos

1. Aplicando definición de límite, demostrar:

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4}{x-2} = 2.$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{2(x^2+1)} = 0.$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right) = 2.$

   d) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x-1} = 1.$

2. Calcular:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ **Resp:** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}.$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{6}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$ **Resp:** -2

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}\right)$ **Resp:** $\dfrac{q}{p}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt[5]{x^5+2x}}$ **Resp:** 0

   e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ **Resp:** $\nexists$

   f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x}$ **Resp:** $\nexists$

   g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}, & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x-1}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$ **Resp:** $\dfrac{3}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)$ siendo

$$f(x)=\begin{cases}5x-1 & \text{si } x\leq 1\\ 4-x & \text{si } x>1\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}3-2x & \text{si } x<1\\ x-1 & \text{si } x=1\\ 4x-2 & \text{si } x>1\end{cases}$$ **Resp:** 5

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-3)+g(x-2)}{h(x+5)}$, siendo $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{1+x} & \text{si } x<-1\\ x^2+2x & \text{si } x>-1\end{cases};$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ 1+2x & \text{si } x>0\end{cases};\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-21}{7-x} & \text{si } x<7\\ 2x^2-22x+56, & \text{si } x>7\end{cases}$$ **Resp:** $\dfrac{1}{3}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(x+3)^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ **Resp:** 0.

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{tg} x}{x^3}$ **Resp:** $-\dfrac{1}{2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/3}-\operatorname{cotg} x-1-\operatorname{cosec} x}{x}$ **Resp:** $\dfrac{5}{6}$

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$ **Resp:** $\dfrac{1}{2}$

n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{2x}{m}\right)^m$ **Resp:** 1

o) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x+1}{(x+3)(x-3)}$ **Resp:** $-\infty$

p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$ **Resp:** e^3

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ **Resp:** 1

r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$ **Resp:** e^{-2}

s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{sen}(\pi x)-\operatorname{sen}(3\pi x)}{x^3}$ **Resp:** $4\pi^3$

3. Determinar los valores de a, b y L, si $L=\lim\limits_{x\to 2b}\dfrac{x^3-x^2+ax+12}{x^2-4bx+4b^2}\in\mathbb{R}$.

   Resp: $a=-8,\quad b=1,\quad L=5.$

4. Determinar $domf$ y las asíntotas (si existen) para:

   a) $f(x)=-x+1+\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-13x^2+36}}$ **Resp:** $x=\pm 3$, $x=\pm 2$, $y=x+1$.

   b) $f(x)=3-2x-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x-2}}$ **Resp:** $x=-1$, $x=2$,
   $y=-3x+\dfrac{5}{2}$, $y=-x-\dfrac{7}{2}$.

   c) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}+x-5$ **Resp:** $y=2x-5$, $y=-5$.

3.2. Continuidad de Funciones

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. Se dice que f es continua en $x = x_0$ si y sólo si:

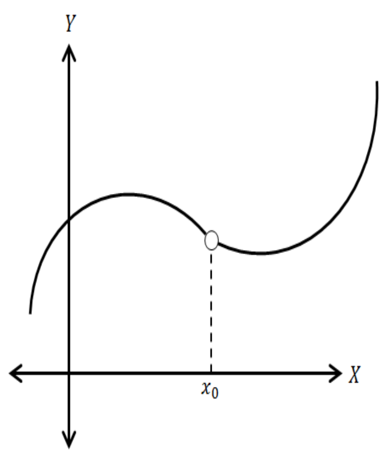
a) $f(x)$ está definida ($x_0 \in dom f$).

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y

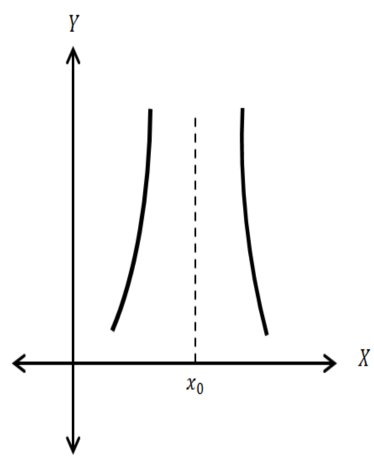
c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si una de estas condiciones no se cumple, se dice que f es discontinua en $x = x_0$.

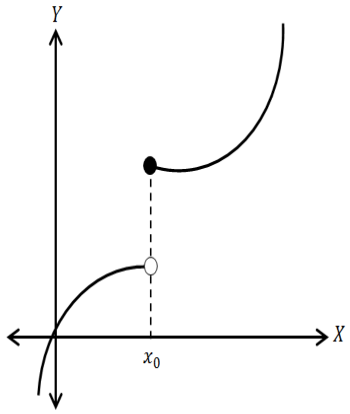
Observación 48. *Los siguientes gráficos muestran ejemplos de algunas funciones discontinuas en $x = x_0$.*



$x_0 \notin dom f$ pero $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

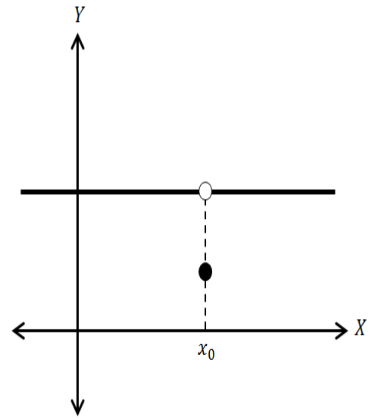


$x_0 \notin dom f$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



$x_0 \in dom f$, luego $\exists\, f(x_0)$ pero no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

ya que los límites laterales son distintos.



$\exists\, f(x_0)$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ pero $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Ejemplos

1. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 2, & \text{si } x = 1 \end{cases}$. ¿ Es continua en $x = 1$?.

   Solución.

   a) $f(1) = 2$, está definida.

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 5$.

   c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

   $\therefore f$ no es continua en $x = 1$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. ¿ Dónde f es continua?.

   Solución.

   a) Si $x = 0$, f es discontinua ya que $0 \notin dom f$.

   b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

   c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} 1 = 1, & \text{si } x_0 > 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} -1 = -1, & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$

$\therefore f$ es continua en $\forall\ x \neq 0$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} 3+x, & \text{si } x \leq 1 \\ 3-x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. ¿ Es continua en $x = 1$?.

   Solución.

   a) $f(1) = 4$, está definida.

   b) $\lim\limits_{x \to 1^-} (3+x) = 4 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^+} (3-x) = 2 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) \nexists$.

   $\therefore f$ es discontinua en $x = 1$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Álgebra de las Funciones Continuas

Teorema 49. *Sean f y g dos funciones continuas en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. *$f \pm g$ es continua en x_0.*
2. *$f \cdot g$ es continua en x_0.*
3. *$c \cdot g$ es continua en x_0, $c =$ contante.*
4. *$\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$.*

Ejemplos

1. Analizar la continuidad de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}$.

   Solución.

   a) Sea $h(x) = \operatorname{sen} x$, entonces h es continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

   b) Sea $g(x) = x^2 + 1$, entonces g es continua y no nula $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

   $\therefore f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$, es continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Analizar la continuidad de $f \cdot g,\ f+g,\ c \cdot f$ y $\dfrac{f}{g}$ en $x = 0$.

Solución.

a) $f(0) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \nexists$.

Como f no es continua en $x = 0$, entonces $f \cdot g,\ f+g,\ c \cdot f$ y $\dfrac{f}{g}$ no son continuas en $x = 0$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} |x-3|, & \text{si } x \neq 3 \\ 2, & \text{si } x = 3 \end{cases}$. ¿Es f continua en $x = 3$?.

Solución.

a) $f(3) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} |x-3|$.

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{si } x > 3 \\ 2, & \text{si } x = 3 \\ 3-x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3^-} (3-x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 3^+} (x-3) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$.

$\therefore f$ es discontinua en $x = 3$.

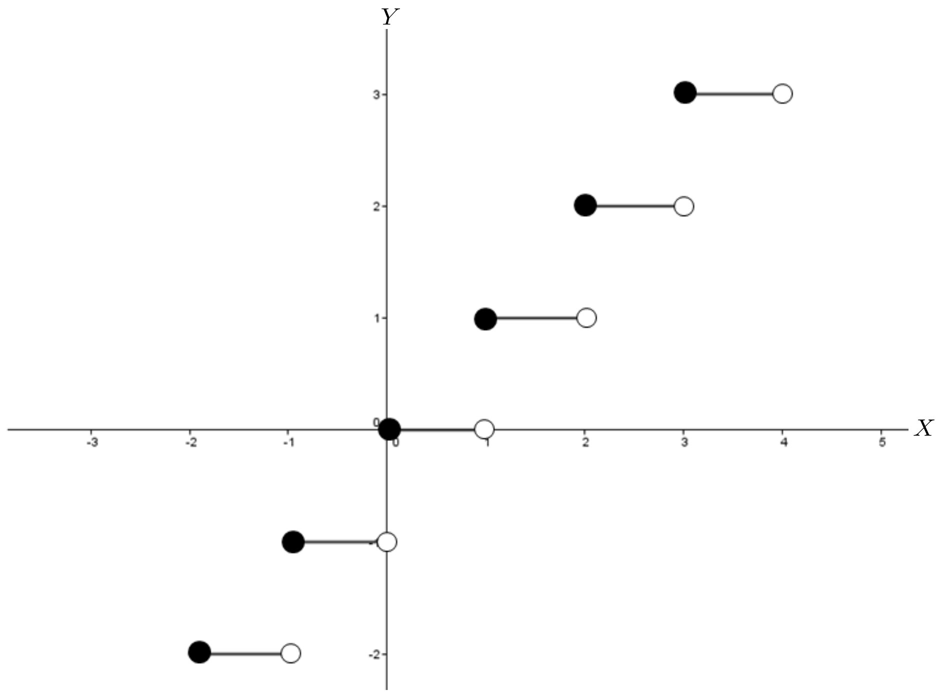
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Las funciones $f(x) = x^2$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $f(x) = \cos x$, etc, son funciones continuas.

5. La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ es continua en $\mathbb{R} - \left\{ x = (2k-1)\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Observación 50. *Gráficamente una función continua en un conjunto es una representación "sin saltos".*

Por ejemplo: La función $f(x) = [x]$ no es continua en $\mathbb{R}$.



Definición 51.

1. *Se dice que f es una función continua por la derecha de $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

2. *Se dice que f es una función continua por la izquierda de $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*

3. *Se dice que f es una función continua en $(a, b) \iff f$ es continua $\forall\ x_0 \in (a, b)$.*

4. *Se dice que f es una función continua en $[a, b] \iff f$ es continua $\forall\ x_0 \in (a, b)$ y es continua por la derecha de a y por la izquierda de b.*

   Es decir:

   I) *f es continua en (a, b).*

   II) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \wedge \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

5. *Se dice que f es una función continua en $(a,b] \Longleftrightarrow f$ es continua en (a,b) y continua por la izquierda de b.*

6. *Se dice que f es una función continua en $[a,b) \Longleftrightarrow f$ es continua en (a,b) y continua por la derecha de a.*

Observación 52. *Se dice que f es continua en $x = x_0$, si f es continua por la derecha de x_0 y por la izquierda de x_0.*

Ejemplos

1. Analizar si $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0,2]$.

   Solución.

   $\forall\ x_0 \in (0,2),\ \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0) \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x} = \sqrt{2} = f(2)$.

   Luego $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0,2]$.
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Analizar si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x+1}, & \text{si } -\dfrac{1}{2} < x \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}, & \text{si } 0 < x < 2. \\ 5x+1 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$, es continua en $\left(-\dfrac{1}{2}, 5\right)$

   Solución.

   Sea $f_1(x) = \dfrac{x^3+3}{x+1}$, continua $\forall\ x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

   Sea $f_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$, continua $\forall\ x \in (0,2)$.

   Sea $f_3(x) = 5x+1$, continua $\forall\ x \in (2,5)$.

   Se analizará la continuidad de $x = 0$, $x = 2$.

   a) Para $x = 0$.

   1) $f(0) = 3$.

   2) $$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+3}{x+1} = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

De 1) y 2) f es continua en $x=0$.

b) Para $x=2$.

1) $f(2)=11$.

2) $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \frac{\operatorname{sen} 6}{2} \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} (5x+1) = 11 \end{aligned}\right\} \neq \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \nexists.$$

De 1) y 2) f es discontinua en $x=2$.

$\therefore$ de *a*) y *b*) f es continua $\forall\, x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 5\right) - \{2\}$ y por lo tanto f no es continua en $\left(-\dfrac{1}{2}, 5\right)$.

FIN .... FIN

Teorema 53. *Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$ entonces $g\circ f$ es continua en x_0.*

Demostración.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \wedge \quad \lim_{x\to f(x_0)} g(z) = g(f(x_0))$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0).$$ □

Ejemplo 54. *Sea $h(x)=\sqrt{3x^2+4}$, donde $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{3x^2+4}$ donde $g(x)=3x^2+4$; $\quad f(x)=\sqrt{x}$.*

$$\left.\begin{array}{lll} g & \textit{es continua} & \forall\, x\in\mathbb{R} \\ f & \textit{es continua} & \forall\, x\geq 0 \end{array}\right\} \therefore f\circ g \ \textit{es continua}\ \forall\, x \geq 0.$$

Observación 55. *Si $g\circ f$ es continua en x_0 entonces:*

$$\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(f(x_0)).$$

Ejemplo 56. *Sean* $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + 2x}$

Entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + 2x}\right) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + 2x}}$ *donde es continua en* $x_0 = 0$.

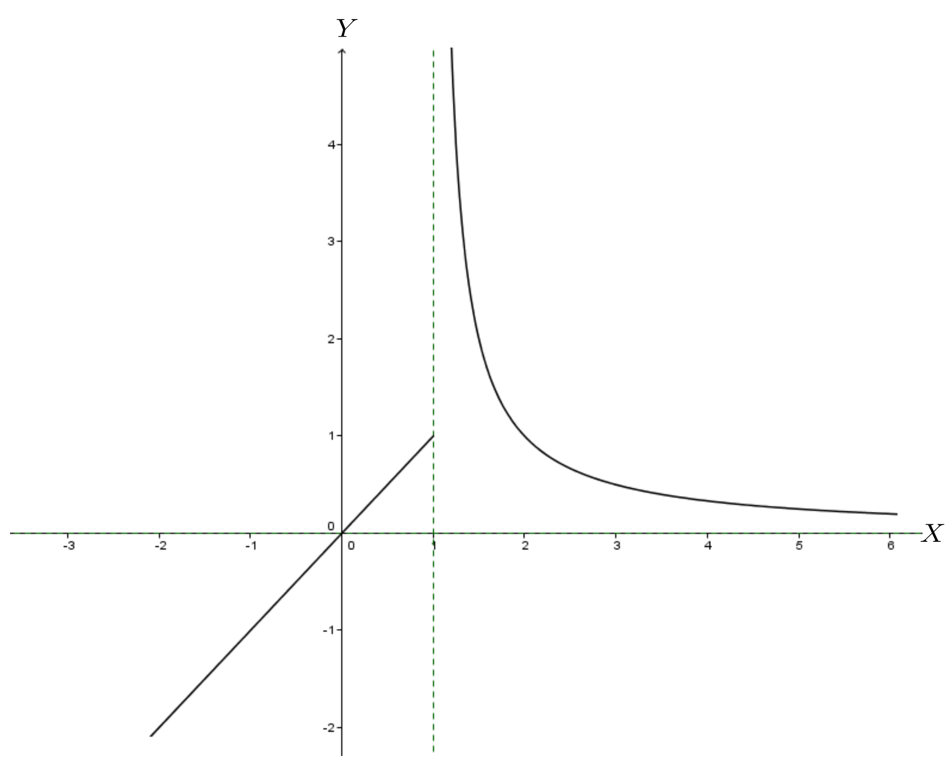
Luego $\lim\limits_{x \to 0}(f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to 0} g(x)\right) = \sqrt{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + 2x}}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x^2 + 3x + 2)}{x(x + 2)}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}} = \sqrt{1} = 1.$

Clasificación de las Discontinuidades

1. Si al menos uno de los límites laterales $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ó $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ es $+\infty$ ó $-\infty$, entonces f tiene en x_0 una discontinuidad de salto infinito.

   Ejemplo 57. *Sea* $f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si\ x > 1 \end{cases}$ *cuya representación gráfica es:*

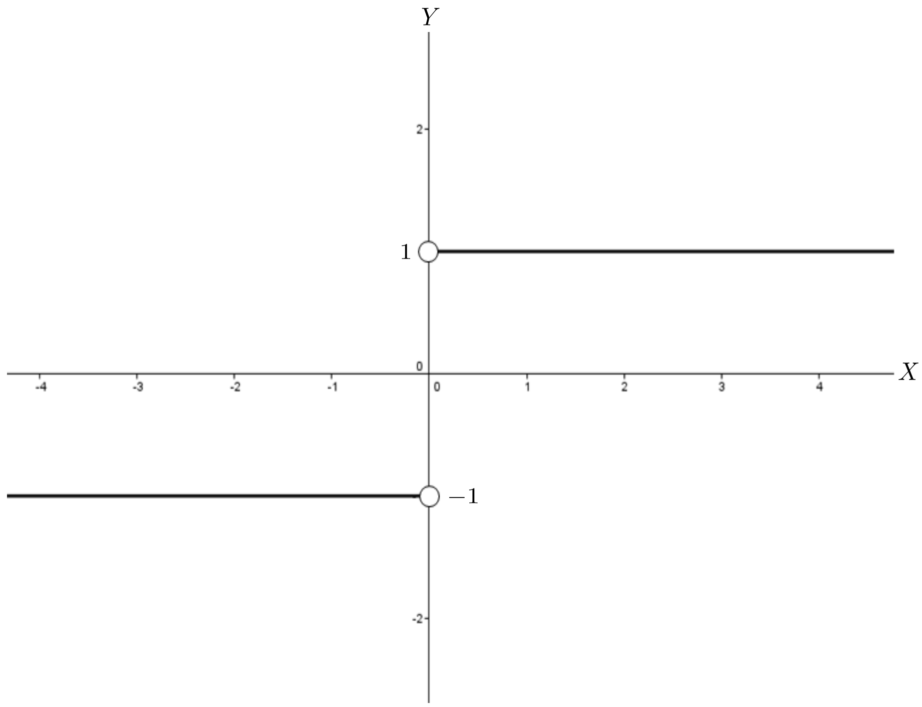


$\therefore$ *en* $x = 1$ *hay una discontinuidad de salto infinito ya que*

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

2. Si existen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$, pero $\quad L_1 \neq L_2$, entonces f tiene en x_0 un punto de discontinuidad de salto finito; la magnitud del salto es $|L_1 - L_2|$.

Ejemplo 58. *Sea* $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, *cuya representación gráfica es:*



A pesar que $dom f = \mathbb{R} - \{0\}$ *se pueden calcular:*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

$\therefore$ $f(x)$ *es discontinua en* $x = 0$ *y es discontinua de salto finito; la magnitud de salto es* 2.

3. Si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ entonces f tiene en x_0 una discontinuidad **reparable**.

Las discontinuidades correspondientes a los casos 1) y 2) se llaman **irreparables**.

Ejemplo 59. *Sea* $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$*, donde* $domf = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$.

a) *Esta función es discontinua en* $x = 1$*,* $f(1)$ *no está definida.*

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2.$

Así $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$*,* $\therefore$ *es una discontinuidad reparable.*

c) *Como* $f(1)$ *no está definida, se le asigna el valor del límite.*

Luego f *es continua en* $x = 1$*, refiniéndola de la siguiente manera:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & si\ x \neq 1 \\ 2, & si\ x = 1 \end{cases}$$

Conclusión:

Una función f tiene una discontinuidad:

1. Reparable, solamente sí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \exists$.
2. Irreparable si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \nexists$.

Ejemplos

1. Analizar si f es continua en $x = 0$. En caso de serlo, clasificar la discontinuidad y redefinir, si es posible.

   a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

   Solución.

   I) $f(0)$ no está definida.

   II) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

   $\therefore f$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad reparable.

   Para aquello se redefine f como:

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Solución.

I) $f(0) = 1$.

II) $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} x = 0 \neq 1$. $\therefore f$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad reparable, redefiniendo:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

FIN .... FIN

c) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

Solución.

I) $f(0)$ no está definida.

II) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{(e^{-x} - 1)}{-x} \right) = 1 + 1 = 2$.

$\therefore f$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad reparable. Luego definiendo una nueva función, se tiene:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

FIN .... FIN

d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

Solución.

I) $f(0)$ no está definida.

II) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases} \Longrightarrow \left. \begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \end{array} \right\} \therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x) \nexists$

lo que implica que la discontinuidad es irreparable.

FIN .... FIN

2. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ M, & \text{si } x = 3 \end{cases}$. Determinar el valor de M de modo que f sea continua

en $x = 3$.

Solución.

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 3 \\ -1, & \text{si } x < 3 \\ M, & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -1 \Longrightarrow \lim_{x\to 3} f(x) \nexists.$$

Como $f(x)$ es discontinua irreparable en $x = 3$, no existe $M \in \mathbb{R}$ que haga f continua.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, & \text{si } x \neq 4 \\ M, & \text{si } x = 4 \end{cases}$. Determinar el valor de M de modo que f sea continua en $x = 4$.

Solución.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{1}{4}.$$

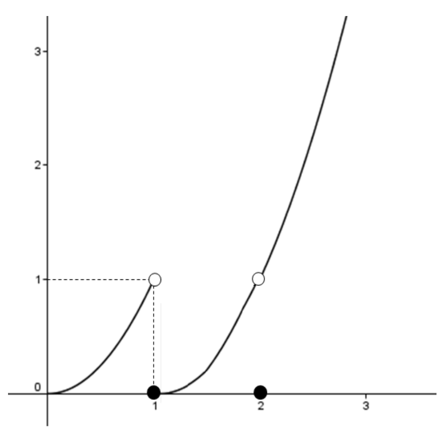
$\therefore$ si $M = \dfrac{1}{4}$, f es continua en $x = 4$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ (x-1)^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ periódica en $[0, 2]$ con período igual a 1.

Identificar los puntos de discontinuidad, graficar y reparar f donde sea posible.

Solución.



Puntos de discontinuidad: $x = 1$, $x = 2$.

a) $f(1) = 0$ está definida y $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \therefore \lim\limits_{x\to 1} \nexists.$

$\therefore f$ es discontinua irreparable en $x = 1$.

b) $f(2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^2 = 1$, $\therefore$ en $x = 2$ hay una discontinuidad reparable, redefiniendo:

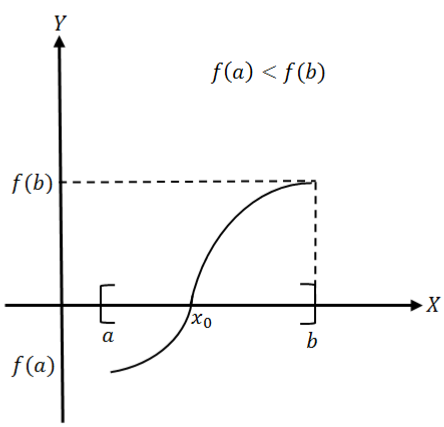
$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

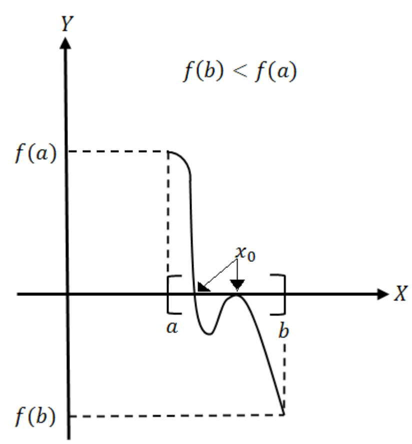
FIN .... FIN

Teorema de Valor Intermedio

Si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists\, x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Gráficamente se tiene:





Observación 60. *El teorema afirma que en tales condiciones* $\exists\, x_0 \in (a, b)$ *tal que* $f(x_0) = 0$, *siendo* x_0 *una raíz de la ecuación* $f(x) = 0$.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$, $f(x)$ es continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$, en particular lo será para $[-1, 0]$.

   $f(-1) = -1,\ f(0) = 1 \Longrightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0$

   $\therefore\ f$ posee una raíz real entre -1 y 0. Es decir $\exists\ x_0 \in (-1, 0)\ /\ f(x_0) = 0$.

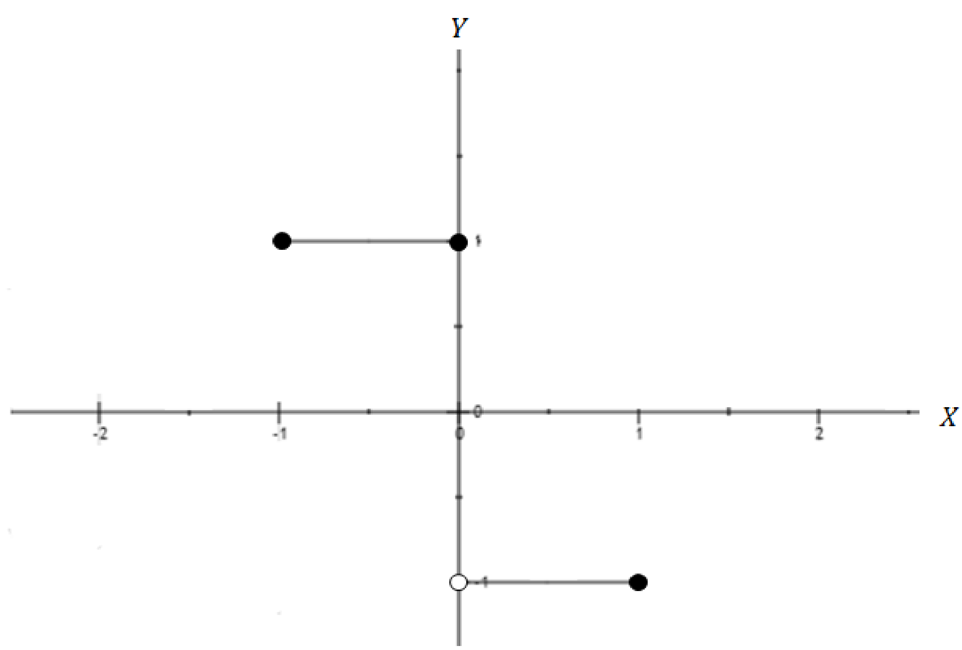
   Aminorando el intervalo $[-1, 0]$ a $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$, se tiene: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

   $\therefore\ f(-1) \cdot f\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0 \Longrightarrow \exists\ x_0 \in \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)\ /\ f(x_0) = 0$, es decir, f posee una raíz real en $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$, se tiene que $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ donde $f(1) \cdot f(-1) < 0$.

   Sin embargo no hay punto en $(-1, 1)$ tal que $f(x) = 0$, ya que $f(x)$ no es continua en $[-1, 1]$.

   Gráficamente se tiene:



Ejercicios Resueltos

1. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-4\sqrt[6]{x}+4}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-1)}$

   Solución. Sea $x=t^6$. Si $x\to 1 \Longrightarrow t\to 1$.
   Haciendo la sustitución, se obtiene:
   $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3-t^2-4t+4}{t^2(t^3-1)} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2(t-1)-4(t-1)}{t^2(t-1)(t^2+t+1)} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2-4}{t^2(t^2+t+1)} = \dfrac{-3}{3} = -1$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-2+e^{1-x}}{1-\cos(x-1)}$

   Solución. Sea $t=x-1$. Si $x\to 1 \Longrightarrow t\to 0$.
   Sustituyendo se obtiene:
   $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-2+e^{-t}}{1-\cos t}\cdot\dfrac{1+\cos t}{1+\cos t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{2t}-2e^t+1}{e^t \operatorname{sen}^2 t}\cdot(1+\cos t)$
   $= \lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{e^t-1}{t}\right)^2 \cdot \dfrac{1+\cos t}{e^t}\left(\dfrac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 = 2$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1-3x}{2-3x}\right)^{5x}$

   Solución. Al evaluar toma la forma 1^∞. Luego:
   $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{3x-2}\right)^{3x-2}\right]^{\dfrac{5x}{3x-2}} = e^{\frac{5}{3}}$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Determinar las asintotas verticales, horizontales y oblicuas de $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+10}{x-2}$

   Solución.

   a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2-8x+10}{x-2} = -\infty \Longrightarrow x=2$ es asíntota vertical ó
   $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2-8x+10}{x-2} = +\infty \Longrightarrow x=2$ es asíntota vertical

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-8x+10}{x(x-2)} = 2 = m$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-8x+10}{x-2} - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-8x+10-2x^2+4x}{x-2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+10}{x-2} = -4 = b$$
$\therefore\ y = 2x - 4$ es asíntota oblicua derecha.

Análogamente se obtiene que $y = 2x - 4$ es asíntota oblicua izquierda.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Calcular:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}}$

   Solución. Es de la forma 1^∞. Luego

   $$\lim_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}} = \lim_{x\to a} \left[\left(1 + 1 - \frac{x}{a}\right)^{\dfrac{a}{a-x}}\right]^{\dfrac{a-x}{a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}}$$
   $$= \lim_{x\to a} \left[\left(1 + \frac{a-x}{a}\right)^{\dfrac{a}{a-x}}\right]^{\dfrac{-1}{a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}} = e^{-\frac{1}{a}}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

   b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x)$, si $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{9}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   Solución. En este caso es necesario usar límites laterales.

   I) $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} (1-x)^{\frac{9}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \left[(1+(-x))^{-\frac{1}{x}}\right]^{-9} = e^{-9}$

   II) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}} \cdot \frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{1+\cos 3x} \cdot \frac{1}{x^2-(e^{3x^2}-1)}$$
   $$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos 3x} \cdot \frac{1}{\dfrac{x^2-(e^{3x^2}-1)}{x^2}}$$
   $$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9}{1+\cos 3x} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{e^{3x^2}-1}{3x^2}\cdot 3} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{-2} = -\frac{9}{4}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

6. Sea $f(x) = \begin{cases} 2\pi^2, & \text{si } -2 < x \leqslant 0 \\ \dfrac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

c) Analizar la continuidad de f en $x=1$

Solución.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2}\cdot\frac{1+\cos 2\pi x}{1+\cos 2\pi x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 2\pi x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2(1+\cos 2\pi x)} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2\pi x}\right)^2\cdot$
$\displaystyle \frac{4\pi^2}{(1-x)^2(1+\cos 2\pi x)} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2}$. Sea $z = x-1$. Si $x\to 1^- \Longrightarrow z\to 0$, Luego
$\displaystyle \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2\pi(z+1)}{(z+1)^2z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos(2\pi+2\pi z)}{(z+1)^2z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos 2\pi z}{(z+1)^2z^2}\cdot\frac{1+\cos 2\pi z}{1+\cos 2\pi z} =$
$\displaystyle \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2\pi z}{z^2}\cdot\frac{1}{(z+1)^2(1+\cos 2\pi z)}$
$\displaystyle = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi z}{2\pi z}\right)^2\cdot\frac{4\pi^2}{(z+1)^2(1+\cos 2\pi z)} = 2\pi^2$

c) $f(1) = 1$
$\displaystyle \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2} = 2\pi^2$
$\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$
Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\nexists$. Esto indica que f tiene en $x=1$ una discontinuidad no reparable.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

7. Calcular $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 \operatorname{sen}^3 \frac{1}{x}}{(3x^3+1)(\operatorname{sen}^2 \frac{\pi x-1}{4x+3})(\ln\frac{x+1}{x})}$

Solución.
$\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^3\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}}\cdot\frac{x^2\cdot x}{(3x^3+1)(\operatorname{sen}^2\frac{\pi x-1}{4x+3})x(\ln\frac{x+1}{x})} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^3\cdot\frac{1}{(3+\frac{1}{x^3})(\operatorname{sen}^2\frac{\pi-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}})\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$$= 1 \cdot \frac{1}{3 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} \cdot \ln e} = \frac{1}{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

8. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{1-x^2}, & \text{si } x \in (0,1) \\ \ln\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{a}{x-1}}, & \text{si } x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Determinar el valor de "a" y redefinir f si corresponde, de tal manera que f sea continua en $x = 1$.

Solución.

$f(1)$ no esta definida

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \ln\left[\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}\right]^{\frac{-a}{1+x}} = \ln e^{-\frac{a}{2}} = -\frac{a}{2}$$

$$\therefore -\tfrac{a}{2} = -\tfrac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{a=1} \therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{1-x^2}, & \text{si } x \in (0,1) \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } x = 1 \\ \ln\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}, & \text{si } x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

9. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}\right)^{x+3}$

Solución. Es de la forma 1^∞. Luego dividiendo se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{-x-3}{2x^2+x-1}\right)^{\dfrac{2x^2+x-1}{-x-3}}\right]^{\frac{-x-3}{2x^2+x-1}(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{-x-3}{2x^2+x-1}\right)^{\dfrac{2x^2+x-1}{-x-3}}\right]^{\frac{-(x^2+6x+9)}{2x^2+x-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

10. a) Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^2}$

b) Determinar "a" de tal manera que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x + a\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = 4$$

Solución.

a) Sea $t = x - \dfrac{\pi}{2}$. Si $x \to \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t \to 0$. Luego

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+t)}{4t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\cos t}{4t^2} = \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\ln(\cos t)^{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\ln\left[(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}}\right]^{\frac{\cos t-1}{t^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\ln\left[(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}}\right]^{\frac{(\cos t-1)(\cos t+1)}{t^2(\cos t+1)}} = \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\ln\left[(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}}\right]^{\frac{-\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\cdot\frac{1}{\cos t+1}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x + a\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(2\cos x + a\operatorname{sen} x - 2)(1+\cos x)}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(2\cos x + a\operatorname{sen} x - 2)(1+\cos x)}{\cos x\operatorname{sen}^2 x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2(\cos x-1)(1+\cos x)}{\cos x\operatorname{sen} x} + \frac{a\operatorname{sen} x(1+\cos x)}{\cos x\operatorname{sen} x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\operatorname{sen}^2 x}{\cos x\operatorname{sen} x} + \frac{a(1+\cos x)}{\cos x}\right] = 2a = 4$$

$$\therefore \boxed{a = 2}$$

FIN .... FIN

Ejercicios Propuestos

1. Analizar si $f(x) = [x]$ es continua en $x = 3$.

2. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[5]{x}}-2}{x-32}$, $x \neq 32$. Definir $f(32)$ de tal manera que f sea continua en $\mathbb{R}_0^+$.

   Respuesta: $f(32) = \dfrac{1}{320}$.

3. Determinar a y b para que f sea continua en $x = 0$ y en $x = \pi$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}, & \text{si } x \in (-\pi, 0) \\ ax + b, & \text{si } x \in [0, \pi) \\ \cos x, & \text{si } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}.$$

Respuesta: $a = 0$, $b = -1$

4. Determinar a y b para que f sea continua en $x = 2$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} b[3x + 4], & \text{si } x \in [1, 2) \\ 3x\sqrt{a - 2x}, & \text{si } x \in (2, 3) \\ 18, & \text{si } x = 2 \end{cases}.$$

Respuesta: $a = 13$, $b = 2$.

5. Analizar la continuidad de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -2, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = x(4 - x^2)$$

6. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$. Analizar si f es continua en $x = 8$. En caso negativo determinar el tipo de discontinuidad y redefinir la función, si corresponde.

7. Analizar la existencia de una solución real de la ecuación $3x^3 - 4x^2 + 13x + 2 = 0$ en $[-1, 0]$.

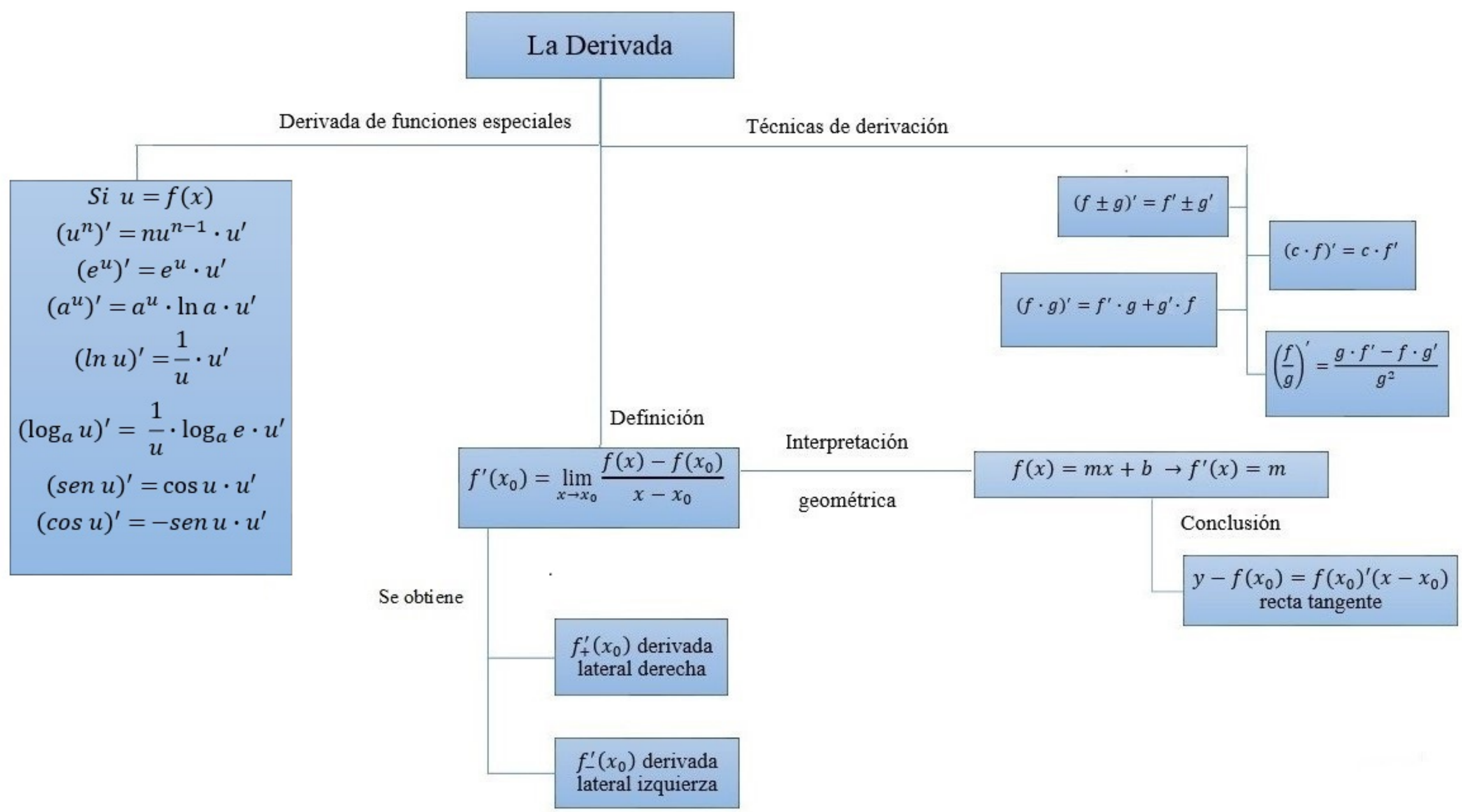
8. Suponer que f es continua en $[0, 4]$, $f(0) = 1$ y $f(4) = -1$.¿ Puede tener f un número infinito de ceros en este intervalo?.

9. Analizar porqué $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2} + \dfrac{x^4 + 1}{x - 3}$ tiene por lo menos una raíz entre -2 y 3.

Capítulo 4

La Derivada

Mapa Conceptual

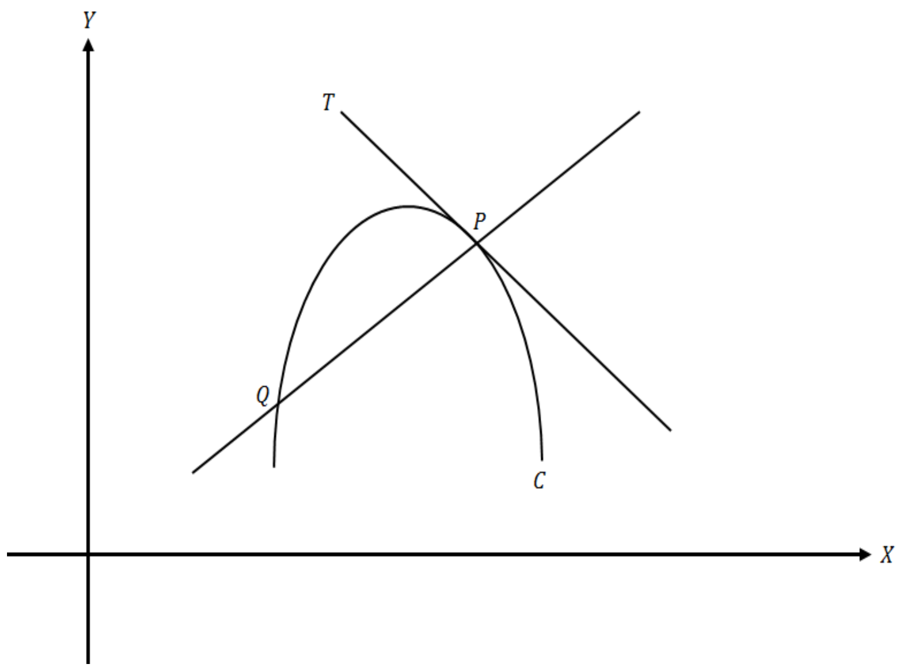


Competencias a lograr

Al término del presente capítulo, el alumno será capaz de:

- Determinar la ecuación de la tangente a una curva en un punto de ella dado.
- Dada una función, hallar su derivada en un punto de ella.
- Dadas las reglas de derivación, hallar la derivada de una función.
- Derivar implícitamente una función.
- Calcular derivadas de orden superior.

4.1. Introducción: Problema de la Tangente



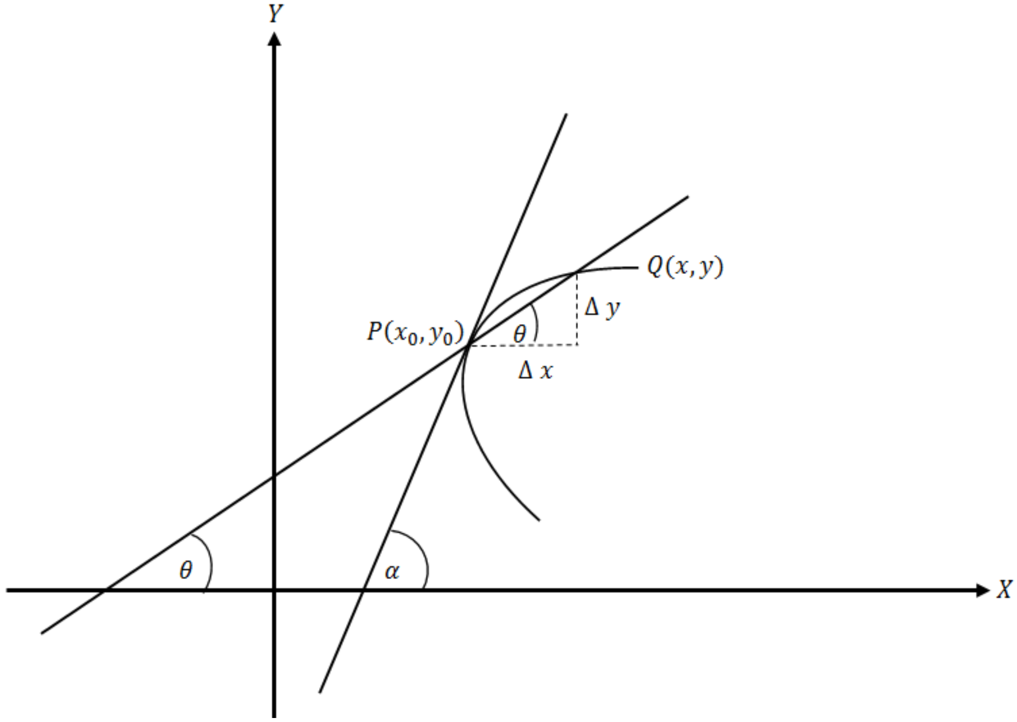
Sea C una curva continua y $\overleftrightarrow{PQ}$ una secante de ella. Si a lo largo de la curva se hace que Q se aproxime a P, la secante girará alrededor de P hasta llegar a la posición límite PT. Luego la recta $\overleftrightarrow{PT}$ es el límite de la secante $\overleftrightarrow{PQ}$ cuando Q se acerca a P.

Definición 61. *Sea $\overleftrightarrow{PQ}$ una secante que pasa por los puntos P y Q de una curva continua C. El límite de la secante, cuando Q se aproxima a P, a lo largo de la curva, se llama tangente a la curva C en P.*

Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva, siendo f continua.

Sean $P(x_0, y_0)$ un punto de tangencia de f, $Q(x, y)$ otro punto cualquiera de la curva y θ el ángulo que forma $\overleftrightarrow{PQ}$ con el eje X.

Gráficamente se tiene:



$\therefore \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$, siendo $\triangle x$ y $\triangle y$ el incremento de x e y, respectivamente.

Cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, la inclinación θ de la secante se aproxima a la inclinación α de la tangente, es decir, $\lim\limits_{Q \to P} \theta = \alpha$.

Además, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente, o sea: $\lim\limits_{Q \to P} \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha$.

También cuando Q se aproxima a P, x se aproxima a x_0. Luego :

$\lim\limits_{Q \to P} \operatorname{tg}\theta = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\alpha$, que es la pendiente de la tangente a

la curva en el punto $P(x_0, y_0)$ y se simboliza por

$$\boxed{m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

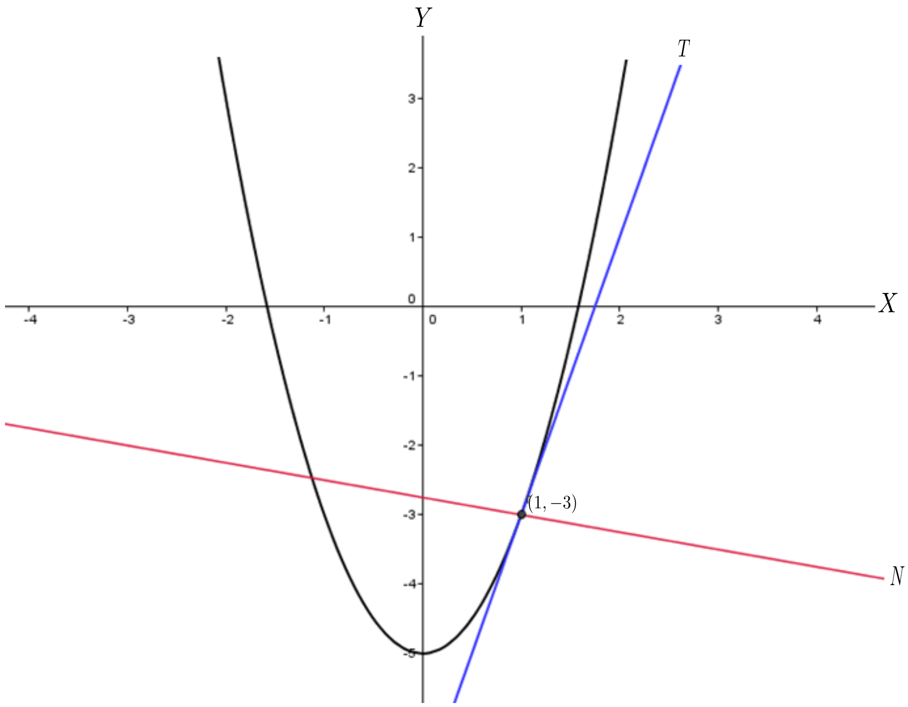
siendo $y - y_0 = m(x_0)(x - x_0)$ la ecuación de la tangente a f en $P(x_0, y_0)$.

La normal a una curva en punto dado es una recta perpendicular a la tangente en ese punto. Luego se cumple que $m_T = -\dfrac{1}{m_N}$.

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = 2x^2 - 5$ en el punto $(1, -3)$.

   Solución.



$$m(1) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5 + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x - 1} = 4.$$

$\therefore$ La ecuación de la tangente: $y + 3 = 4(x - 1) \Longrightarrow 4x - y - 7 = 0$.

La ecuación de la normal: $y + 3 = -\dfrac{1}{4}(x - 1) \Longrightarrow x + 4y + 11 = 0$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Hallar la ecuación de la tangente a $y = x^2$ y que es paralela a la recta $y = 4x$.

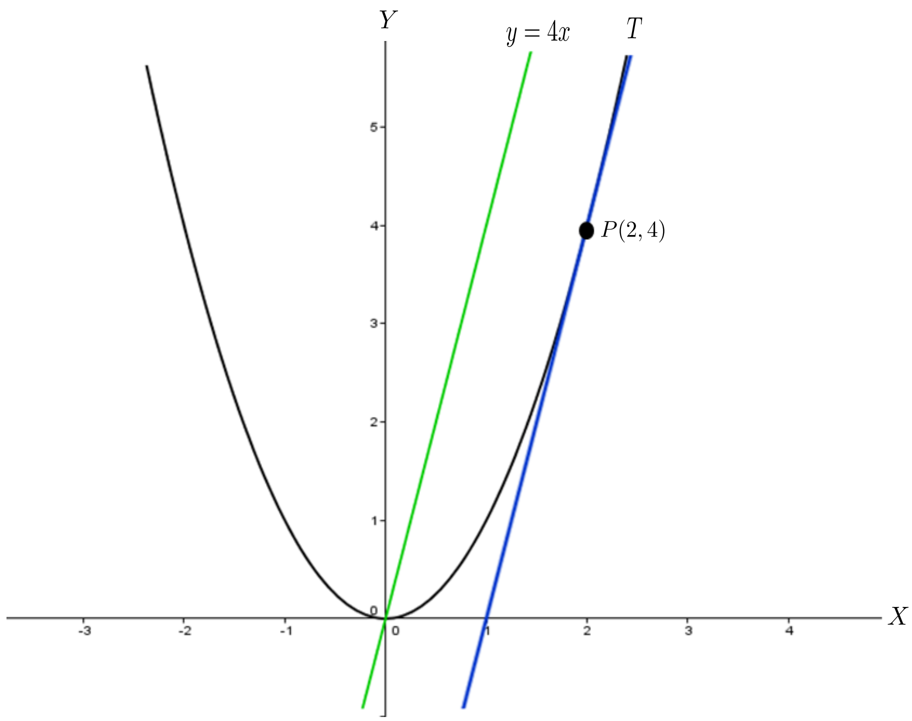
Solución.

$m(x_0) = 4 = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$

$\Longrightarrow x_0 = 2 \Longrightarrow y_0 = 4.$

$\therefore P(2, 4).$

$\therefore$ La ecuación de la tangente es: $y - 4 = 4(x - 2) \Longrightarrow 4x - y - 4 = 0.$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 + 2x - 1$ tiene la normal una pendiente igual a $-\dfrac{1}{5}$?.

Solución.

$m_N = -\dfrac{1}{5} \Longrightarrow m_T = 5.$

$\therefore 5 = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^3 + 2x - 1 - x_0^2 - 2x_0 + 1}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^3 - x_0^3 + 2(x - x_0)}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 + 2)}{x - x_0} = 3x_0^2 + 2.$

$\therefore 3x_0^2 + 2 = 5 \Longrightarrow x_0 = \pm 1.$

$\therefore$ La normal tiene pendiente $-\dfrac{1}{5}$ es los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -4)$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $(0, 0)$.

   Solución.

   $m(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

   $\therefore$ La ecuación de la tangente es: $y = x$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4.2. Problema de la Velocidad Instantánea

Si una partícula se mueve a lo largo de una recta de tal manera que su distancia a un punto fijo P está dada por: $s(t) = t^2 + 2$.

Cuanto $t = 0$, la partícula está a 2 pies de P y cuando $t = 4$, la partícula está a 18 pies de P.

$\therefore$ la velocidad media para estos 4 segundos es:

$$V_{med} = \frac{18 - 2}{4 - 0} = \frac{16}{4} = 4$$

En general la velocidad media para el movimiento visto desde $t = 4$ hasta cualquier otro tiempo es:

$$V_{med} = \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = \frac{s(t) - 18}{t - 4}$$

Si se desea conocer la velocidad en un instante t, se utiliza la siguiente definición:

“ Si una partícula se mueve sobre una recta de tal manera que su distancia s a un punto fijo de la recta es $s = s(t)$, la velocidad en cualquier instante t_1 es:

$v(t_1) = \lim\limits_{x \to t_1} \dfrac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$ ”

Luego en el problema anterior:

$$v(4) = \lim_{x \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{t^2 + 2 - 18}{t - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{t^2 - 16}{t - 4} = 8$$

$\therefore$ la velocidad instantánea en $t = 4$ es de 8 pies por segundo.

Ejemplos

1. Una partícula se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación $x = \sqrt{27}$. Hallar la velocidad en $t = 8$ segundos.

   Solución.

   $$v(8) = \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{2t} - 4}{t - 8} \cdot \frac{\sqrt{2t} + 4}{\sqrt{2t} + 4} = \lim_{x \to 8} \frac{2t - 16}{(t - 8)\left(\sqrt{2t} + 4\right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \textit{ pies/seg.}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Una partícula P se mueve en línea recta según la ecuación $s = 15t - 3t^2$. Hallar la distancia de P al punto de partida cuando la velocidad es nula.

   Solución.

   $$v(t_0) = 0 = \lim_{t \to t_0} \frac{15t - 3t^2 - 15t_0 + 3t_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{15(t - t_0) - (t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = 15 - 6t_0.$$

   $$\therefore 15 - 6t_0 \Longrightarrow t_0 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \qquad \therefore s = 15\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{25}{4}\right) = 18\frac{3}{4} \textit{ pies.}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Se arroja una pelota hacia arriba hasta una altura que se puede expresar en metros, por $s(t) = 125t - 16t^2$, t en segundos es el tiempo desde que ha sido lanzada. Hallar la velocidad instantánea después de 3 segundo y después de 5 segundos.

   Solución.

   a) $v(3) = 0 = \lim\limits_{t \to 3} \dfrac{125t - 16t^2 - 375 + 144}{t - 3} = \lim\limits_{t \to 3} \dfrac{(16t - 77)(t - 3)}{t - 3} = 29.$

   $\therefore v(3) = 29$ *m/seg.* (Significa que la pelota se eleva).

   b) $v(5) = 0 = \lim\limits_{t \to 5} \dfrac{125t - 16t^2 - 625 + 400}{t - 5} = \lim\limits_{t \to 5} \dfrac{-125t + 16t^2 + 225}{t - 5}$

   $= \lim\limits_{t \to 5} \dfrac{(16t - 45)(t - 5)}{t - 5} = -35.$

   $\therefore v(5) = -35$ *m/seg.* (Significa que la pelota se eleva).

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4.3. La Derivada

Al comparar la definición de pendiente de una tangente a una curva con la de velocidad instantánea de una partícula, se observa que formalmente son las mismas.

Definición 62. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe, se llama derivada de* f *en* x_0 *y se simboliza por* $f'(x_0)$.

Otra forma: Sea $x - x_0 = h$. *Si* $x \longrightarrow x_0 \Longrightarrow h \longrightarrow 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Otros símbolos: $D_x f(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) = y'$.

Ejemplos

1. Determinar $f'(2)$ para $f(x) = c$.

   Solución.

   $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

   FIN .... FIN

2. Determinar $f'(-1)$ para $f(x) = 3x^2 - 1$.

   Solución.

   $$f(-1) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(-1+\triangle x)-f(-1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{3(-1+\triangle x)^2-1-2}{\triangle x}$$

   $$= 3\lim_{\triangle x\to 0} \frac{1-2\triangle x+\triangle x^2-1}{\triangle x} = 3\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle x(\triangle x-2)}{\triangle x} = -6$$

   FIN .... FIN

3. Determinar $f'(3)$ para $f(x) = e^{x^2}$.

   Solución.

   $$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{e^{x^2} - e^9}{x-3} \cdot \frac{x+3}{x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{e^9\left(e^{x^2-9} - 1\right)(x+3)}{x^2-9} = 6e^9.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4.4. Funciones Derivables

Se dice que f es derivable en $x = x_0$, si $f'(x_0)$ existe, es decir, si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe.

Si f es derivable en todo punto de un intervalo abierto, se dice que f es derivable en dicho intervalo.

Si f es derivable en su dominio, se dice que f es derivable y su derivada se denota por $f(x)$, siendo $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, que es una nueva función. Esta nueva función permite calcular la derivada de f en cualquier punto de ella.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = 6x^3+4$. Determinar $f'(x)$ y a partir de ella, obtener el valor de $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(\sqrt{2})$.

   Solución.

   $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h)^3 + 4 - 6x^3 - 4}{h} = 6\lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

   $$6\lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 18x^2$$

   $\therefore\ f'(1) = 18\cdot 1^2 = 18, \quad f'(0) = 18\cdot 0^2 = 0, \quad f'(\sqrt{2}) = 18\cdot(\sqrt{2})^2 = 36.$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determinar $f'(x)$ si $f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$.

   Solución.

   $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{9}{3x^2 - 5}$. Determinar $f'(x)$.

   Solución.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{9}{3(x+h)^2 - 5} - \dfrac{9}{3x^2 - 5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{27x^2 - 45 - 27x^2 - 54xh - 27h^2 + 45}{[3(x+h)^2 - 5]\,[3x^2 - 5]}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-54x + 27h)}{h\,[3(x+h)^2 - 5]\,[3x^2 - 5]} = \frac{-54x}{(3x^2 - 5)^2}.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$. Determinar $f'(x)$.

   Solución.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\left(nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)}{h} = nx^{n-1}.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Observación 63. *Sea* $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, *entonces* $f(x) = nx^{n-1}$.

Si $n = 1 \Longrightarrow f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$.

Si $n = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si $n = -1 \Longrightarrow f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Si $n = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Teorema 64. *Si* $y = f(x)$ *es derivable en* $x = x_0$, *entonces* f *es continua en dicho punto.*

Demostración.

Es necesario probar que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe y es igual a $f(x_0)$, o sea:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Para $x = 0$ se tiene que:

$f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$

Luego aplicando límite a ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, lo que implica que f es continua en $x = x_0$. □

Observación 65. *El recíproco de este teorema no es válido, es decir, que una función sea continua en un punto, no implica necesariamente que ella sea derivable en dicho punto.*

4.5. Derivadas Laterales

Definición 66.

1. *Sea f una función real y $x_0 \in \mathbb{R}$, se dice que f es derivable por la derecha de $x_0 \iff$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe y se denota por $f'_+(x_0)$.*
2. *Sea f una función real y $x_0 \in \mathbb{R}$, se dice que f es derivable por la izquierda de $x_0 \iff$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe y se denota por $f'_-(x_0)$.*

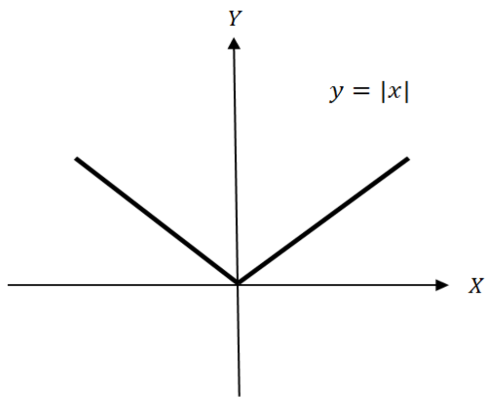
Observación 67. *$f'(x_0)$ existe $\iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

Ejemplos

1. Probar que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

   Solución.

   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} |x| = 0 \quad$ y $\quad f(0) = 0.$



   Para probar que no es derivable en $x = 0$, bastará probar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ no existe.

   a) Cuando $x \longrightarrow 0^+$, se tiene: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} = 1.$

   b) Cuando $x \longrightarrow 0^-$, se tiene: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x - 0}{x - 0} = -1.$

   $\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ no existe.

   $\therefore f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, a pesar de ser continua en $x = 0$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{si } x \leq 2; \quad f_1 \\ ax + b, & \text{si } x > 2; \quad f_2 \end{cases}$

   Determinar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ tal que f sea derivable en $x = 2$.

   Solución.

   Para que sea derivable en $x = 2$ es necesario que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ exista.

   Si f es derivable entonces f es continua en $x = 2$, significando que;

   $f_1(2) = f_2(2) \Longrightarrow -12 = 2a + b \Longrightarrow b = -2a - b.$

Luego por la derivabilidad se tiene:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{-3x^2+12}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-3(x-2)(x+2)}{x-2} = -12.$

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{ax+b+12}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax-2a-12+12}{x-2} = a.$

Luego $\boxed{a=-12}$ y $\boxed{b=12}$.

FIN .... FIN

3. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x^2-8x+8, & \text{si } x \geq 2 \\ \sqrt{3x^2+4}, & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Analizar si $f'(2)$ existe.

Solución.

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{3x^2+4}+4}{\sqrt{3x^2+4}+4} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{(3x^2+4)-16}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3(x^2-4)}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. \\ f'_+(2) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2-8x+8-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(3x-2)(x-2)}{(x-2)} = 4. \end{aligned}$$

$\therefore f'_-(2) \neq f'_+(2) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x=2$.

FIN .... FIN

4. Sea $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x-1, & \text{si } x \leq 2 \\ f_2(x) = x+1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Analizar y determinar $f'(x)$ en el dominio de f.

Solución.

$a)$ $f_1'(x) = 1, \forall\ x < 2$ y $f_2'(x) = 1, \forall\ x > 2.$

b) En $x = 2$

$$f'_{-}(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1-1}{x-2} = 1.$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1-1}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty.$$

$\therefore f'(2)$ no existe.

El problema podría haberse visualizado antes, comprobando que f no es continua en $x = 2$ y por lo tanto no es derivable en $x = 2$.

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

FIN .... FIN

4.6. Algebra de Derivadas

Teorema 68. *Si f y g son funciones reales y derivables, entonces $f + g$ es derivable y $(f + g)' = f' + g'$, (análogamente para f- g).*

Demostración.

Sea $F(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow F(x + \triangle x) = f(x + \triangle x) + g(x + \triangle x)$

$$\therefore F'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) + g(x + \triangle x) - f(x) - g(x)}{\triangle x}$$

$$F'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} + \frac{g(x + \triangle x) - g(x)}{\triangle x} \right) = f'(x) + g'(x). \qquad \square$$

Teorema 69. *Si f y g son funciones reales y derivables, entonces $f \cdot g$ es derivable y $(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$.*

Demostración.

Usando $\displaystyle\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle F}{\triangle x}$.

Sea $F(x) = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow F(x + \triangle x) = f(x + \triangle x) \cdot g(x + \triangle x)$

Además $\triangle f = f(x+\triangle x) - f(x), \qquad \triangle g = g(x+\triangle x) - g(x)$

$\therefore F(x+\triangle x) = (f(x)+\triangle f)\cdot(g(x)+\triangle g).$

$F(x+\triangle x) = f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\triangle g + g(x)\cdot\triangle f + \triangle f\cdot\triangle g$

Pero $\triangle F = F(x+\triangle x) - F(x)$

$\triangle F = f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\triangle g + g(x)\cdot\triangle f + \triangle f\cdot\triangle g - f(x)\cdot g(x)$

$\triangle F = f(x)\cdot\triangle g + g(x)\cdot\triangle f + \triangle f\cdot\triangle g$

Luego

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle F}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} f(x)\cdot\frac{\triangle g}{\triangle x} + \lim_{\triangle x\to 0} g(x)\cdot\frac{\triangle f}{\triangle x} + \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f\cdot\triangle g}{\triangle x}$$

$F'(x) = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$

$\therefore (f\cdot g)' = f\cdot g' + g\cdot f'$ □

Corolário 70. $(c\cdot f)' = c\cdot f', \quad c\in\mathbb{R}$

Demostración.

Considerando la derivada de un producto se obtiene que:

$(c\cdot f)' = c\cdot f' + f\cdot c' = c\cdot f' + f\cdot 0 = c\cdot f'.$ □

Teorema 71. *Si f y g son funciones reales y derivables, entonces f/g también lo es y* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g\cdot f' - f\cdot g'}{g^2}$

Demostración.

Sea $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow F(x+\triangle x) = \dfrac{f(x+\triangle x)}{g(x+\triangle x)}$

Además $\triangle f = f(x+\triangle x) - f(x), \quad \triangle g = g(x+\triangle x) - g(x)$

$$F(x+\triangle x) = \frac{f(x)+\triangle f}{g(x)+\triangle g}$$

$$\triangle F = \frac{f(x)+\triangle f}{g(x)+\triangle g} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)\cdot g(x) + \triangle f\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) - \triangle g\cdot f(x)}{g(x)\left[g(x)+\triangle x\right]}$$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle F}{\triangle x}=\frac{\displaystyle\lim_{\triangle x\to 0}g(x)\cdot\frac{\triangle f}{\triangle x}-\lim_{\triangle x\to 0}f(x)\cdot\frac{\triangle g}{\triangle x}}{\displaystyle\lim_{\triangle x\to 0}g(x)\left[g(x)+\triangle x\right]}$$

$$F'(x)=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\therefore \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{g\cdot f'-f\cdot g'}{g^2}. \qquad \square$$

Corolário 72. $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=\dfrac{-f'}{f^2}$

Demostración.

Considerando la derivada de un cuociente, se obtiene que:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{f\cdot 0-1\cdot f'}{f^2}=\frac{-f'}{f^2}. \qquad \square$$

Ejemplos

1. Derivar:

   a) $f(x)=kx,\ k\in\mathbb{R}\Longrightarrow f'(x)=kx'=k$

   b) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\Longrightarrow \dfrac{d\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)}{dx}=\dfrac{(x+1)'\cdot\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}\right)'\cdot(x+1)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}.$

   c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}\Longrightarrow \dfrac{d\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)}{dx}=\dfrac{(x-1)'(x+3)-(x-1)(x+3)'}{(x+3)^2}=$

   $=\dfrac{x+3-(x-1)}{(x+3)^2}=\dfrac{4}{(x+3)^2}.$

2. Si $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+2$. Determinar los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales $f'(x)=0$.

   Solución.

   $f'(x)=x^2+x-2=0\Longrightarrow (x+2)(x-1)=0\Longrightarrow x=-2,\ x=1.$

   FIN .... FIN

3. Hallar el tiempo donde la velocidad es nula, para $s = \dfrac{t^2}{\sqrt{t}-1}, \quad t > 0.$

Solución.

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{\left(\sqrt{t}-1\right)\cdot 2t - t^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{\left(\sqrt{t}-1\right)^2} = \frac{3t^2 - 4t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-1\right)^2} = 0.$$

$$\Longrightarrow t\left(3t - 4\sqrt{t}\right) = 0 \Longrightarrow 3t - 4\sqrt{t} = 0 \Longrightarrow 3t = 4\sqrt{t} \ /^2 \Longrightarrow 9t^2 = 16t \Longrightarrow t = \frac{16}{9}.$$

FIN .... FIN

4. Hallar las ecuaciones tangentes a la curva $y = x^2 + 4x$ que pasan por el punto $(-1, -4)$.

Solución.

$y = x^2 + 4x \Longrightarrow y' = 2x + 4.$

$y + 4 = m(x+1) \Longrightarrow y + 4 = (2x+4)(x+1) \Longrightarrow x^+4x + 4 = 2x^2 + 6x + 4.$

$\Longrightarrow x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x(x+2) = 0,\ x = 0 \Longrightarrow y' = 4 \Longrightarrow$ ecuación tangente: $y = 4x$.

$x = -2 \Longrightarrow y' = 0 \Longrightarrow$ ecuación tangente: $y = -4$.

FIN .... FIN

4.7. Derivadas de Funciones Trascendentes

1. Sea $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $\quad a \neq 1 \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$.

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\left(a^h - 1\right)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$\therefore f'(x) = a^x \ln a.$ □

2. Sea $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$.

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$ □

3. Sea $f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{x\dfrac{h}{x}}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0} \frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}. \qquad \square$$

4. Sea $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.

(Ejercicio). $\square$

5. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos h + \cos x\cdot\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} = \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \operatorname{sen} x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x. \qquad \square$$

6. Sea $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\cdot\cos h - \operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h} = \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \cos x\cdot 0 - \operatorname{sen} x\cdot 1 = -\operatorname{sen} x. \qquad \square$$

7. Sea $f(x) = \tan x \Longrightarrow f'(x) = \sec^2 x$

   Demostración.

   Como $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ por álgebra de derivadas

   $$\Longrightarrow f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \qquad \square$$

8. Sea $f(x) = \operatorname{cotg} x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$.

   Demostración.

   (Ejercicio). $\square$

9. Sea $f(x) = \sec x \Longrightarrow f'(x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$.

   Solución.

   Como $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\cos^2 x} \cdot (\cos x)'$

   $\therefore f'(x) = \dfrac{-1}{\cos^2 x} \cdot -\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x.$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

10. Sea $f(x) = \operatorname{cosec} x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

    Demostración.

    (Ejercicio). $\square$

Ejemplos

1. $s(t) = \dfrac{e^t}{t} \Longrightarrow s'(t) = \dfrac{t \cdot e^t - e^t \cdot 1}{t^2} = \dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\operatorname{tg} x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{(\operatorname{tg} x) \cdot 2x - (x^2 - 1) \cdot \sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

3. $g(x) = 2^x \cdot (3x^2 - \ln x) \Longrightarrow g'(x) = 2^x \cdot \left(6x - \dfrac{1}{x}\right) + (3x^2 - \ln x) \cdot 2^x \ln 2$.

4.8. Derivada de Funciones Compuestas. Regla de la Cadena

Se determinará $(f \circ g)'$ conociendo f' y g', siempre que $f \circ g$ exista.

Teorema 73. *Si $g(x)$ es derivable en x_0 y $f(x)$ es derivable en $g(x_0)$ entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y $(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.*

Demostración.

La función $f \circ g \ \exists$, si $rec\, g \cup dom f \neq \emptyset$.

Además g es derivable en $x_0 \in dom\, g$ y $f(x)$ es derivable en $g(x_0) \in dom f$, osea $g'(x_0)$ y $f'(g(x_0))$ existen, esto significa que $g(x)$ es continua en x_0, es decir; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ o bien $\lim\limits_{h \to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$.

Por definición de derivada de la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ en el punto $x = x_0$, se tendrá:

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h}$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - (f(g(x_0))}{h}$$

Sea $g(x_0 + h) - g(x_0) = k$ entonces $g(x_0 + h) = k + g(x_0)$

Si $h \longrightarrow 0$; $k \longrightarrow 0$, se tiene

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(k + g(x_0)) - f(g(x_0))}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(k + g(x_0)) - f(g(x_0))}{k} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(k + g(x_0)) - f(g(x_0))}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$\therefore (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

□

Que es la expresión de la derivada de $f \circ g$, en términos de f y g. *Regla de la Cadena.*

Si $y = f(v)$; $v = g(x) \Longrightarrow D_x y = D_x v$ ó $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx}$.

En general si: $y = f(u)$, $u = g(s)$, $s = h(t)$ y $t = i(x) \Longrightarrow$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$ ó $D_x y = D_u y \cdot D_s u \cdot D_t s \cdot D_x t$.

Teorema 74. *Sea $u = f(x)$ una función derivable entonces $D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$,* $n \in \mathbb{R}$

Tabla de Derivadas

Sea $u = f(x)$, entonces si:

1. $y = u^n \Longrightarrow y' = nu^{n-1} \cdot D_x u, \quad n \in \mathbb{R}.$
2. $y = \dfrac{1}{u} \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot D_x u$
3. $y = a^u \Longrightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot D_x u$
4. $y = e^u \Longrightarrow y' = e^u \cdot D_x u$
5. $y = \ln u \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{u} \cdot D_x u$
6. $y = \log_a u \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot D_x u$
7. $y = \operatorname{sen} u \Longrightarrow y' = \cos u \cdot D_x u$
8. $y = \cos u \Longrightarrow y' = -\operatorname{sen} u \cdot D_x u$
9. $y = \operatorname{tg} u \Longrightarrow y' = \sec^2 u \cdot D_x u$
10. $y = \operatorname{cotg} u \Longrightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot D_x u$
11. $y = \sec u \Longrightarrow y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot D_x u$
12. $y = \operatorname{cosec} u \Longrightarrow y' = -\operatorname{cosec} \cdot \operatorname{cotg} u \cdot D_x u$

Ejemplos

1. Derivar $y = \sqrt{x^2+1}$.

   Solución.

   Sea $y = \sqrt{z}$, $z = x^2 + 1 \Longrightarrow y' = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Hallar $\dfrac{dz}{dx}$; si $z = 3u^2 - 2u + 5$; $u = \sqrt{4 - y^2}$; $y = \dfrac{1}{x}$.

   Solución.

   $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

   $$\frac{dz}{dx} = (6u-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-y^2}}(-2y) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2} \cdot \frac{6u-2}{\sqrt{4-y^2}} = \frac{6\sqrt{4x^2-1} - 2x}{x^3\sqrt{4x^2-1}}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Derivar $y = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$.

   Solución.

   $$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{1+x}}} \cdot \frac{1}{-2\sqrt{1+x}} \cdot 1 = -\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1-\sqrt{1+x}}}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Derivar $y = xe^{-x}$.

   Solución.

   $y' = e^{-x} + xe^{-x} \cdot -1 = e^{-x} - xe^{-x}$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Derivar $y = e^{\operatorname{cotg} x^3}$.

   Solución.

   $y = e^{\operatorname{cotg} x^3} \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x^3) \cdot 3x^2$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

6. Derivar $y = 5^{\sqrt{4+x^2}}$.

   Solución.

   $$y' = 5^{\sqrt{4+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} \cdot \ln 5 = \frac{5^{\sqrt{4+x^2}} \cdot x \cdot \ln 5}{\sqrt{4+x^2}}.$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

7. Derivar $y = \ln \dfrac{e^{3x}+1}{e^{3x}-1}$.

Solución.

$y = \ln(e^{3x}+1) - \ln(e^{3x}-1)$

$$y' = \frac{1}{e^{3x}+1} \cdot e^{3x} \cdot 3 - \frac{1}{e^{3x}-1} \cdot e^{3x} \cdot 3 = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} - \frac{3e^{3x}}{e^{3x}-1}$$

$$= \frac{3e^{3x}}{e^{6x}-1}\left(e^{3x} - 1 - e^{3x} - 1\right) = \frac{-6e^{3x}}{e^{6x}-1}.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

8. Derivar $y = e^{x \ln x}$

Solución.

$$y' = e^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = (\ln x + 1)e^{x \ln x} = (\ln x + 1)e^{\ln x^x} = x^x(\ln x + 1).$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

9. Sea $g(x) = \ln\left(\sqrt{1+e^x} - 1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x} + 1\right)$. Verificar que $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

Solución.

$$g'(x) = \frac{\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x}-1} - \frac{\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x}+1} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+e^x} + 1 - \sqrt{1+e^x} + 1}{1 + e^x - 1}\right)$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

10. Sea $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$. Calcular y'.

Solución.

$$y' = \frac{x^3 \cdot \dfrac{1}{x} - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

11. Sea $y = \sqrt{x} \cdot \log x^3$. Calcular y'.

Solución.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x^3 + \sqrt{x} \cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3} \log e = \frac{3}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{3\sqrt{x}}{x} \log e =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{3}{\sqrt{x}} \log e = \frac{3}{2\sqrt{x}}(\log x + 2\log e) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \log xe^2.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

12. Sea $y = \ln^3(x+3)$. Calcular y'.

    Solución.

    $y' = 3\ln^2(x+3) \cdot \dfrac{1}{x+3} \cdot 1 = \dfrac{3}{x+3} \ln^2(x+3).$

    $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

13. Sea $y = \ln(\operatorname{tg} 3x)$. Calcular y'.

    Solución.

    $y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \sec^2 3x \cdot 3 = \dfrac{3\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 3x} = \dfrac{3}{\operatorname{sen} 3x \cos 3x}.$

    $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

14. Sea $y = \operatorname{sen}^3\left(\sqrt{x^3+1}\right)$. Calcular y'.

    Solución.

    $y' = 3\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{x^3+1}\right) \cdot \cos\left(\sqrt{x^3+1}\right) \cdot \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}.$

    $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4.9. Ejercicios Propuestos

1. Determinar la ecuación de las rectas tangentes y normal a la curva $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ en $x_0 = 3$.

   Respuesta: $$\begin{aligned} \text{Ec. Tangente} : y - 4 &= -3(x-3) \\ \text{Ec. Normal} : y - 3 &= \frac{1}{3}(x-3) \end{aligned}$$

2. *a*) Determinar los puntos pertenecientes a la curva $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 12x + 10$, tal que la recta tangente que pasa por ellos sea paralela a la recta $12x + y - 5 = 0$.

   Respuesta: $(0, 10)$, $(-1, 19)$, $(4, -166)$.

   b) Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes correspondientes.

3. Una piedra cae $16t^2$ pies en t segundos. ¿Cuál es su velocidad después de 2 segundos?.
   Respuesta: 64 *pies/seg.*

4. Una partćula se muere en línea recta, de tal manera que su distancia s *(en pies)* al origen en el tiempo t *(en segundos)* está dada por $s = t^3 - 4t^2,\ t \geq 0$. ¿En qué instantes es su velocidad de 3 *pies/ seg*?.
   Respuesta: $\left(3, \dfrac{1}{3}(4 \pm \sqrt{7})\right)$

5. Aplicando la definición de derivada, calcular:

   a) y' para $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ **Respuesta:** $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^{3/2}}$.

   b) $y'(3)$ para $y = \ln(x^2+1)$ **Respuesta:** $-\dfrac{3}{5}$

6. Calcular y' para:

a) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$ **Resp.:** $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2}$.

b) $y = -\dfrac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ **Resp.:** $y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$

c) $y = \operatorname{sen}(x + a) \cdot \cos(x + a)$ **Resp.:** $y' = \cos 2(x + a)$.

d) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ **Resp.:** $y' = \dfrac{1}{1 + \cos x}$

e) $y = \begin{cases} -x^3, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2}(3 - x^2), & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **Resp.:** $y' = \begin{cases} -3x^2, & \text{si } x < -1 \\ -x, & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} x^3 - x^2 + x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{2 - x}, & \text{si } -1 < x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ **Resp.:** $y' = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1, & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{(2 - x)^2}, & \text{si } -1 < x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

7. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + a}, & \text{si } x < 1 \\ x^3 + bx^2 - 5x + 3, & \text{si } x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right] \end{cases}$.

Si f es derivable en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$, determinar a y b.

Respuesta: $a = b = -2$.

8. Determinar la ecuación de cada una de las rectas que pasan por $(3, -2)$, y que son tangentes a la curva $y = x^2 + 7$.

Respuesta: $\begin{aligned} y - 18 &= 10(x - 5) \\ y + 6 &= 2(x - 1) \end{aligned}$

9. Determinar la derivada de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 4x - 2, & \text{si } x \le 2 \end{cases}$

Respuesta: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 < x < 2 \\ 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

10. Determinar y' para:

a) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ **Resp.:** $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$

b) $y = a^{\operatorname{tg}(nx)}$ **Resp.:** $y' = n \cdot a^{\operatorname{tg}(nx)} \cdot \sec^2(nx) \cdot \ln a$

c) $y = e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x$ **Resp.:** $y' = e^{\cos x}(\cos x - \operatorname{sen}^2 x).$

d) $y = a^{\ln x}$ **Resp.:** $y' = \dfrac{a^{\ln x} \cdot \ln a}{x}$

4.10. Derivadas de Orden Superior

Sea f una función derivable en $A \subseteq \mathbb{R}$. Esto significa que existe $f'(x)$, $\forall\, x \in A$. Luego la derivada de f en $x \in A$ está dada por la expresión: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Como $x \in A$ esta expresión corresponde a la derivada de una función.

Como la derivada es a su vez una función, puede derivarse nuevamente, es decir la derivada de f es f', de f' es f'', es decir,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

En símbolos:

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = D_x^2 y = y'' = \text{etc}$$

En general se tiene:

$$f^n = y^n = \frac{d^n f}{dx^n} = D_x^n y = \text{etc}$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = 2x \operatorname{sen} x + \cos x$, determinar $\dfrac{d^5}{dx^5}$.

   Solución.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 2x\cos x + \operatorname{sen} x.\\
f''(x) &= -2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + \cos x = -2x\operatorname{sen} x + 3\cos x.\\
f'''(x) &= -2x\cos x - 2\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen} x = -2x\cos x - 5\operatorname{sen} x\\
f^{iv}(x) &= 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x - 5\cos x = 2x\operatorname{sen} x - 7\cos x\\
f^{v}(x) &= 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x + 7\ senx = 2x\cos x + 9\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

   FIN .... FIN

2. Sea $y = 3x^3 + x^2 - 4x + 10$, determinar $\dfrac{d^4}{dx^4}$.

   Solución.

$$\begin{aligned}
y' &= 9x^2 + 2x - 4\\
y'' &= 18x + 2\\
y''' &= 18\\
y^{iv} &= 0
\end{aligned}$$

   FIN .... FIN

3. Determinar una expresión para f^n siendo $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

   Solución.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x)^{-1}\\
f''(x) &= -1(1+x)^{-2}\\
f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}\\
&\vdots\\
f^n(x) &= (-1)^n\, n!\,(1+x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)\,n!}{(1+x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

   FIN .... FIN

4.11. Derivación Implícita

Las funciones de la forma $y = f(x)$ a veces se dan mediante una relación entre x e y, como por ejemplo $x^2 + y^2 = 25$, que al resuelta para "y" da $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Ambas ecuaciones satisfacen la original y se dice que la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ describe la función $y = f(x)$ implícitamente. En cambio las ecuaciones $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = -\sqrt{25 - x^2}$, describe la función explícitamente.

La ecuación $x^2 + y^2 = 25$ está escrita en la forma $F(x, y) = 0$ y se dice que y es una función implícita de x.

Observaciones 75.

1. *A veces no es fácil despejar y en función de x, como por ejemplo: $x^2y + 7y^5 + 3y - 1 = 0$.*
2. *Para derivar funciones implícitas de la forma $F(x, y) = 0$, se deriva aplicando las reglas ya vistas, teniendo presente que $y = f(x)$.*

Ejemplos

1. $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$, determinar y'.

   Solución.

   $3x^2 + x^2y' + 2xy - 40y^3y' = 0 \Longrightarrow y'(x^2 - 40y^3) = -3x^2 - 2xy \Longrightarrow y' = \dfrac{3x^2 + 2xy}{40y^3 - x^2}$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $3x^2 - 2xy + y^2 = 0$, determinar y''.

   Solución.

   $3x^2 - 2 + y^2 = 0$. Derivando se obtiene:

   $6x - 2xy' - 2y + 2yy' = 0 \quad / : 2$

   $3x - xy' - y + yy' = 0$

   $(*)\ y'(y - x) = y - 3x \Longrightarrow y' = \dfrac{y - 3x}{y - x}$

   Derivando $(*)$ se tiene:

   $$y''(y-x) + y'(y'-1) = y' - 3 \Longrightarrow y''(y-x) + (y')^2 - y' = y' - 3 \Longrightarrow y'' = \frac{2y' - 3 - (y')^2}{y - x}$$

$$\Longrightarrow y'' = \frac{2\left(\dfrac{y-3x}{y-x}\right) - 3 - \left(\dfrac{y-3x}{y-x}\right)^2}{y-x} = \frac{2(y-3x)(y-x) - 3(y-x)^2 - (y-3x)^2}{(y-x)^3}$$

FIN .... FIN

3. Usando derivación implícita determinar la ecuación de la tangente y de la normal a las curvas en los puntos dados.

   a) $x^2y^3 = 4$ en $(2, 1)$

   Solución.

   $x^2y^3 = 4 \Longrightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{-2xy^3}{3x^2y^2} = -\dfrac{2y}{3x} \Longrightarrow y'(2) = -\dfrac{1}{3} = m_T$

   $\therefore$ Ecuación de la recta tangente: $y - 1 = -\dfrac{1}{3}(x-2)$.
   Ecuación de la recta normal: $y - 1 = 3(x-2)$.

   FIN .... FIN

   b) $x^3y^2 + y^3 = 2x^3$ en $(1, 1)$.

   Solución.

   $x^3y^2 + y^3 = 2x^3 \Longrightarrow 3x^2y^2 + 2x^3yy' + 3y^2y' = 6x^2 \Longrightarrow y'(2x^3y + 3y^2) = 6x^2 - 3x^2y^2$

   $y' = \dfrac{6x^2 - 3x^2y^2}{2x^3y + 3y^2} \Longrightarrow y'(1) = \dfrac{3}{5} = m_T$

   $\therefore$ Ecuación de la recta tangente: $y - 1 = -\dfrac{3}{5}(x-1)$.

   Ecuación de la recta normal: $y - 1 = -\dfrac{5}{3}(x-1)$.

   FIN .... FIN

4. Hallar la ecuación $y''(2)$, si $y(2) = 1$ y $x^3 + x^2y - xy^3 = 10$.

   Solución.

   $3x^2 + 2xy + x^2y - 3xy^2y' - y^3 = 0$ $(*)$

   $y' = \dfrac{-3x^2 - 2xy + y^3}{x^2 - 3xy^2} \Longrightarrow y'(2) = \dfrac{-12 - 4 + 1}{4 - 6} = \dfrac{15}{2}.$

Derivando $(*)$, se tiene:

$$6x + 2xy' + 2y + 2xy' + x^2y'' - 3x(2y(y')^2 + y^2y'') - 3y^2y' - 3y^2y' = 0 \qquad (**)$$

Luego reemplazando $y(2) = 1$ e $y'(2) = \dfrac{15}{2}$ en $(**)$ se tiene:

$$12+30+2+30+4y''-6\left(2\cdot\frac{225}{4}+y''\right)-6\cdot\frac{15}{2}=0 \Longrightarrow 74+4y''-675-6y''-45=0$$

$\Longrightarrow 2y'' = -646 \qquad \therefore\ y''(2) = -323.$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4.12. Derivación Logarítmica

Para derivar productos cuocientes o expresiones exponenciales complicadas puede aplicarse previamente logaritmo y luego derivar implícitamente.

Ejemplos

1. Sea $y = x^{\ln x}$. Calcular y'.

   Solución.

   $y = x^{\ln x} \Longrightarrow \ln y = \ln x^{\ln x} \Longrightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln x \Longrightarrow \ln y = \ln^2 x.$

   $\therefore\ \dfrac{1}{y}y' = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} \Longrightarrow y' = \dfrac{2y}{x}\ln x \Longrightarrow y' = 2\dfrac{x^{\ln x}}{x}\ln x$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, calcular y'.

   Solución.

   $\ln y = \cos x \ln \operatorname{sen} x \Longrightarrow \dfrac{1}{y}y' = -(\operatorname{sen} x)(\ln \operatorname{sen}) + \cos x\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x$

   $$y' = y\left[\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x(\ln \operatorname{sen} x)\right] \Longrightarrow y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x(\ln \operatorname{sen} x)\right].$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $y = \dfrac{x^5 \sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{1+3x}}$, calcular y'.

   Solución.

   $\ln y = 5 \ln x + \dfrac{1}{3} \ln(1-x^2) - \dfrac{1}{2} \ln(1+3x)$

   $\dfrac{1}{y} y' = \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{3(1-x^2)} \cdot (-2x) - \dfrac{1}{2(1+3x)} \cdot 3$

   $\therefore y' = \dfrac{x^5 \sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{1+3x}} \left[\dfrac{5}{x} - \dfrac{2x}{3(1-x^2)} - \dfrac{3}{2(1+3x)} \right]$.

   FIN .... FIN

4.13. Derivadas de las Funciones Trigonométricas Inversas

1. Sea $y = \operatorname{arc\,sen} x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Demostración.
   Si $y = \operatorname{arc\,sen} x \Longrightarrow x = \operatorname{sen} y \Longrightarrow 1 = \cos y \dfrac{dy}{dx} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   $$\therefore \qquad D_x(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Si $u = f(x)$, $D_x(\operatorname{arc\,sen} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot D_x u, \qquad -\dfrac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc\,sen} x \leq \dfrac{\pi}{2}$. □

2. Sea $y = \operatorname{arc\,cos} x \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Demostración.
   Si $y = \operatorname{arc\,cos} x \Longrightarrow x = \cos y \Longrightarrow 1 = -\operatorname{sen} y \dfrac{dy}{dx} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   $$\therefore \qquad D_x(\operatorname{arc\,cos} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Si $u = f(x)$, $D_x(\operatorname{arc\,cos} u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot D_x u, \qquad 0 \leq \operatorname{arc\,cos} x \leq \pi$. □

3. Sea $y = \operatorname{arc\,tg} x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Demostración.
   Si $y = \operatorname{arc\,tg} x \Longrightarrow x = \operatorname{tg} y \Longrightarrow 1 = \sec^2 y \dfrac{dy}{dx} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

   $\therefore \qquad D_x(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Si $u = f(x)$, $D_x(\operatorname{arc\,tg} u) = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot D_x u, \qquad -\dfrac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc\,tg} x \leq \dfrac{\pi}{2}$. $\square$

   Análogamente se obtiene que:

4. $D_x(\operatorname{arccotg} u) = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot D_x u$.

5. $D_x(\operatorname{arcsec} u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot D_x u$.

6. $D_x(\operatorname{arccosec} u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot D_x u$.

Demostrar las derivadas 4, 5 y 6.

Ejemplos

1. Sea $y = \operatorname{arc\,sen} e^x$, calcular y'.

   Solución.
   $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $y = \left(\operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{x}\right)^2$, calcular y'.

   Solución.
   $y' = 2\left(\operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{x}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -2\left(\operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$.
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $y = \operatorname{arc}\cos(\operatorname{tg}^2 x)$, calcular y'.

Solución.

$$y' = -\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4 x}} \cdot \sec^2 x = \frac{-2\operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4 x}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea $y = (\operatorname{arc}\operatorname{tg} x^3)^4$, calcular y'.

Solución.

$$y' = 4(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x^3) \cdot \frac{1}{1+x^6} \cdot 3x^2 = \frac{12x^2(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x^3)^3}{1+x^6}.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Sea $y = x \operatorname{arccosec}\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{1-x^2}$, calcular y'.

Solución.

$$y' = \operatorname{arccosec}\frac{1}{x} + x\left(-\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$y' = \operatorname{arccosec}\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccosec}\frac{1}{x}.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

6. $y = x^{\operatorname{arc}\operatorname{sen} x}$, calcular y'.

Solución.

$$\ln y = \operatorname{arc}\operatorname{sen} x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x + \operatorname{arc}\operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore y' = x^{\operatorname{arc}\operatorname{sen} x}\left[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\operatorname{arc}\operatorname{sen} x}{x}\right]$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

7. Sea $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, calcular y'.

Solución.

$y = \frac{1}{4}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$

$y' = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}(-1)\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right] - \frac{1}{2(1+x^2)}$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{1-x^2}\right] - \frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^4}\right]$

$\therefore y' = \frac{x^2}{1-x^4}.$

$\boxed{\text{FIN}}$ . . . . $\boxed{\text{FIN}}$

8. Demostrar que $y = \operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)$ satisface la ecuación $(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

Solución.

Obteniendo la primera y segunda derivada de y:

$y' = \cos(m \operatorname{arc\,sen} x)\cdot\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m\cos(m \operatorname{arc\,sen} x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y'' = \frac{-\sqrt{1-x^2}\cdot m\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)\cdot\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} - m\cos(m \operatorname{arc\,sen} x)\cdot\frac{2x}{x\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{-m^2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x) + mx\cos(m \operatorname{arc\,sen} x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Luego reemplazando en la ecuación, se tiene:

$$(1-x^2)\left[\frac{-m^2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x) + mx\cos(m \operatorname{arc\,sen} x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right] - \frac{xm\cos(m \operatorname{arc\,sen} x)}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$m^2\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)$

$$= \frac{-m^2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x) + mx\cos(m \operatorname{arc\,sen} x) - xm\cos(m \operatorname{arc\,sen} x)}{\sqrt{1-x^2}} + m^2\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)$$

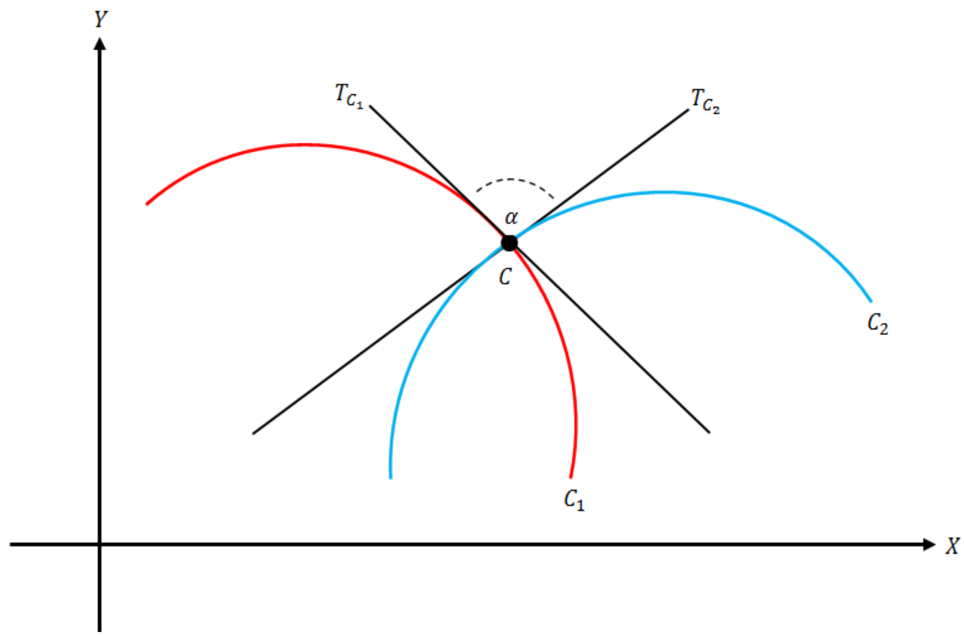
$$= \frac{-m^2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)}{\sqrt{1-x^2}} + m^2\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)$$

$= -m^2\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x) + m^2\operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x) = 0.$

$\therefore$ La función $y = \operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)$ satisface la ecuación $(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

$\boxed{\text{FIN}}$ . . . . $\boxed{\text{FIN}}$

Definición 76. *El ángulo por dos curvas que se cortan en punto C, se define como el ángulo determinado por las rectas tangentes a ellas en dicho punto.*



$\alpha =$ *ángulo que forman* C_1 *y* C_2 *al cortarse.*

Ejemplos

1. Si $f_1(x) = x^2 - \dfrac{7}{2}$ y $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, verificar que las curvas se cortan perpendicularmente en el punto $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

   Solución.

   $f_1'(x) = 2x \Longrightarrow f_1'(2) = 4.$

   $f_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow f_2'(2) = -\dfrac{1}{4}.$

   $\therefore 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1 \quad \therefore$ las curvas se cortan perpendicularmente.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $y = \dfrac{1}{x}$. Verificar que la recta tangente a esa curva en el punto $P(1,1)$ forma con los ejes coordenados un triángulo de área 2.

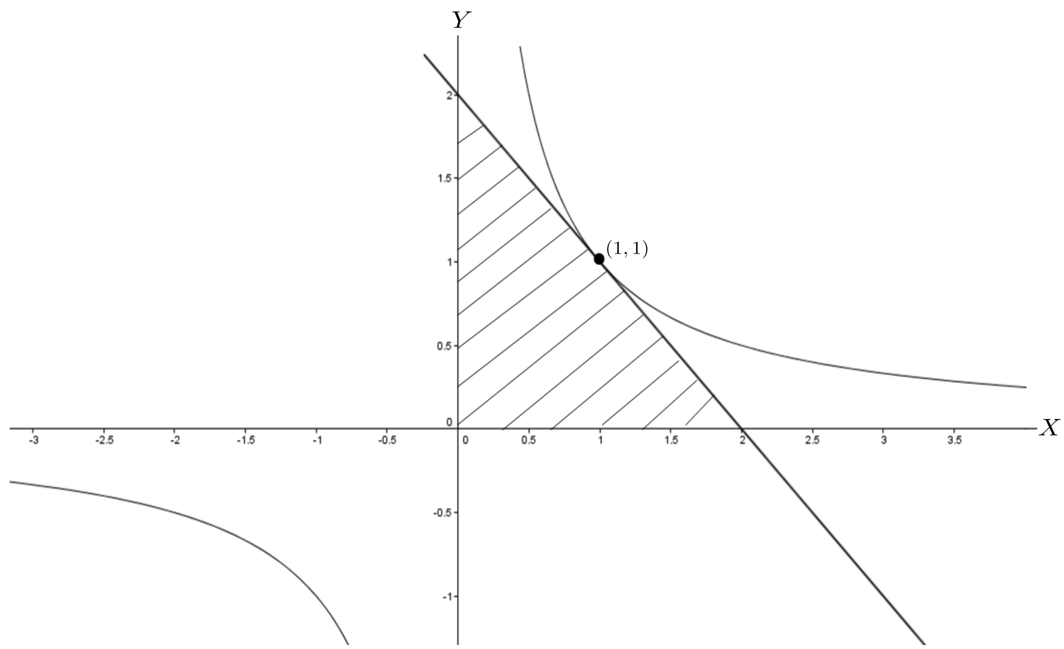
Solución.

$y' = -\dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow y'(1) = -1 = m.$

La ecuación tangente en $(1,1)$ es:

$y - 1 = -1(x-1) \Longrightarrow x + y - 2 = 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 1.$

$\therefore A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4.14. Ejercicios Propuestos

1. Calcular $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ **Resp.** : $\dfrac{y}{a^2}$.

2. Calcular $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ para $y = \dfrac{x^3}{1-x}$. **Resp.** : $\dfrac{4!}{(1-x)^5}$.

3. Calcular $y^{(n)}$ para $y = a^x$ **Resp.** : $(\ln a^n)a^x$.

4. Calcular $y^{(n)}$ para $y = \ln(1+x)$ **Resp.** : $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

5. Si $y = e^x \operatorname{sen} x$ demostrar que $y'' - 2y - +2y = 0$.

6. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para:

   a) $x^2 + y^2 = a^2$. **Resp.** : $-\dfrac{x}{y}$

   b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **Resp.** : $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

   c) $\cos(xy) = x$. **Resp.** : $\dfrac{1 + y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$

7. Calcular $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para $e^x + x = e^y + y$. **Resp.** : $\dfrac{(1-e^{x+y})(e^x - e^y)}{(e^y+1)^3}$.

8. Si f y g son don funciones tales que $f''(x)$ y $g''(x)$ existen $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y $f(x)\cdot g(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, probar que: $\dfrac{f''(x)}{f'(x)} - 2\dfrac{f'(x)}{f(x)} - \dfrac{g''(x)}{g'(x)} = 0$.

9. Aplicando previamente logaritmo natural, calcular y'

   a) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. **Resp.** : $\dfrac{y}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$

   b) $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. **Resp.** : $y\left(\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{4(x-2)} - \dfrac{2}{5(x-3)}\right)$

10. Calcular y' para:

a) $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. **Resp.** : $\dfrac{1}{2}$

b) $y = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **Resp.** : $\dfrac{1}{x^3-1}$

c) $y = \arccos \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. **Resp.** : $-\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$

d) $y = x^{\operatorname{arc\,sen} x}$. **Resp.** : $x^{\operatorname{arc\,sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} + \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

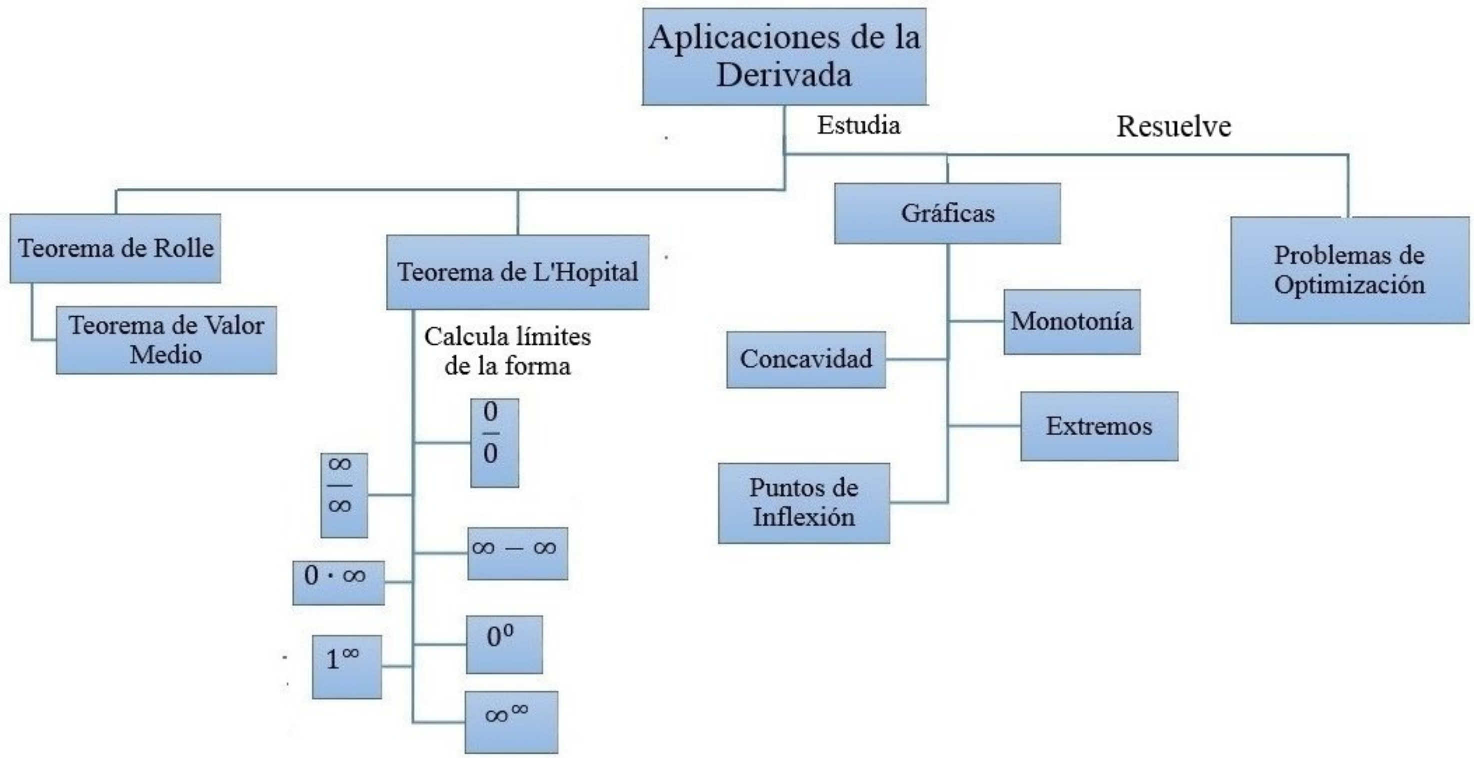
e) $y = \arccos \dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$. **Resp.** : $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b\cos x}$

11. Demostrar que $y = \operatorname{sen}(m \operatorname{arc\,sen} x)$ satisface la ecuación $(1-x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0$.

Capítulo 5

Aplicaciones de la Derivada

Mapa Conceptual



Competencias a lograr

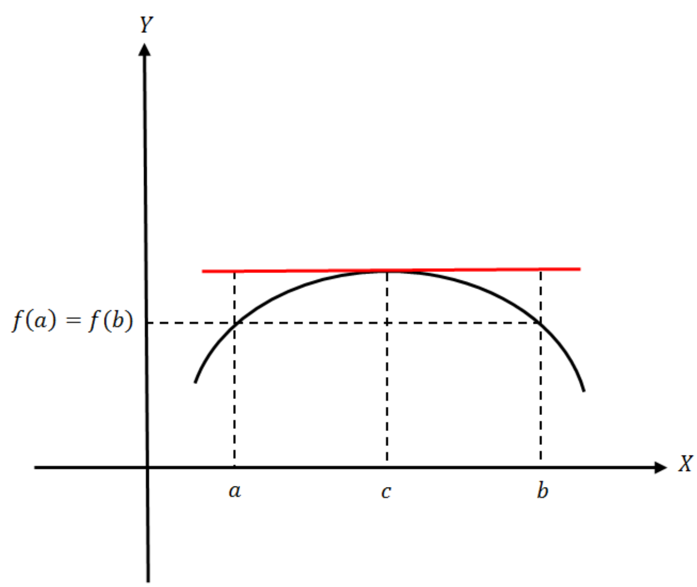
Al término del presente capítulo, el alumno será capaz de:

- Aplicar el Teorema de Rolle y del valor medio.
- Aplicar L'Hopital al cálculo de límite de funciones.
- Determinar extremos de una función.
- Dada una ecuación, graficarla, determinando intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
- Resolver problemas relacionados con máximos y mínimos.

5.1. Teorema de Rolle

Sea $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $fa) = f(b)$, entonces, debe existir al menos un valor $c \in (a, b) \; / f'(c) = 0$.

Gráficamente:



La interpretación geométrica de este teorema indica que si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), es decir, tiene una tangente en todos los puntos del intervalo, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $(c, f(c))$ es un punto en la cual la tangente es paralela al eje X. Luego $f'(c) = 0$.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Comprobar el Teorema de Rolle en $[1, 2]$.

   Solución.

   f es continua en $[1, 2]$, ya que todo polinomio es una función continua en su dominio, f es derivable en $(1, 2)$ ya que $f(x) = 2x - 3$. Además $f(1) = f(2) = 0$.

   $\therefore \exists\ c \in (1, 2)\ /\ f'(c) = 0$.

   En efecto:

   $f'(c) = 2c - 3 = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{3}{2} \in (1, 2)$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$. Comprobar el Teorema de Rolle en $[0, 3]$.

   Solución.

   a) f es continua en $[0, 3]$, ya que $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x^{4/3} - 3x^{1/3}\right) = \left(x_0^{4/3} - 3x_0^{1/3}\right) = f(x_0)$,

   $\forall\ x_0 \in (0, 3)$.

   Además: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^{4/3} - 3x^{1/3}\right) = 0 = f(0)$.

   $\lim\limits_{x \to 3^-} \left(x^{4/3} - 3x^{1/3}\right) = \sqrt[3]{3^4} - 3\sqrt[3]{3} = 0 = f(3)$.

   b) f es derivable en $(0, 3)$, ya que $f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{1/3} - x^{-2/3} = \dfrac{4\sqrt[3]{x}}{3} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

   c) $f(0) = 0$.

   $f(3) = \sqrt[3]{3^4} - 3\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - -3\sqrt[3]{3} = 0$.

   $\therefore f(0) = f(3) = 0$.

   $\therefore \exists\ c \in (0, 3)\ /\ f'(c) = 0 \Longrightarrow f'(c) = \dfrac{4\sqrt[3]{c}}{3} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{c^2}} = 0 \Longrightarrow \dfrac{4c - 3}{3\sqrt[3]{c^2}} = 0$.

   $\Longrightarrow c = \dfrac{3}{4} \in (0, 3)$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Comprobar que entre las raíces de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x - 6}$ es aplicable el Teorema de Rolle.

Solución.

$f(x) = 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 5x - 6} = 0 \Longrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Longrightarrow (x-6)(x+1) = 0.$

$\therefore\ x = 6,\ x = -1.$

Se debe comprobar que el Teorema de Rolle se cumple en $[-1, 6]$.

En efecto

a) f es continua en $[-1, 6]$ ya que $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 6} = \sqrt[3]{x_0^2 - 5x_0 - 6} = f(x_0)$,

$\forall\ x_0 \in (-1, 6)$.

Además: $\lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 6} = 0 = f(-1)$.

$\lim\limits_{x \to 6^-} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 6} = 0 = f(6).$

b) $f'(x) = \dfrac{2x - 5}{3(x^2 - 5x - 6)^{2/3}}$, luego f es derivable en $(-1, 6)$.

c) $f(-1) = f(6) = 0$

$\therefore\ c \in (-1, 6)\ /\ f'(c) = 0.$

$$f'(c) = \frac{2c - 5}{3\sqrt[3]{(c^2 - 5c - 6)^2}} = 0 \Longrightarrow 2c - 5 = 0 \Longrightarrow c = \frac{5}{2} \in (-1, 6).$$

FIN . . . . FIN

4. La función $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del intervalo $[-1, 1]$.
Demostrar que la derivada de esta función no se anula en ningún punto de dicho intervalo. Explique porqué no es aplicable el Teorema de Rolle.

Solución.

a) f es continua en $[-1, 1]$.

b) $f'(x) = -\dfrac{4}{5}x^{-1/5} = \dfrac{-4}{5\sqrt[5]{x}} \Longrightarrow f'(0)\ \nexists.$

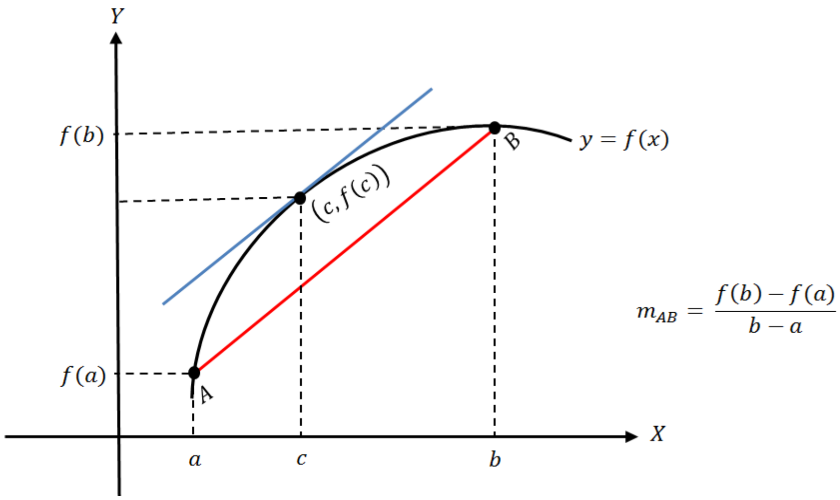
Luego para algún x del intervalo $(-1, 1)$, f no es aplicable. Como la función no cumple con la hipótesis, no es aplicable el Teorema de Rolle.

FIN . . . . FIN

5.2. Teorema del Valor Medio

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Gráficamente



La interpretación de este teorema indica que si A y B son puntos de $y = f(x)$, continua entre ellos y con tangente en cada uno de los puntos del intervalo, luego debe existir un punto $(c, f(c))$ con $c \in (a, b)$ en la cual la tangente es paralela a la recta que une A y B. Luego la pendiente de la tangente es igual a la pendiente de la recta AB. Luego: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ejemplos

1. Comprobar el T.V.M. para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[x_1, x_2]$.

   Solución.

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua $\forall\ x \in [x_1, x_2]$.

   b) $f'(x) = \cos x \Longrightarrow f$ es derivable $\forall\ x \in (x_1, x_2)$.

   $$\therefore c \in (x_1, x_2) \ / \ f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

   $$\therefore \cos c = \frac{\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1}{x_2 - x_1},\ c \in (x_1, x_2).$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. ¿ En qué punto de la curva $f(x) = x^n$, la tangente es paralela a la cuerda que une $M_1(0,0)$ y $M_2(a, a^n)$, $a > 0$?.

   Solución.

   Primero se verá si T.V.M. es aplicable a f en $[0, a]$.

   a) f es continua en $[0, a]$, por su función polinómica.

   b) $f'(x) = nx^{n-1}$, f derivable en $(0, a)$.

   c) $\exists\, c \in (0, a) \ / \ f'(c) = \dfrac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \dfrac{a^n}{a} = a^{n-1}$.

   $\Longrightarrow nc^{n-1} = a^{n-1} \Longrightarrow c^{n-1} = \dfrac{a^{n-1}}{n}$.

   $\Longrightarrow c = \dfrac{a}{\sqrt[n-1]{n}} \in (0, a)$.

   $\therefore$ la tangente es paralela a la cuerda en $c = \dfrac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5.3. Teorema de L'Hopital y sus Aplicaciones al Calculo de Límite de Funciones

Sea $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ una función de variable real y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que $F(x)$ toma la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Otras formas indeterminadas son: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10}$ está definida $\forall x \in \mathbb{R} - \{2, -5\}$ ya que para $x = 2$ y $x = -5$ el denominador se anula. Pero para $x = 2$ el numerador también se anula y $f(x)$ toma la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ya que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 3x + 2 = 0$ y $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 3x - 10 = 0$

Teorema 77. *Sean $a \in \mathbb{R}$ y $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, siendo f y g funciones derivables en un intervalo abierto I. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$*

Observaciones 78.

1. *Si las primeras derivadas también se anulan para $x = a$, se vuelve aplicar L'Hopital. Este procedimiento puede repetirse las veces que corresponda.*

2. *Este teorema también es válido para los casos cuando $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$,*

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - x - 15}{3x^2 - 8x - 3}$.

   Solución.

   Como $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2 - x - 15) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2 - 8x - 3) = 0$ entonces la función toma la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$. Aplicando L'Hopital, se tiene:

   $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - x - 15}{3x^2 - 8x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x - 1}{6x - 8} = \dfrac{11}{10}$.

   FIN .... FIN

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

   Solución.

   Como toma la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicamos L'Hopital, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2}$, nuevamente la función toma la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicando L'Hopital se tiene

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos x}{6} = -\dfrac{1}{6}$.

   FIN .... FIN

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln \cos x}$.

   Solución.

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \cos x}{\operatorname{sen} x} = -2 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x \operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} = -2.$

   FIN .... FIN

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+7x}{1-\cos x}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+7x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{2x}\cdot 2+e^{2x}+7}{\operatorname{sen} x}=\frac{8}{0}\qquad \therefore \text{ no existe.}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Este teorema se puede aplicar a otras formas indeterminadas.

1. Forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, se sigue la misma regla que para la forma $\dfrac{0}{0}$.

Ejemplos

a) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$

Solución.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\Longrightarrow \text{aplicando L'Hopital}\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen} 2x}{\ln\operatorname{sen} x}$

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen} 2x}{\ln\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos^2 x}=\frac{1}{1}=1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\operatorname{tg} x-10}{\sec x+4}$.

Solución.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\operatorname{tg} x-10}{\sec x+4}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\sec x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\operatorname{sen} x}=2.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

d) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen} x)}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen} x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x}=1.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

e) Calcular $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$.

Solución.

$\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 1.$

FIN .... FIN

2. Forma $0\cdot\infty$. Si $f(x)\cdot g(x)$ toma la forma $0\cdot\infty$, la función se expresará como:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

de manera que tome la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, para luego aplicar una de las reglas anteriores.

Ejemplos

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Solución.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = (0\cdot\infty) \Longrightarrow$ aplicando L'Hopital $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}.$

FIN .... FIN

b) Calcular $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi-2x)\operatorname{tg} x$

Solución.

$\lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi-2x)\operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi-2x)\operatorname{tg} x \dfrac{\pi-2x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\pi-2x}{\operatorname{cotg} x}$

$\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{-2}{-\operatorname{cosec}^2 x} = 2.$

FIN .... FIN

3. Forma $\infty - \infty$. En general es posible transformar la expresión a $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ejemplos

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Solución.

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

FIN .... FIN

b) Calcular $\lim\limits_{y\to 1}\left(\dfrac{y}{y-1}-\dfrac{1}{\ln y}\right)$.

Solución.

$$\lim_{y\to 1}\left(\frac{y}{y-1}-\frac{1}{\ln y}\right)=\lim_{y\to 1}\frac{y\ln y-y+1}{(y-1)\ln y}=\lim_{y\to 1}\frac{y\cdot\dfrac{1}{y}+\ln y-1}{(y-1)\dfrac{1}{y}+\ln y}=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{1-\dfrac{1}{y}+\ln y}$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}}=\frac{1}{2}.$$

FIN .... FIN

c) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1+x}{1+x}+\ln(1+x)+1}=$$

$\dfrac{1}{2}.$

FIN .... FIN

4. Forma 0^0, 1^∞, ∞^0.

Sea $y = f(x)^{g(x)} \Longrightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$, que toma la forma $0\cdot\infty$. Además se tiene que el $\lim\limits_{x\to x_0} \ln y = a \Longrightarrow \ln \lim\limits_{x\to x_0} y = a \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} y = e^a$.

Ejemplos

a) Calcular $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Solución.

Como es de la forma 1^∞, se tiene:

$y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \Longrightarrow \ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)$.

$$\therefore \lim_{x\to\pi/2} \ln y = \lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x\cdot\ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot -\operatorname{sen}^2 x = \lim_{x\to\pi/2} (-\operatorname{sen} x\cdot\cos x) = 0.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\pi/2} \ln y = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pi/2} y = e^0 = 1.$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = 1.$

FIN .... FIN

b) Calcular $\lim\limits_{x\to1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}$.

Solución.

Es de la forma 1^∞.

Sea $y = x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{1}{1-x}\cdot\ln x \Longrightarrow \lim\limits_{x\to1}\ln y = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1} =$
$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{-1}{x}\right) = -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\ln y = -1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to1} y = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ $\qquad \therefore \lim\limits_{x\to1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \dfrac{1}{e}$.

FIN .... FIN

c) Calcular $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$.

Solución.

Como es de la forma ∞^0, se tiene:

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} \Longrightarrow \ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen} x \cdot (\ln 1 - \ln x) = -\operatorname{sen} x \cdot \ln x.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \ln y = -\lim_{x\to 0} -\operatorname{sen} x \cdot \ln x = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^0 \qquad \therefore \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = 1.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

d) Calcular $\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{4+\ln x}\right)}$.

Solución.

Es de la forma 0^0.

Sea $y = x^{\left(\frac{1}{4+\ln x}\right)} \Longrightarrow \ln y = \frac{3}{4+\ln x} \cdot \ln x.$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = 3 \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} y = e^3 \qquad \therefore \lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{4+\ln x}\right)} = e^3$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

e) Calcular $\lim_{x\to\infty} \sqrt[t]{t^2} = \lim_{x\to\infty} t^{\frac{2}{t}}$.

Solución.

Es de la forma ∞^0.

Sea $y = t^{\frac{2}{t}} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{2}{t}\ln t$.

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln t}{t} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{1}{t}}{1} = 0.$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1. \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[t]{t^2} = 1.$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

f) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x^3-2)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Solución.

Es de la forma ∞^0, se tiene

Sea $y = (x^3-2)^{\frac{1}{\ln x}} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{1}{\ln x}\cdot \ln(x^3-2)$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3-2)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^3-2} = 3.$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln y = 3 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^3 \qquad \therefore \lim_{x\to\infty} (x^3-2)^{\frac{1}{\ln x}} = e^3.$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

g) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{\sqrt[x]{1-x^2}}; \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$

Solución.

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0}(a^x - b^x) = 0$, se calculará el otro límite.

Sea $y = \sqrt[x]{1-x^2} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{1}{x}\cdot \ln(1-x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \ln(1-x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{1} = 0.$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to 0} \ln y = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1 \qquad \therefore \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{\sqrt[x]{1-x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5.4. Ejercicios Propuestos

1. Verificar la validez del Teorema de Rolle para $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ en $[1, 2]$.

   Resp. : $c = \dfrac{3}{2}$.

2. Determinar el valor de c que satisface el Teorema de Rolle para $f(x) = (x+2)^{2n}(x-2)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, en $[-2, 2]$.

   Resp. : $c = \dfrac{2}{3}$.

3. Analizar si es aplicable el Teorema de Rolle para $f(x) = 1 - x^{2/3}$ en $[-1, 1]$.

   Resp. : No es aplicable.

4. Determinar el valor de c que satisface el Teorema del Valor Medio para:

   a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ en $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$. **Resp.** : 1.

   b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $[1, 3]$. **Resp.** : $\dfrac{3}{2}$.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x}{2 - x}, & \text{si } 1 < x \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

   Determinar $c \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ del Teorema del Valor Medio. **Resp.** : 1.

6. Calcular:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. **Resp.** : $-\dfrac{1}{3}$.

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} x}$. **Resp.** : $\dfrac{\pi^2}{2}$.

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$. **Resp.** : 3.

d) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$. **Resp.** : $-\dfrac{2}{\pi}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg} x$. **Resp.** : 0.

f) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$. **Resp.** : 1.

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}$. **Resp.** : e^{-1}.

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. **Resp.** : 1.

5.5. Utilización de la Derivada en el Trazado de Curvas

Esta sección enseña a utilizar la derivada en el trazado de curvas, de modo que la información obtenida a través de ella, permite esbozar un gráfico más exacto.

1. Puntos Críticos de una Función

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Aquellos puntos donde la derivada de f se anula o no existe, se denominan puntos críticos de f. Es decir los puntos críticos de f son las raíces de la ecuación $f'(x)=0$ o bien los puntos donde f' no existe.

Ejemplos

1) $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x - 1$ definida sobre $I = (0,5)$.

$f'(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x + 3) = -(x-3)(x-1)$.

De $f'(x) = 0$ se obtiene $x = 3 \;\; \wedge \;\; x = 1$, son puntos críticos.

2) $f(x) = (x-3)^{2/3} + 2; \quad x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(x-3)^{-1/3} = \dfrac{2}{3(x-3)^{-1/3}}, \quad \therefore$ punto crítico $x = 3 \in \mathbb{R}$; pues $\nexists\ f'(3)$.

Se dice que $\nexists\ f'(3)$, ya que $f'_+(3) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty; \quad f'_-(3)- = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$.

3) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x; \quad x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Longrightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \Longrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}$, etc. son puntos críticos.

4) $f(x) = \operatorname{sen}|x| = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -\operatorname{sen} x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x \geq 0 \\ -\cos x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como es una función por tramo y además continua, se analiza su derivada en $x = 0$.

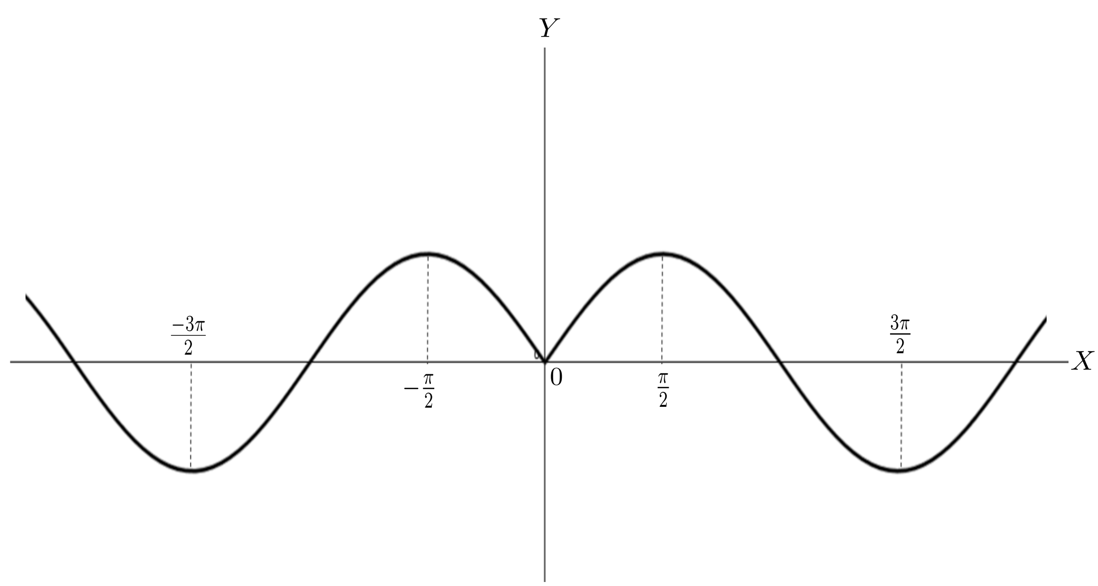
$$\left.\begin{array}{ll} f'_{+}(0) & = \cos 0 = 1 \\ f'_{-}(0) & = -\cos 0 = -1 \end{array}\right\} \quad \nexists\ f'(0) \qquad \therefore\ x = 0 \text{ es un punto crítico.}$$

Por otro lado $f'(x) = 0 \Longrightarrow \cos x = 0, \quad x > 0 \Longrightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^{+}.$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow -\cos x = 0, \quad x < 0 \Longrightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}^{-}.$

$\therefore$ Puntos críticos $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad x = 0.$

Gráficamente



5) $f(x) = |x^3 - 4x| = \begin{cases} x^3 - 4x, & \text{si } x^3 - 4x \geq 0 \Longrightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty) \\ -x^3 + 4x, & \text{si } x^3 - 4x < 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2) \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty) \\ -3x^2 + 4, & x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2) \end{cases}$

a) Como f es continua en todo su dominio y derivable en cada tramo abierto, se analizará su derivabilidad en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

i) En $x = -2$

$f'_-(-2) = -3(-2)^2 + 4 = -8 \quad \wedge \quad f'_+(-2) = 3(-2)^2 - 4 = 8.$

$\therefore f'(-2) \nexists$, f no es derivable en $x = -2$.

ii) En $x = 0$.

$f'_-(0) = 3(0)^2 - 4 = -4 \quad \wedge \quad f'_+(-2) = -3(-2)^2 + 4 = 4.$

$\therefore f'(0) \nexists$, f no es derivable en $x = 0$.

iii) En $x = 2$

$f'_-(2) = -3(2)^2 + 4 = -8 \quad \wedge \quad f'_+(2) = 3(2)^2 - 4 = 8.$

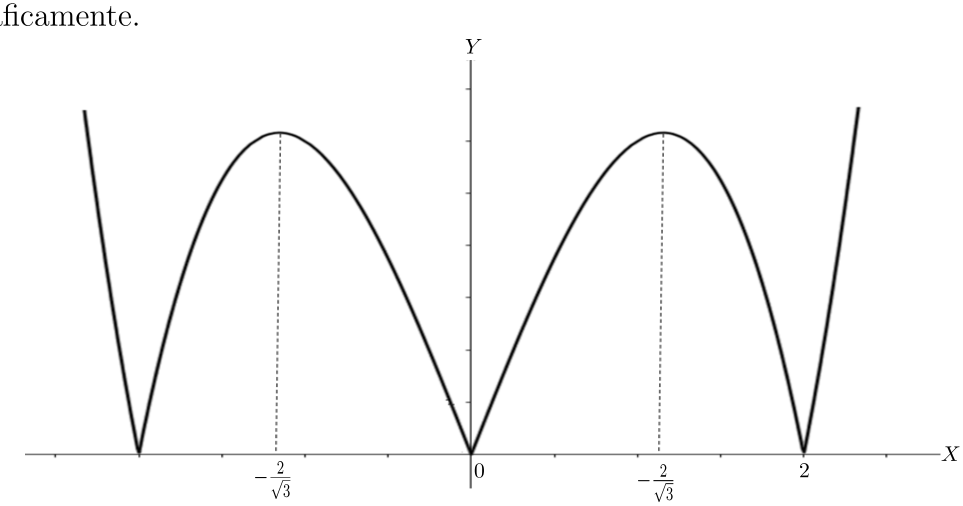
$\therefore f'(-2) \nexists$, f no es derivable en $x = 2$.

b) $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \in (-2, 0) \cup [2, +\infty).$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow -3x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \in (-\infty, -2) \cup (0, 2).$

$\therefore$ Puntos críticos $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}};\ x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}};\quad x = -2;\quad x = 0;\quad x = -2.$

Gráficamente.



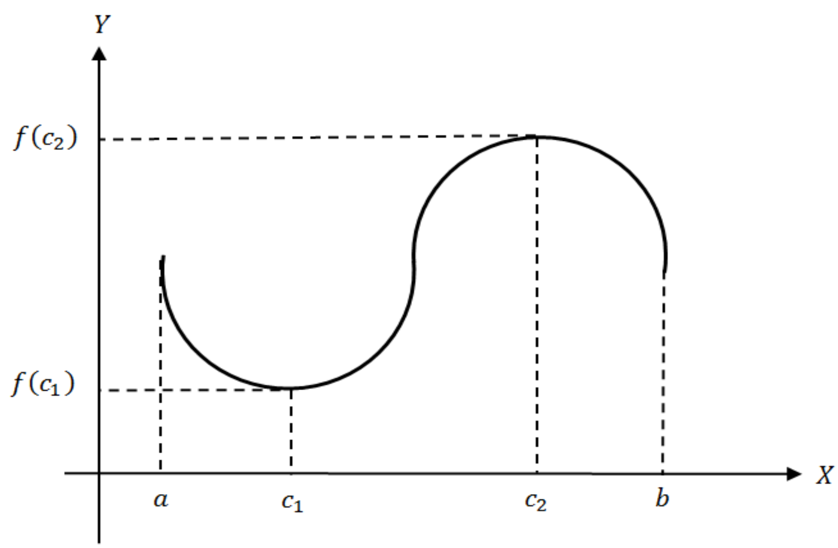
2. Valores Extremos de una Función

Definición 79.

a) *Se dice que f tiene un máximo absoluto en x_0, si $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall\ x \in dom f$, $f(x_0)$ se denomina valor máximo absoluto.*

b) *Se dice que f tiene un mínimo absoluto en x_0, si $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall\ x \in dom f$, $f(x_0)$ se denomina valor mínimo absoluto.*

Gráficamente.



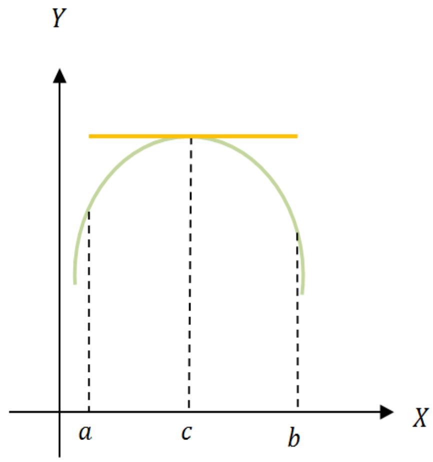
En c_2 hay un máximo absoluto cuyo valor es $f(c_2)$.

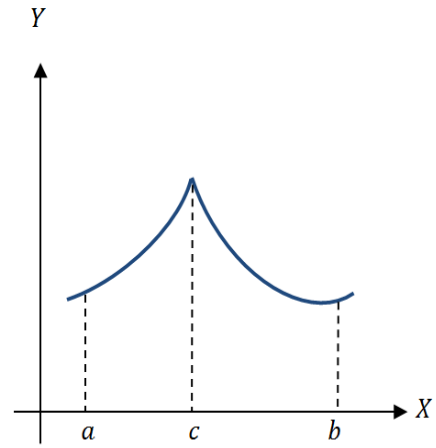
En c_1 hay un mínimo absouto cuyo valor es $f(c_1)$.

Definición 80.

a) *Se dice que la función f tiene un máximo relativo o local en $x = c \in (a, b)$, si $f(c) \geq f(x)$, $\forall\ x \in (a, b)$, donde $(a, b) \subseteq A = dom f$.*

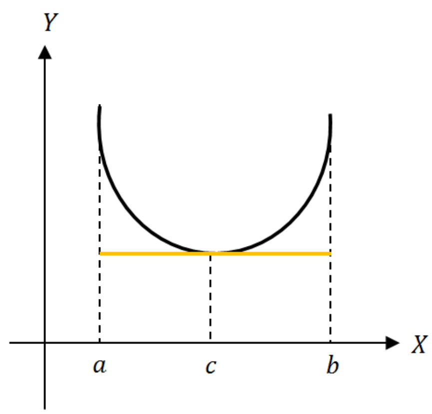
Cuando ello ocurre se dice que $f(c)$ es un máximo relativo de f.

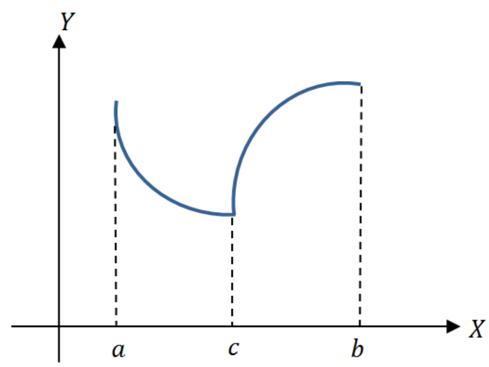




b) Se dice que la función f tiene un mínimo relativo o local en $x = c \in (a, b)$, si $f(c) \leq f(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$, donde $(a, b) \subseteq A = dom f$.

Cuando ello ocurre se dice que $f(c)$ es un mínimo relativo de f.





Teorema 81. *(Condición necesaria para la existencia de un valor extremo local.)*

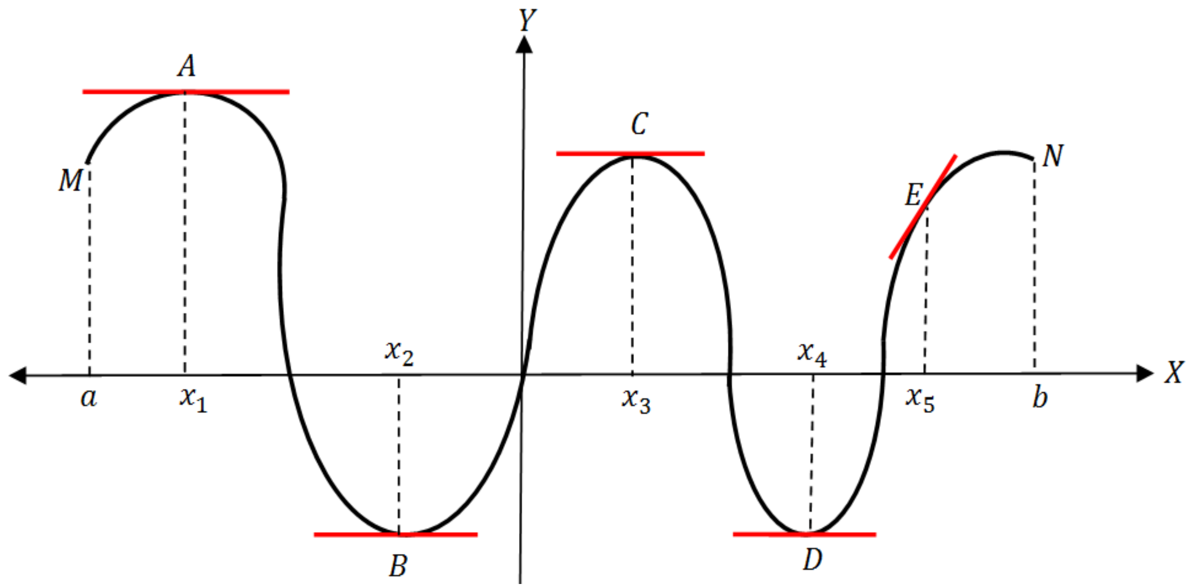
Sea f una función derivable y $x = c \in dom f$. Si en $x = c$, f posee un valor extremo local, entonces $f'(c) = 0$ ó $f'(c) \nexists$.

Observaciones 82.

a) *El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, que $f'(c) = 0$ ó $f'(c) \nexists$ no necesariamente en $x = c$ hay un extremo.*

b) *Sólo puede haber valores extremos locales de f, si es que existen, en los puntos críticos definidos.*

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$ cuyo gráfico es:



Si un punto P, se mueve a lo largo de la curva desde M hasta N, se observa que en el tramo MA los valores de la función crecen cuando la abscisa crece y en el tramo AB los valores decrecen, cuando la abscisa crece. Luego f es creciente en (a, x_1), (x_2, x_3) y (x_4, b) y decreciente en (x_1, x_2) y (x_3, x_4)

Observación 83. *Geométricamente, se observa que cuando la pendiente de la tangente es positiva, la función es creciente y cuando la pendiente de la tangente es negativa, la función es decreciente.*

Teorema 84. *Sea f una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $(x_1, x_2) \subseteq (a, b)$. Entonces:*

a) *Si $f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (x_1, x_2)$, entonces f es creciente en (x_1, x_2).*

b) *Si $f'(x) < 0 \ \forall\, x \in (x_1, x_2)$, entonces f es decreciente en (x_1, x_2).*

Demostración. (Parte a)

Sean x_1, $x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ y $c \in (x_1, x_2)$. Del T.V.M. se tiene

$f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, como $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0$.

Por hipótesis $f'(x) > 0$, $\therefore f(x_2) - f(x_1) > 0 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$, $\therefore f$ es creciente en $[a, b]$; en forma análoga se demuestra la parte b). $\square$

Observación 85. *El o los valores donde f es monótona creciente, corresponden al conjunto solución de la inecuación $f'(x) > 0$ y f monótona decreciente $f'(x) < 0$.*

Ejemplos

1) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución.

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, puntos crtícos $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

Luego se analizan los intervalos $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, +\infty)$.

a) Si $x < -1 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-\infty, -1)$.
b) Si $-1 < x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-1, 0)$.
c) Si $0 < x < 1 \Longrightarrow f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(0, 1)$.
d) Si $x > 1 \Longrightarrow f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(1, +\infty)$.

$\therefore f$ es creciente en $(-\infty, 0)$, $x \neq -1$ y decreciente en $(0, +\infty)$, $x \neq 1$.

FIN .... FIN

2) Sea $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución.

$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ya que como f es continua en $\mathbb{R}$, se tiene que:

$f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = 1$, y por tanto es derivable en $x = 0$.

$f'(x) = 0$ en $x = \pm 1$, puntos críticos. Como f está definida por tramos, se analizan los intervalos $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, +\infty)$.

a) Si $x < -1 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-\infty, -1)$.
b) Si $-1 < x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-1, 0)$.
c) Si $0 < x < 1 \Longrightarrow 0 < x^2 < 1 \Longrightarrow -1 < -x^2 < 0 \Longrightarrow 0 < 1 - x^2 < 1$

$\Longrightarrow f'(x) > 0$, f es creciente en $(0, 1)$

d) Si $x > 1 \Longrightarrow f'(x) < 0, \quad \therefore f$ es decreciente en $(1, +\infty)$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

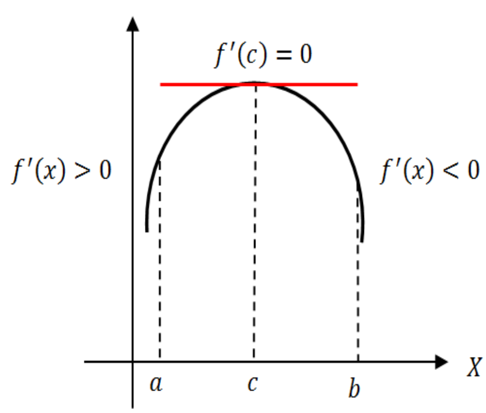
3. Determinación de Valores Extremos

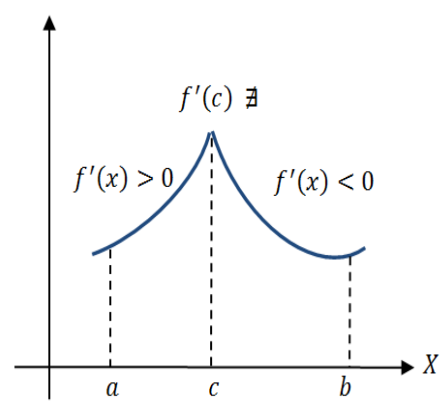
A continuación se presentarán criterios que van a permitir a decidir si en tales puntos crtícos existen máximos y/o mínimos.

Criterio de la Primera Derivada para Máximos y Mínimos

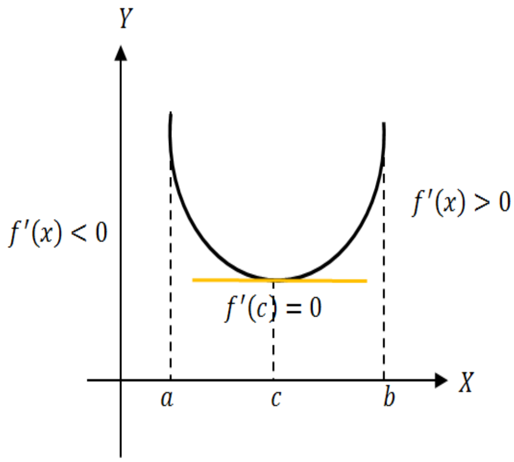
Teorema 86. *Sea f una función continua en $[a, b]$ y $c \in (a, b)$ tal que f' exista en (a, b) excepto posiblemente en c.*

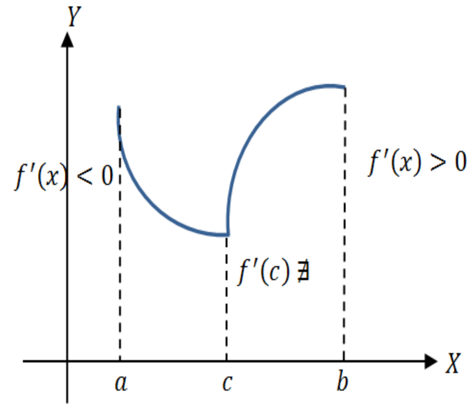
1) Si $f'(x) > 0, \forall\ x \in (a, c)$ y si $f'(x) < 0, \forall\ x \in (c, b)$, entonces se tiene en $x = c$ un máximo.





2) Si $f'(x) < 0$, $\forall\ x \in (a, c)$ *y si* $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in (c, b)$, *entonces se tiene en* $x = c$ *un mínimo.*





Resumen: Para determinar extremos con este criterio se debe:

1. Hallar f'.
2. Determinar puntos críticos.
3. Aplicar criterio de la primera derivada.

Ejemplos

1. Encontrar los extremos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento para $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 2$.

   Solución.

   f es continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

   a) $f'(x) = x^2 - 2x$

   b) $x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0$, puntos críticos $x = 0$; $x = 2$.

   c) $(-\infty, 0)$; $(0, 2)$; $(2, +\infty)$.

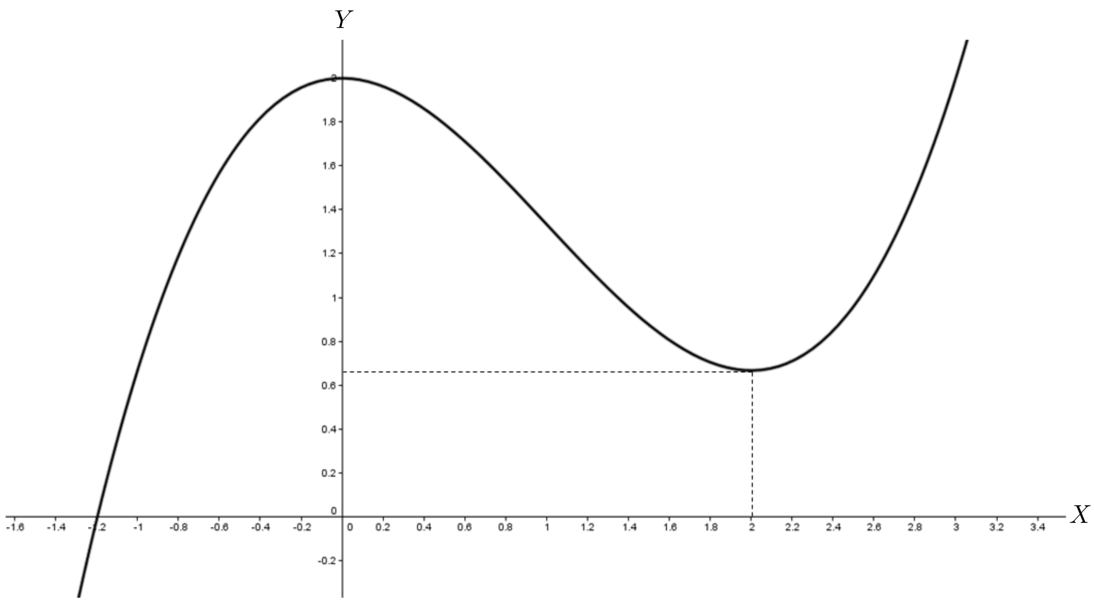
Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 2 \Longrightarrow f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(0, 2)$.

Si $x > 2 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(2, +\infty)$.

$\therefore$ en $x = 0$ hay un máximo y es $f(0) = 2$.

en $x = 2$ hay un mínimo y es $f(2) = \dfrac{2}{3} = 0.\overline{6}$



FIN .... FIN

2. Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Determinar extremos e intervalos de monotonía.

Solución.

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 + 9$.

b) $3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longrightarrow (x-3)(x-1) = 0$, puntos críticos $x = 3$; $x = 1$.

c) Intervalos de Monotonía:

$(-\infty 1,); (1,3); (3,+\infty)$.

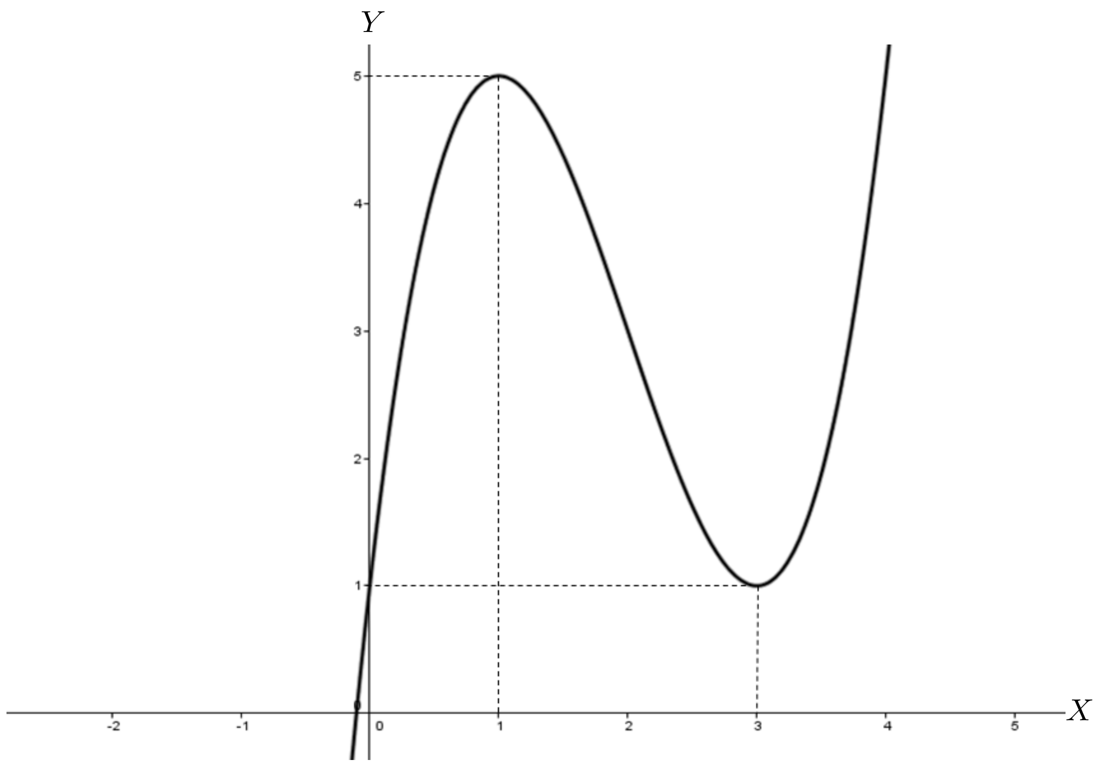
Si $x<1 \Longrightarrow f'(x)>0, \quad \therefore f$ es creciente en $(-\infty,1)$.

Si $1<x<3 \Longrightarrow f'(x)<0, \quad \therefore f$ es decreciente en $(1,3)$.

$\therefore$ en $x=1$ hay un máximo y es $f(1)=5$.

Si $x>3 \Longrightarrow f'(x)>0, \quad \therefore f$ es creciente en $(3,+\infty)$.

$\therefore$ en $x=3$ hay un mínimo y es $f(3)=1$.



FIN .... FIN

3. Sea $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{si } x<3 \\ 8-x, & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$. Determinar extremos e intervalos de monotonía.

Solución.

a) f es continua $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$b)$ $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 3 \\ -1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$, ya que $f'_+(3) = -1$; $f'_-(3) = 6$, $\therefore f'(3) \nexists$.

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x = 0$; $x = 0$, luego los puntos críticos son $x = 0$; $x = 3$.

$c)$ Intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$; $(0, 3)$; $(3, +\infty)$.

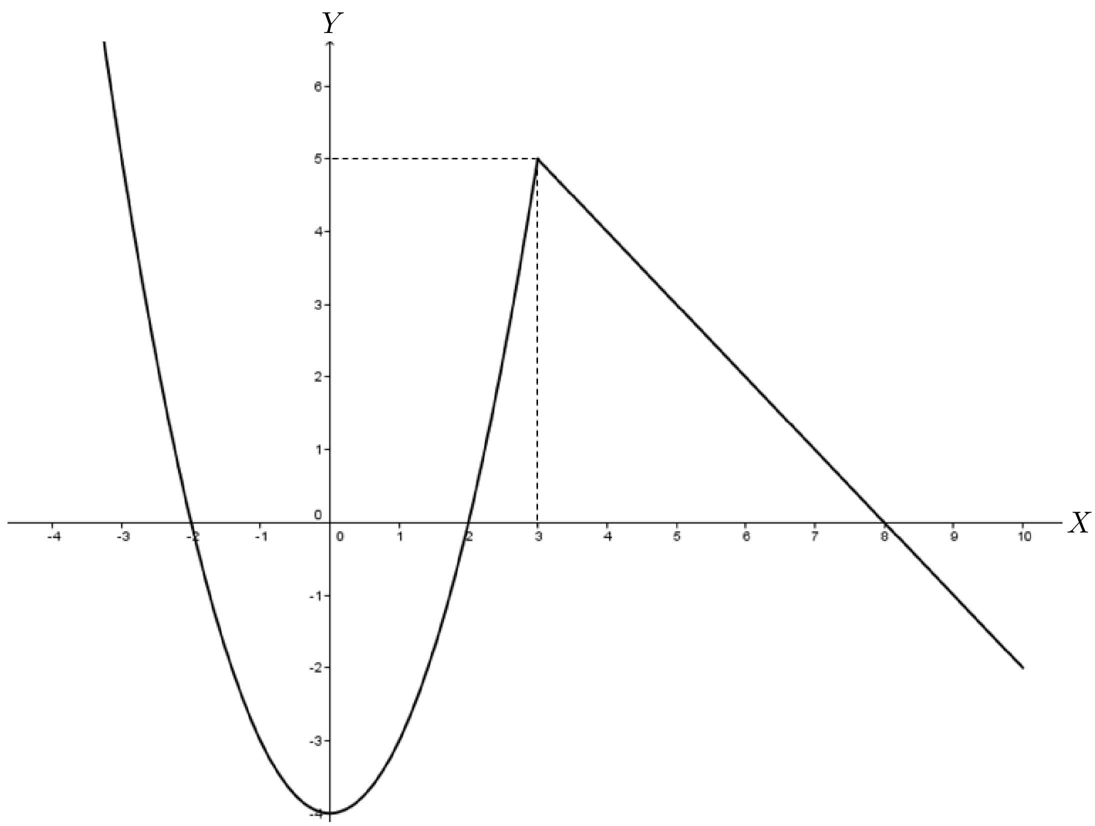
Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 3 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(0, 3)$.

$\therefore$ en $x = 0$ hay un mínimo que es $f(0) = -4$.

Si $x > 3 \Longrightarrow f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(3, +\infty)$.

$\therefore$ en $x = 3$ hay un máximo que es $f(3) = 5$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 - |x+3|, & \text{si } -8 \leq x < 0 \\ \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{23}{3}, & \text{si } 5 < x < 7 \end{cases}$

Determinar extremos e intervalos de monotonía.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x+7, & \text{si } -8 \leq x < -3 \\ 1-x, & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{23}{3}, & \text{si } 5 < x < 7 \end{cases}$$

a) $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -8 < x < -3 \\ -1, & \text{si } -3 < x < 0 \\ x^2 - 4x + 3, & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 0, & \text{si } 5 < x < 7 \end{cases}$

ya que: $f'_-(-3) = 1$; $f'_+(-3) = -1$, $\therefore f'(-3) \nexists$.

$f'_-(0) = -1$; $f'_+(0) = 3$, $\therefore f'(0) \nexists$.

$f'_-(5) = 8$; $f'_+(5) = 0$, $\therefore f'(5) \nexists$.

b) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 3,\ x = 1.$

$f'(x) = 0,\ \forall\ x \in (5,7).$

$f'(x) \nexists$ en $x = -3$, $x = 0$, $x = 5$.

$\therefore$ puntos críticos: $x = -3$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 3$; $x \in [5,7)$.

c) Intervalos de monotonía.

$(-8,-3)$; $(-3,0)$; $(0,1)$; $(1,3)$; $(3,5)$; $(5,7)$.

Si $-8 < x < -3 \Longrightarrow f'(x) > 0$, $\therefore f$ es creciente en $(-8,-3)$.

Si $-3 < x < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$, $\therefore f$ es decreciente en $(-3,0)$.

$\therefore$ en $x = -3$ hay un punto máximo y es $f(-3) = 4$.

Si $0 < x < 1 \Longrightarrow f'(x) > 0, \quad \therefore f$ es creciente en $(0, 1)$.

$\therefore$ en $x = 0$ hay un mínimo y es $f(0) = 1$.

Si $1 < x < 3 \Longrightarrow f'(x) < 0, \quad \therefore f$ es decreciente en $(1, 3)$.

$\therefore$ en $x = 1$ hay un máximo y es $f(1) = \dfrac{7}{3} =$.

Si $3 < x < 5 \Longrightarrow f'(x) > 0, \quad \therefore f$ es creciente en $(3, 5)$.

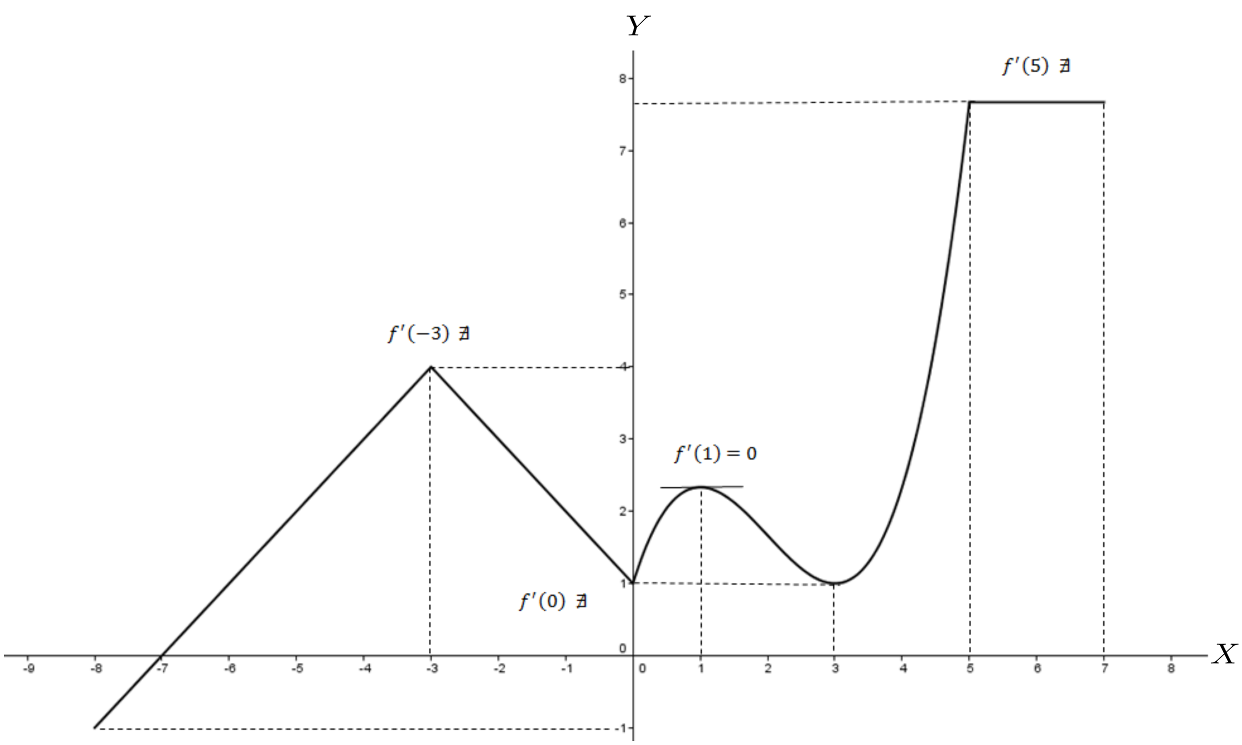
$\therefore$ en $x = 3$ hay un mínimo y es $f(3) = 1$.

Si $5 < x < 7 \Longrightarrow f'(x) = 0, \Longrightarrow f(x) = \dfrac{23}{3}, \forall\, x \in (5, 7)$.

d) Además $f(-8) = -1, \quad f(5) = \dfrac{23}{3} = 7, \overline{6}$.

e) El máximo absoluto es $f(x) = \dfrac{23}{3}, \forall\, x \in [5, 7)$ y el mínimo absoluto es $f(-8) = -1$.

Los otros máximos y/o mínimos son relativos.



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Criterio de la Segunda Derivada para Máximos y Mínimos

Teorema 87. *Sea c un punto crítico de f en el cual $f'(c) = 0$ y f'' existe en algún intervalo abierto que contenga a c, entonces:*

a) Si $f''(c) < 0$, f tiene un máximo en c (relativo).

b) Si $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo en c (relativo).

Observación 88. *Si $f''(c) = 0$, así como $f'(c) = 0$, nada puede decirse de extremos en c.*

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x^4$. Determinar valores extremos, si es que existen.

   Solución.

   $\left.\begin{array}{ll} f'(x) = 4x^3 & \Longrightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) = 12x^2 & \Longrightarrow f''(0) = 0 \end{array}\right\}$ $\therefore$ nada puede decirse, utilizando el criterio de la segunda derivada.

   En cambio, aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene:

   $\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x \in (-\infty, 0) & \Longrightarrow f'(x) < 0 \\ \text{Si } x \in (0, +\infty) & \Longrightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\}$ $\therefore$ en $x = 0$ hay un mínimo que es $f(0) = 0$.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $h(x) = x^3$. Determinar valores extremos, si es que existen.

   Solución.

   $\left.\begin{array}{ll} h'(x) = 3x^2 & \Longrightarrow h'(0) = 0 \\ h''(x) = 6x & \Longrightarrow h''(0) = 0 \end{array}\right\}$ $\therefore$ nada puede decirse, utilizando el criterio de la segunda derivada.

   En cambio, aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene:

   $\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x \in (-\infty, 0) & \Longrightarrow h'(x) > 0 \\ \text{Si } x \in (0, +\infty) & \Longrightarrow h'(x) > 0 \end{array}\right\}$ $\therefore$ no hay valores extremos.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$. Hallar máximos y/o mínimo absoluto y relativo en $[-2, 2]$.

Solución.

$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 + x - 2) = 0$

$\Longrightarrow 4x(x + 2)(x - 1) = 0$, puntos críticos $x = 0$; $x = -2$; $x = 1$.

Aplicando el criterio de la segunda derivada, se tiene:

$f'(x) = 12x^2 + 8x - 8$.

$f''(-2) = 24 > 0$, $\therefore$ en $x = -2$ hay un mínimo que vale $f(-2) = -\dfrac{32}{3}$.

$f''(0) = -8 < 0$, $\therefore$ en $x = 0$ hay un máximo que vale $f(0) = 0$.

$f''(1) = 12 > 0$, $\therefore$ en $x = 2$ hay un mínimo que vale $f(0) = -\dfrac{5}{3}$.

Además $f(2) = \dfrac{32}{3}$.

$\therefore$ valor máximo absoluto $= f(2) = \dfrac{32}{3}$.

valor mínimo absoluto $= f(-2) = -\dfrac{32}{3}$.

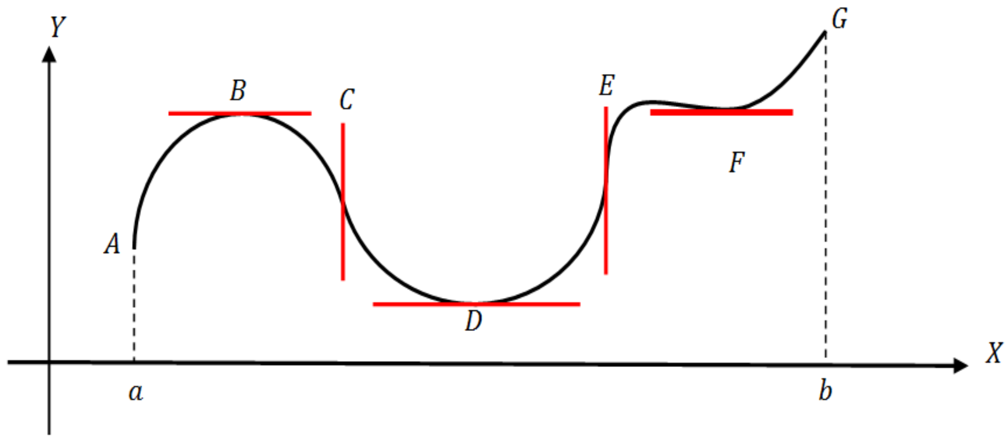
valor máximo relativo $= f(0) = 0$.

valor mínimo relativo $= f(1) = -\dfrac{5}{3}$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Concavidad y Puntos de Inflexión

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que f' y f'' existen en (a, b).



Si un punto se mueve sobre la curva desde A hasta G, entonces

a) Desde A hasta B, la pendiente de la tangente es positiva, luego f es creciente, la gráfica permanece bajo la tangente.

b) En B, la pendiente de la tangente es cero.

c) Desde B hasta C, la pendiente de la tangente es negativa, luego f es decreciente, la gráfica permanece bajo la tangente.

d) Desde A hasta C, se dice que la gráfica es cóncava hacia abajo.

e) Desde C hasta D, la pendiente de la tangente es negativa, luego f es decreciente, la gráfica permanece sobre la tangente.

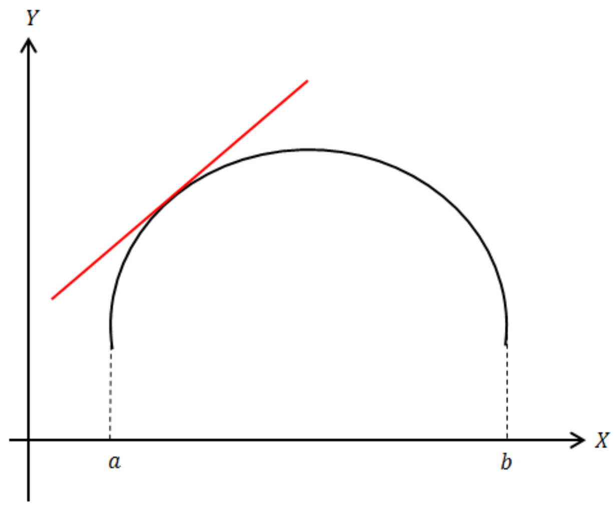
f) En D, la pendiente es cero.

g) Desde D hasta E, la pendiente de la tangente es positiva, luego f es creciente, la gráfica permanece sobre la tangente.

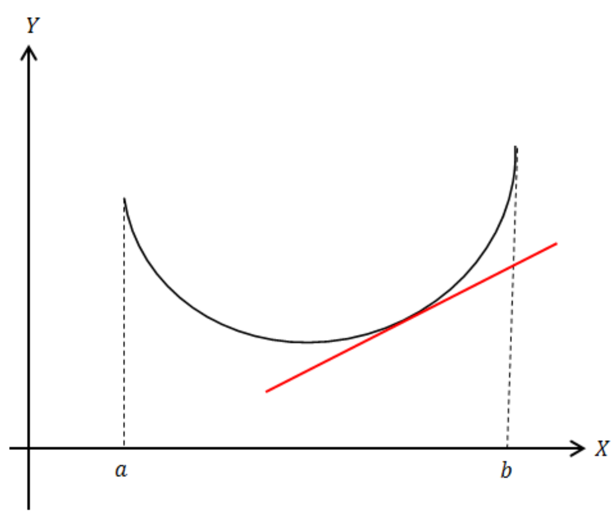
h) Desde C hasta E se dice que la gráfica es cóncava hacia arriba.

i) En el punto C la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Luego C se llama **Punto de Inflexión**.

Definición 89. *Se dice que la curva es cóncava hacia abajo en* (a, b)*, si todos los puntos de la curva están debajo de cualquier tangente a la curva en el intervalo. ,*



Definición 90. *Se dice que la curva es cóncava hacia arriba en* (a, b)*, si todos los puntos de la curva están arriba de cualquier tangente a la curva en el intervalo.*



Definición 91. *Los puntos en los cuales la curva cambia su concavidad, se llaman puntos de inflexión.*

Teorema 92. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que f' y f'' existen en (a, b) que contiene a c entonces:*

1. *Si $f''(c) > 0$ en $(a, b) \Longrightarrow f$ es cóncava hacia arriba.*
2. *Si $f''(c) < 0$ en $(a, b) \Longrightarrow f$ es cóncava hacia abajo.*

Definición 93. *Se dice que la función derivable f tiene un punto de inflexión en c, si y sólo si existen dos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ tales que f sea cóncava hacia abajo en uno de ellos y cóncava hacia arriba en el otro.*

Teorema 94. *Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión entonces $f''(c) = 0$. Por lo tanto, en todos aquellos puntos donde f'' se anula pueden existir puntos de inflexión.*

Observación 95. *El recíproco de este teorema no es cierto, es decir, $f''(c) = 0$ no implica necesariamente que en $(c, f(c))$ haya un punto de inflexión.*

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x^4$. Determinar, si existen, puntos de inflexión.

   Solución.

   $f'(x) = 4x^3$.

   $f''(x) = 12x^2 = 0$; $x = 0$ posible punto de inflexión, pero $x < 0 \Longrightarrow f''(x) > 0$ y $x > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0$ $\therefore$ en $x = 0$ no hay punto de inflexión.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Analizar y graficar determinando intersecciones con los ejes, máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

   A) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-9}}$, $dom f = (9, +\infty)$.

      Solución.

      a) Intersecciones con los ejes

         Si $x = 0 \Longrightarrow y \notin \mathbb{R}$.

         Si $y = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin (9, +\infty)$.

         $\therefore$ no hay intersecciones.

b) $y' = \dfrac{\sqrt{x-9} - \dfrac{x}{2\sqrt{x-9}}}{x-9} = \dfrac{2(x-9)-x}{2(x-9)^{3/2}} = \dfrac{x-18}{2\sqrt{(x-9)^3}}$

$y' = 0 \Longrightarrow x = 18, \quad y' \quad \nexists \Longrightarrow x = 9 \notin (9, +\infty).$

$\therefore$ punto crítico: $x = 18$.

$$y'' = \frac{2(x-9)^{3/2} - (x-18)\cdot 3(x-9)^{1/2}}{4(x-9)^3} = \frac{(x-9)^{1/2}(2(x-9)-3(x-18))}{4(x-3)^3}$$

$$= \frac{-x+36}{4(x-9)^{5/2}}.$$

Posible punto de inflexión $x = 36$.

c) Intervalos de monotonía y concavidad: $(9, 18), \quad (18, 36), \quad (36, +\infty)$.

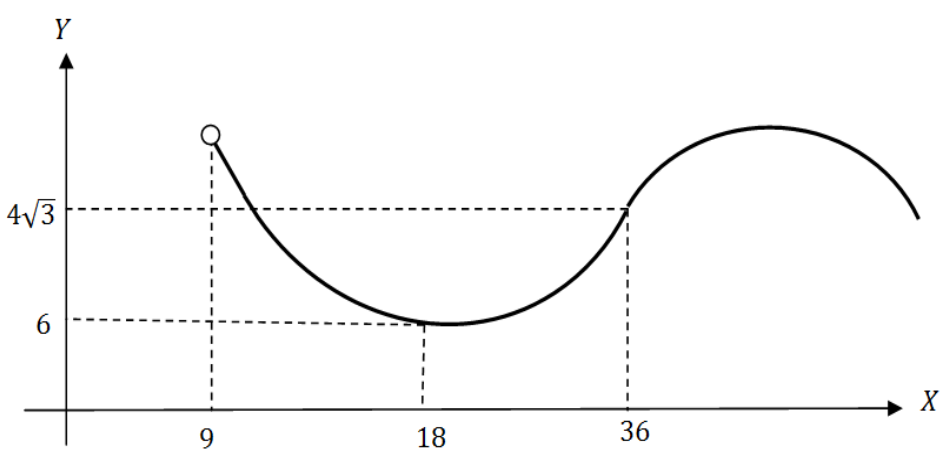
Si $9 < x < 18 \Longrightarrow f'(x) < 0; \quad f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba en $(9, 18)$.

Si $18 < x < 36 \Longrightarrow f'(x) > 0; \quad f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente y cóncava hacia arriba en $(18, 36)$.

$\therefore$ en $x = 18$ hay un mínimo y es $f(18) = 6$.

Si $x > 36 \Longrightarrow f'(x) > 0; \quad f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $(36, +\infty)$.

$\therefore$ en $x = 36$ hay un punto de inflexión que es $\left(36, 4\sqrt{3}\right)$.



FIN .... FIN

B) $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}$.

Solución.

a) Intersecciones con los ejes:

Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$

Si $y = 0 \Longrightarrow 5x^{2/3} - x^{5/3} = 0 \Longrightarrow x^{2/3}(5 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 5.$

Intersecciones: $(0, 0)$ y $(5, 0)$.

b) $y' = \dfrac{10}{3}x^{-1/3} - \dfrac{5}{3}x^{2/3} = \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{x^{1/3}} - x^{2/3}\right) = \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x}}\right)$

$y' = 0$ en $x = 2$, $y' \nexists$ en $x = 0$.

$y'' = -\dfrac{10}{9}x^{-4/3} - \dfrac{10}{9}x^{-1/3} = -\dfrac{10}{9}\left(\dfrac{1}{x^{4/3}} + \dfrac{1}{x^{1/3}}\right) = -\dfrac{10}{9} \cdot \dfrac{1+x}{x^{4/3}}.$

Posibles Puntos de inflexión $x = -1$ y $x = 0$.

c) Intervalos de monotonía y concavidad:

$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2), \quad (2, +\infty).$

Si $x < -1 \Longrightarrow f'(x) < 0; \quad f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$.

Si $-1 < x < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0; \quad f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $(-1, 0)$.

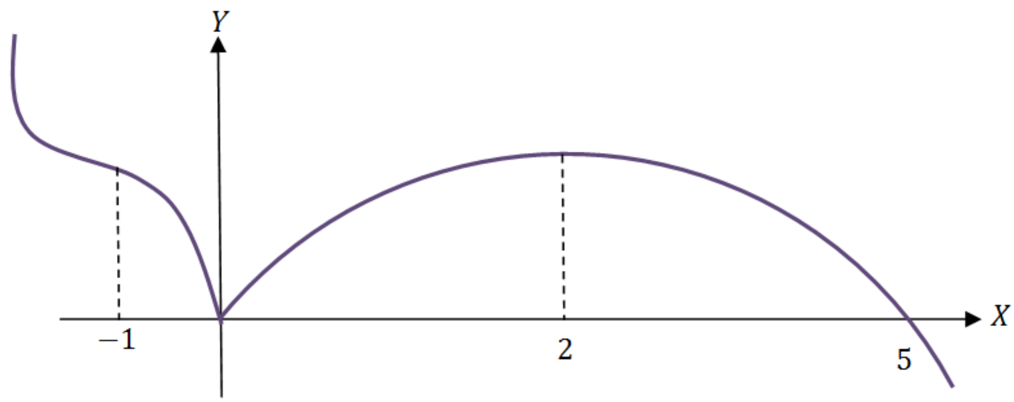
$\therefore x = -1$ hay un punto de inflexión que es $(-1, 6)$.

Si $0 < x < 2 \Longrightarrow f'(x) > 0; \quad f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es creciente y cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

$\therefore x = 0$ hay un mínimo y el valor mínimo es $f(0) = 0$.

Si $x > 2 \Longrightarrow f'(x) < 0; \quad f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

$\therefore x = 2$ hay un máximo y el valor máximo es $f(2) = 3\sqrt[3]{4} \approx 4,8$.



FIN .... FIN

3. Analizar y graficar determinando intersecciones con los ejes, simetría, asíntotas, valores extremos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad.

   A) $y = x^4 - 8x^2$

   Solución.

   a) Intersecciones.

   Si $x = 0, \quad y = 0.$

   Si $y = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{2}.$

   $\therefore$ intersecciones con los ejes son $(0,0), \quad (2\sqrt{2}, 0) \quad$ y $\quad (-2\sqrt{2}, 0).$

   b) La curva es simétrica con respecto al eje Y, ya que ella es par.

   c) Asíntotas no hay, por ser función polinómica.

   d) $f(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4).$

   Posibles máximos y mínimos $\quad x = 0, \quad x = \pm 2.$

   $f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4)$

   Posibles puntos de inflexión $\quad x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1,2.$

   e) Intervalos de monotonía y concavidad:

   $(-\infty, -2); \quad \left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right); \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 0\right); \quad \left(0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right); \quad \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 2\right); (2, +\infty).$

   Como es una función par, sólo se analizarán los intervalos a la derecha del eje

Y.

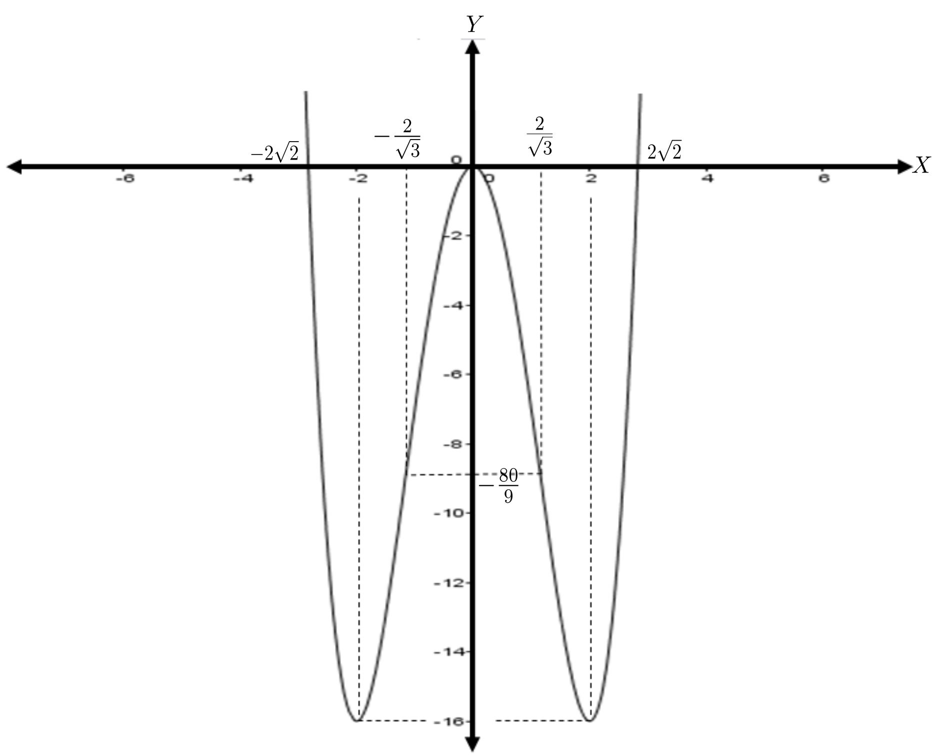
Si $0 < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow f'(x) < 0$; $\;f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $\left(0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Si $\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < 2 \Longrightarrow f'(x) < 0$; $\;f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$.

$\therefore$ hay un punto de inflexión ue es $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{80}{9}\right)$.

Si $x > 2 \Longrightarrow f'(x) > 0$; $\;f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$.

$\therefore$ en $x = 2$ hay un mínimo y es $f(2) = -16$. Considerando que es una función par, el gráfico es:



de donde se concluye que en $x = 0$ hay un máximo que es $f(0) = 0$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

B) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}, & \text{si } x < -1 \\ f_2(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & \text{si } x > -1 \end{cases}.$

Solución.

a) Intersecciones:

Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$.

Si $y = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = 0 \Longrightarrow x \notin \mathbb{R}$.

$\therefore$ $(0, 0)$ única intersección.

b) Simetría:

I) Sea $f_1(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$, pero $\quad f_1(-x) \neq f_1(x) \Longrightarrow f_1$ no es par.

Sea $f_2(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$, siendo $f_2(-x) = f_2(x)$, $\;\forall\, x \in \mathbb{R}$, pero $f_2(-x) \neq f_2(x)$, $\forall\, x > 1 \Longrightarrow f_2$ no es par $\forall\, x > -1$.

$\therefore$ f no es simétrica con respecto al eje Y.

II) Sea $f_1(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$, pero $\quad f_1(-x) \neq -f_1(x) \Longrightarrow f_1$ no es impar.

Sea $f_2(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$, pero $f_2(-x) \neq f_2(x) \Longrightarrow f_2$ no es impar.

c) Asíntotas:

I) $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = -\infty.$

$\therefore$ $x = -1$ es asíntota vertical.

II) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1 + \dfrac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x} = 1 = m.$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 2}{x + 1} = 1 = b.$

$\therefore$ $y = x + 1$ es asíntota oblicua izquierda.

III) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^3 + x} = 0 = m.$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2 + 1} - 0 \right) = 2 = b.$

$\therefore$ $y = 2$ es asíntota horizontal.

d) $f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}, & \text{si } x < -1 \\ \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & \text{si } x > -1 \end{cases}.$

$f_1'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2,\ x = 0.$ Pero $x = 0 \notin (-\infty, -1)$

$f_2'(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \in (-1, +\infty).$

Puntos críticos: $x = 0, \quad x = -2.$

$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3}, & \text{si } x < -1 \\ \\ \dfrac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}, & \text{si } x > -1 \end{cases}.$

$f_1''(x) = 0 \Longrightarrow$ no existe tal x.

$f_2''(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, +\infty).$

$\therefore$ posibles puntos de inflexión en $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

e) Intervalos de monotonía y concavidad:

$(-\infty, -2); \quad (-2, -1); \quad \left(-1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right); \quad \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

	$-\infty$ a -2	-2 a -1	-1 a $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ a 0	0 a $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ a $+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	−	+	+
$f''(x)$	−	−	−	+	+	−

Luego:

1) En $(-\infty, -2)$ f es creciente y cóncava hacia abajo.
2) En $(-2, -1)$ f es decreciente y cóncava hacia abajo. $\therefore$ en $x = -2$ hay un máximo que vale $f(-2) = -2$.

3) En $\left(-1,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ f es decreciente y cóncava hacia abajo.

4) En $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ f es decreciente y cóncava hacia arriba.

$\therefore$ en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay un punto de inflexión que es $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$

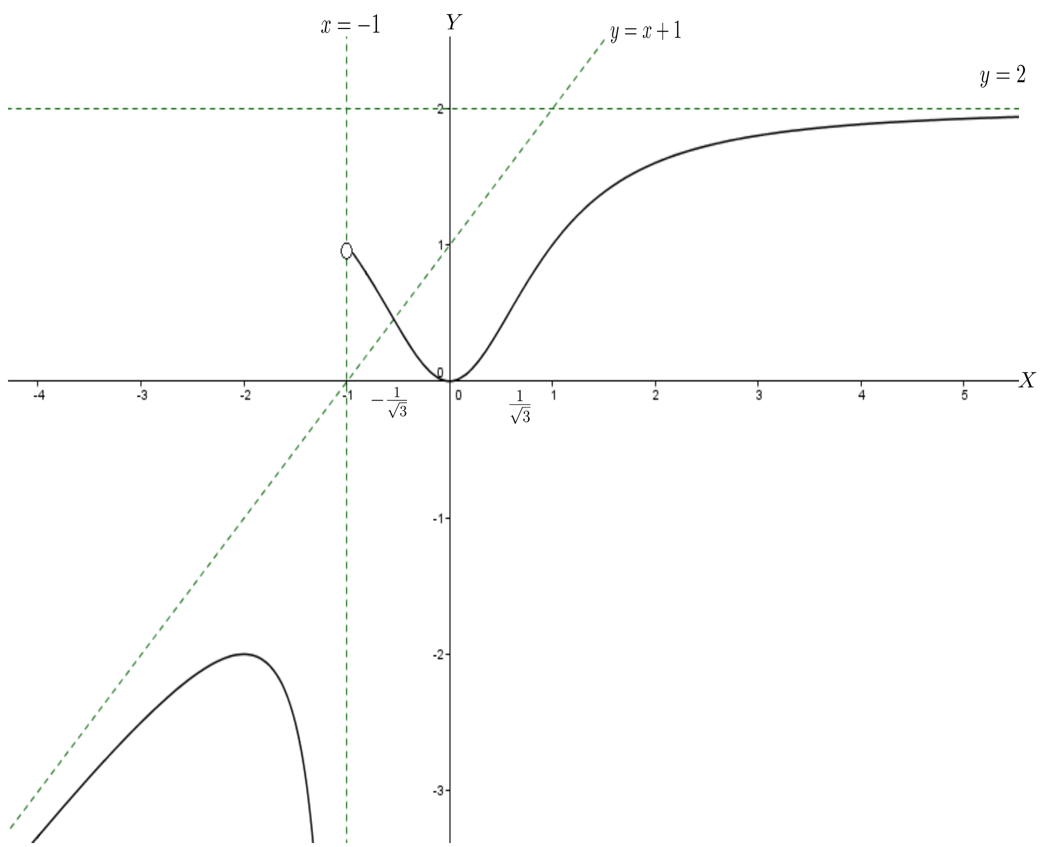
5) En $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ f es creciente y cóncava hacia arriba.

$\therefore$ en $x=0$ hay un mínimo que vale $f(0)=0$.

6) En $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ f es creciente y cóncava hacia abajo.

$\therefore$ en $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay un punto de inflexión que es $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$

f) Gráfico.



FIN .... FIN

5.6. Ejercicios Propuestos

1. Analizar y graficar, determinando intersecciones con los ejes, simetría, asíntotas, valores extremos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad.

   a) $f(x) = x\sqrt[3]{x-4}$.

   b) $f(x) = \dfrac{x(x-5)^{2/3}}{\sqrt[3]{4}}$.

   c) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

   d) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

   e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

   f) $f(x) = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

   g) $f(x) = \dfrac{(x^2+3)}{\sqrt{x^2+1}}$.

   h) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determinar a, b, c y d para que f tenga un extremo relativo en $(0, 3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

      Resp.: $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$, $d = 3$.

5.7. Problemas de Aplicación de Máximos y Mínimos

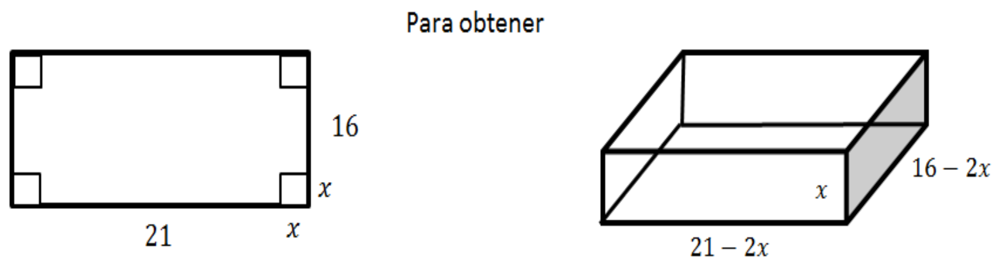
Una de las aplicaciones importantes de Cálculo es obtener el diseño óptimo de un producto. Por ejemplo, el problema de minimizar costos o maximar el volumen de un objeto, se reduce a determinar mínimos o máximos de funciones, en cuyo caso se utilizan los criterios de la primera o segunda derivada. La única diferencia con lo tratado anteriormente es cómo traducir un problema al lenguaje de funciones.

Ejemplos

1. Una lámina de 16 cm de ancho por 21 cm de largo va a utilizarse para hacer una caja rectangular abierta, cortando un cuadrado de cada esquina de la lámina y doblando los lados hacia arriba. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados

para producir una caja de volumen máximo?.

Solución.



Se sabe que $V_{caja} = (21 - 2x)(16 - 2x)x = 336x - 74x^2 + 4x^3$.

Luego la función a maximizar es V, es decir, $V = V(x)$.

$\therefore V'(x) = 336 - 148x + 12x^2$.

$V'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 37x + 84 = 0 \Longrightarrow (3x - 28)(x - 3) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{28}{3}, \quad x = 3$. (puntos críticos).

$V''(x) = -148 + 24x$

según criterio segunda derivada se tiene:

$V''\left(\dfrac{28}{3}\right) > 0 \Longrightarrow$ que en $x = \dfrac{28}{3}$ hay un mínimo.

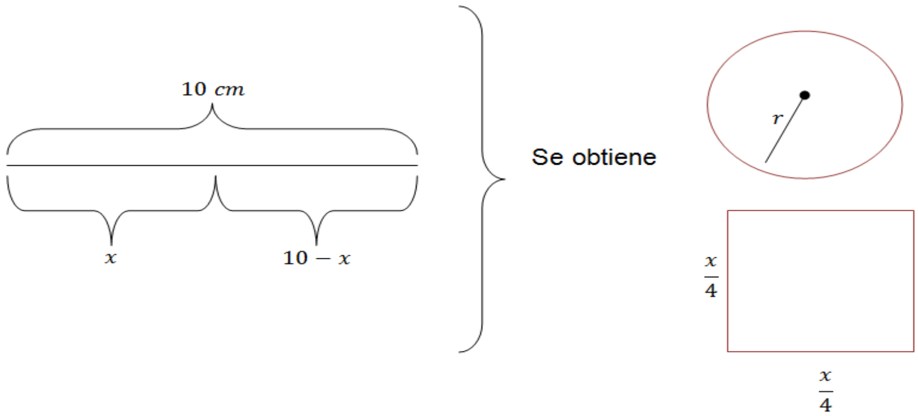
$V''(3) < 0 \Longrightarrow$ que en $x = 3$ hay un máximo.

$\therefore$ el cuadrado cortado debe medir 3 cm por lado.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Un trozo de alambre de 10 cm. de largo se corta en dos partes. Con una parte se forma una circunferencia y con la otra un cuadrado. Determinar el radio de la circunferencia y el lado del cuadrado, de tal manera que la suma de sus áreas sea mínima.

Solución.



$$\text{Perímetro}_{\odot} = 2\pi r = 10 - x \Longrightarrow r = \frac{10-x}{2\pi}.$$

$$A = A_1 + A_2 = \pi r^2 + \frac{x^2}{16} = \pi\frac{(10-x)^2}{4\pi^2} + \frac{x^2}{16}$$

$\therefore$ la función a minimizar es $A = A(x)$.

$$A'(x) = -\frac{2}{4\pi}(10-x) + \frac{x}{8} = \frac{-40+4x+\pi x}{8\pi} = 0$$

$$\Longrightarrow x(4+\pi) = 40 \Longrightarrow x = \frac{40}{4+\pi}.$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada, se tiene:

$$A''(x) = \frac{4+\pi}{8\pi} > 0 \qquad \text{en } x = \frac{40}{4+\pi} \text{ hay un mínimo.}$$

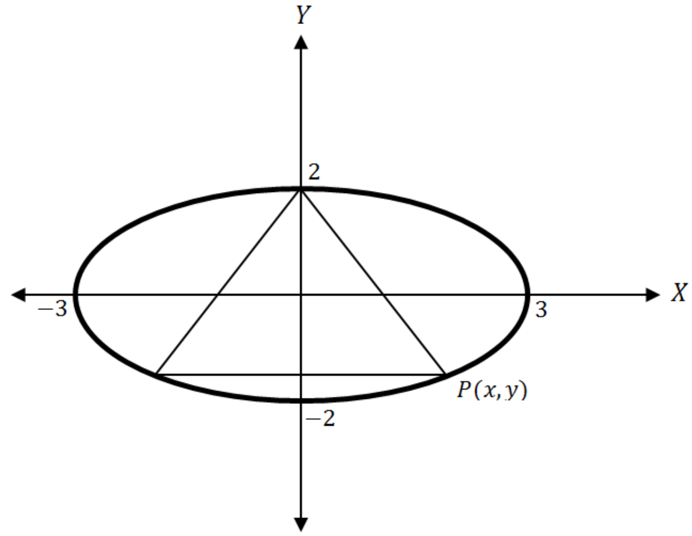
$$\therefore r = \frac{10 - \dfrac{40}{4+\pi}}{2\pi} = \frac{40+10\pi-40}{2\pi(4+\pi)} = \frac{5}{4+\pi} \text{ (radio de la circunferencia)}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{\dfrac{40}{4+\pi}}{4} = \frac{10}{4+\pi} \text{ (lado del cuadrado).}$$

FIN .... FIN

3. En la curva $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$ se inscribe un triángulo isósceles cuyo vértice es $(0,2)$. Hallar la ecuación de la base correspondiente al triángulo de área máxima.

Solución.



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Longrightarrow x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}.$$

$$A_{\triangle} = \frac{2x \cdot (2 - y)}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}(2 - y)$$

$\therefore$ la función a maximizar es $A = A(y)$

$$A'(y) = \frac{3}{2}\left[-\sqrt{4 - y^2} + (2 - y)\frac{-2y}{2\sqrt{4 - y^2}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{-4 + y^2 - 2y + y^2}{\sqrt{4 - y^2}}\right] = \frac{3}{2}\frac{2y^2 - 2y - 4}{\sqrt{4 - y^2}} = \frac{3(y^2 - y - 2)}{\sqrt{4 - y^2}}.$$

$A'(y) = 0 \Longrightarrow y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1) = 0 \Longrightarrow y = 2,\ y = -1$ (puntos críticos).

En este problema se analiza sólo $y = -1$ ya que para $y = 2$, $A = 0$.

Aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene: $A'(-1, 5) > 0$ y $A'(0) < 0$.

$\therefore$ para $y = -1$ hay un máximo.

$\therefore$ la ecuación de la base del triángulo de área máxima es $y = -1$.

FIN .... FIN

5.8. Ejercicios Propuestos

1. Determinar dos números positivos tales que su suma sea igual a 60 y su producto sea el mayor posible.

   Resp.: 30 y 30.

2. Un trapecio isósceles tiene los lados igual a la base menor que mide 10, ¿Cuánto debe medir la base mayor para que su área sea máxima?.

   Resp.: 20

3. Se dispone de 100 m de alambre para cerrar tres lados de un terreno rectangular, cuyo cuarto lado está cubierto por un edificio. ¿ Cúales son las dimensiones del terreno para que el área encerrada sea máxima?.

   Resp.: 25, 50 y 25.

4. Un granjero quiere construir un corral rectangular y dividirlo por una valla paralela a uno de sus lados. Dispone de 240 m de valla. Determinar las dimensiones del corral de área máxima que puede construir.

   Resp.: 40 y 60.

5. Una recta pasa por $M(a, b)$ perteneciente al primer cuadrante y forma con los ejes coordenados un triángulo rectángulo. ¿ Cuántos deben medir los catetos para que el área del triángulo sea mínima?.

   Resp.: $2a$ y $2b$.

6. Hallar la mínima distancia del punto $(4, 2)$ a la parábola $y = x^2$.

   Resp.: $2\sqrt{2}$.

Pruebas de años anteriores

Prueba $n°1$ año 2009

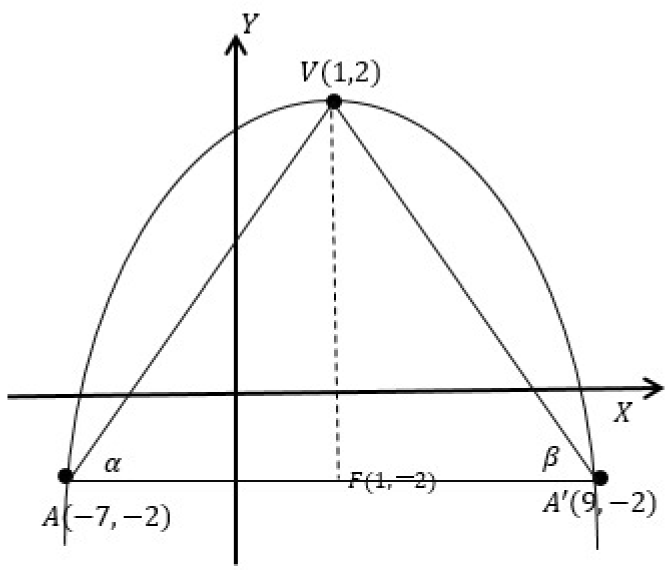
1. $C : x^2 - 2x + 16y - 31 = 0$ y AVA' el triángulo formado por el lado recto de la curva dada y los segmentos obtenidos al unir el vértice de ella con cada extremo del lado recto. Demostrar que los ángulos interiores del triángulo, correspondientes al lado recto, son iguales.

   Solución.

   $x^2 - 2x + 16y - 31 = 0$

   $x^2 - 2x + 1 = -16y + 31 + 1 = -16y + 32$

   $(x-1)^2 = -16(y-2)$



   $4p = -16 \quad p = -4 \Longrightarrow F(1,-2)$

   $|\overline{AA'}| = 16 \Rightarrow \quad A'(9,-2)$ y $A(-7,-2)$

   $m_{\overline{AV}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \quad m_{\overline{AA'}} = 0 \; m_{\overline{A'V}} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$

   $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\frac{1}{2} - 0}{1+0} = \dfrac{1}{2} \quad \operatorname{tg}\beta = \dfrac{0 - (-\frac{1}{2})}{1+0} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = \beta$

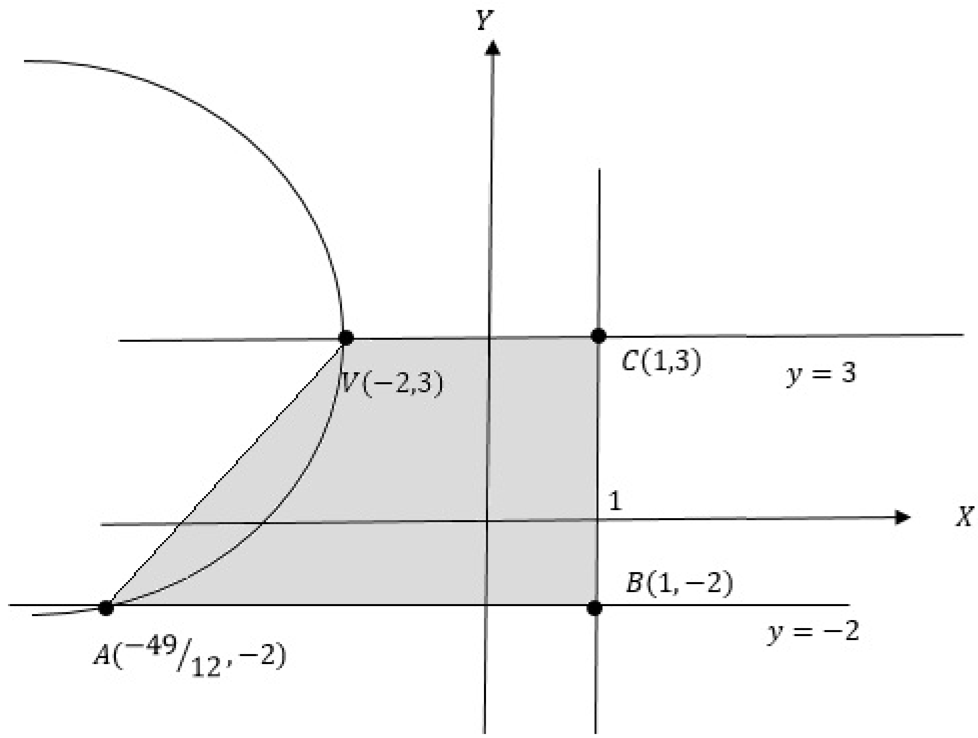
   FIN .... FIN

2. Sea $C : y^2+12x-6y+33=0$. Determinar el área de la región encerrada por la cuerda que une al vértice de C con el punto de intersección de C con $y=-2$, el eje focal de C, la directriz de C y $y=-2$

Solución.

$y^2+12x-6y+33=0$

$y^2-6y+9=-12x-33+9=0 \quad (y-3)^2=-12x-24=-12(x+2)$



Si $y=-2 \Longrightarrow 4+12x+12+33=0 \Longrightarrow x=-\dfrac{49}{12} \Longrightarrow A(-\frac{49}{12},-2)$

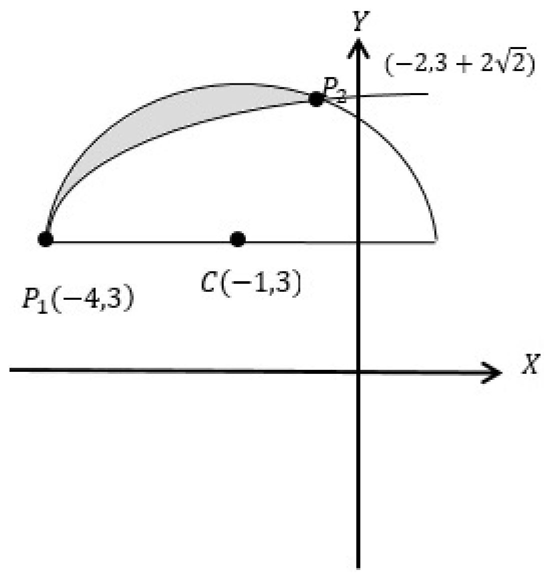
$4p=-12 \Longrightarrow p=-3 \Longrightarrow \quad directriz : x=1$

$A=\dfrac{|\overline{AB}|+|\overline{VC}|}{2}\cdot|\overline{BC}|=\dfrac{1+\frac{49}{12}+1+2}{2}(3+2)=\dfrac{97}{24}\cdot 5=\dfrac{485}{24} \;\; u.a$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Identificar y gráficar $y = 3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x}$, $y = 3 + 2\sqrt{x + 4}$. Determinar sus puntos de intersección y achurar la región que ellas encierran.

Solución.



$y = 3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x} \Longrightarrow (y - 3)^2 = 8 - x^2 - 2x \Longrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y - 3)^2 = 9 \Longrightarrow$
$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$
$\therefore y = 3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x}$ es la mitad de una circunferencia.
$y = 3 + 2\sqrt{x + 4} \Longrightarrow (y - 3)^2 = 4(x + 4)$
$\therefore y = 3 + 2\sqrt{x + 4}$ es la mitad de una parábola.
Puntos de intersección:

$3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x} = 3 + 2\sqrt{x + 4}$
$8 - x^2 - 2x = 4x + 16$
$x^2 + 6x + 8 = 0 \Longrightarrow (x + 4)(x + 2) = 0 \Longrightarrow$
$x = -4 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow P_1(-4, 3)$
$x = -2 \Longrightarrow y = 3 + 2\sqrt{2} \Longrightarrow P_2(-2, 3 + 2\sqrt{2})$

El punto P_1 y P_2 son puntos de intersección.
Las curvas dadas encierran la región achurada.
FIN .... FIN

4. Sea $C : 9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$. Determinar las ecuaciones de las asíntotas y achurar claramente la región limitada por ellas, la rama de C con $y \leqslant 0$ y la recta que contiene al lado recto de la misma rama.

Solución.

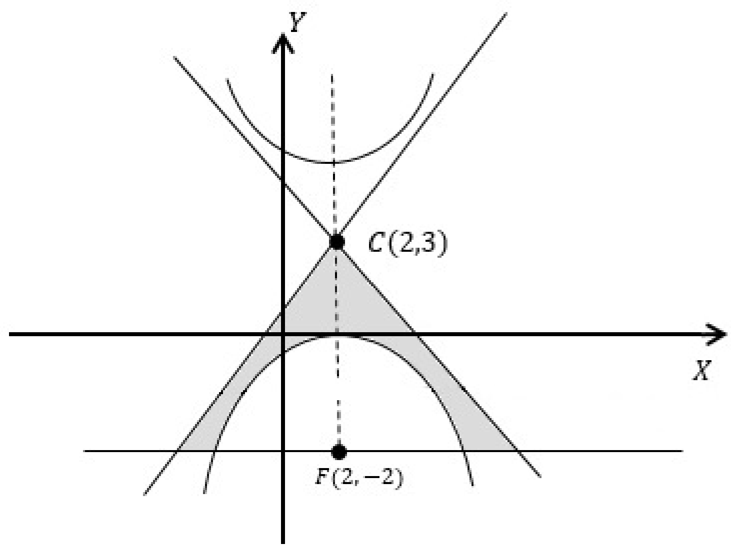
$9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y = -36$

$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = -36 + 36 - 144$

$9(x-2)^2 - 16(y-3)^2 = -144$

$\dfrac{(y-3)^2}{9} - \dfrac{(x-2)^2}{16} = 1$. De donde $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$ y $c^2 - a^2 = b^2 \Longrightarrow c^2 = 25 \Longrightarrow c = 5$



Ecuación asíntotas: $16(y-3)^2 - 9(x-2)^2 = 0$

$4(y-3) - 3(x-2) = 0 \Longrightarrow 3x - 4y + 6 = 0$

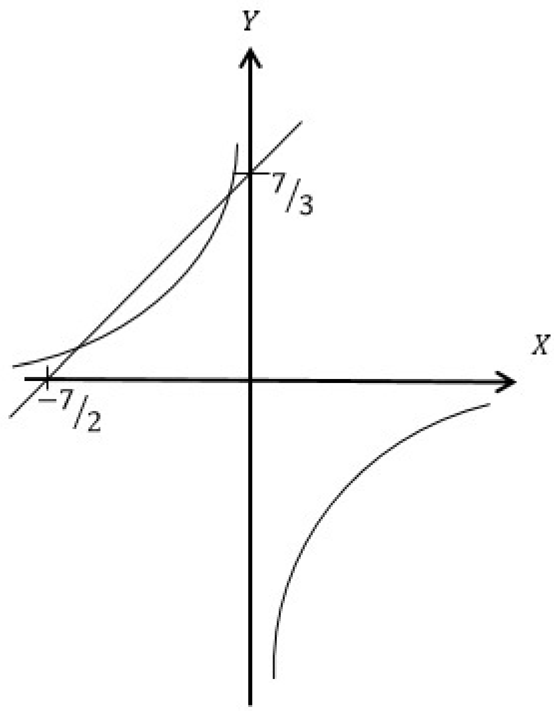
$4(y-3) + 3(x-2) = 0 \Longrightarrow 3x + 4y - 18 = 0$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°1$ año 2010

1. Determinar el área del triángulo formado por las asíntotas de $xy = -4$ y por la asíntota, de pendiente positiva, de $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 43 = 0$.

Solución.



$4(x^2 + 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) = -43 + 16 - 9 = -36$
$9(y-1)^2 - 4(x+2)^2 = 36$
$3(y-1) - 2(x+2) = 0$
$3(y-1) + 2(x+2) = 0$
$3y - 3 - 2x - 4 = 0 \Longrightarrow \boxed{2x - 3y + 7 = 0}$
$3y - 3 + 2x + 4 = 0 \Longrightarrow \boxed{2x + 3y + 1 = 0}$ $2x - 3y + 7 = 0$ es la asíntota de pendiente positiva.
Si $y = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{7}{2}$ Si $x = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{7}{3}$

$$\therefore \quad A_{\triangle} = \frac{|\frac{-7}{2}| \cdot \frac{7}{3}}{2} = \frac{49}{12} \;\; u.a.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

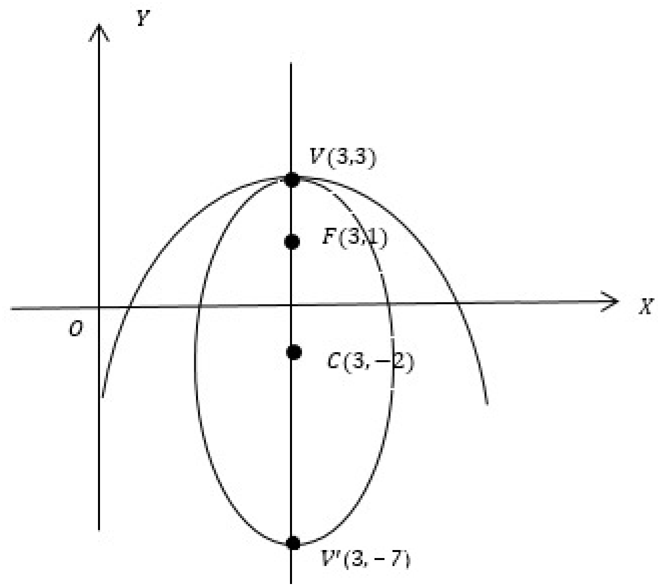
2. Determinar la ecuación de una elipse sabiendo que tiene su centro sobre $y = -2$, uno de sus vértices coincide con el de la curva $6x - 8y + 15 - x^2 = 0$ y uno de sus focos coincide con el foco de la curva dada.

Solución.

$x^2 - 6x + 9 = -8y + 15 + 9 = -8y + 24$

$(x - 3)^2 = -8(x - 3)$

$V(3, 3) \quad 4p = -8 \quad p = -2 \quad \therefore \quad F = (3, 1)$



$$\left.\begin{array}{r} 2a = 10 \Longrightarrow a = 5 \\ 2c = 6 \Longrightarrow c = 3 \end{array}\right\}. \; a^2 - c^2 = b^2 \Longrightarrow b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4 \quad C(3, -2)$$

$$\therefore Ec. \; \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

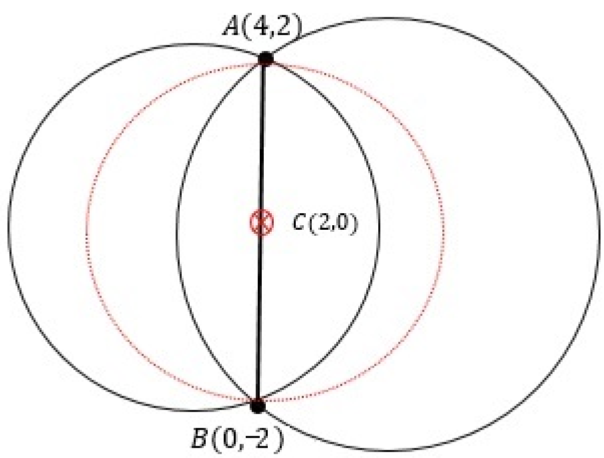
3. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de $C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ y tiene su centro sobre la cuerda común de C_1 y C_2.

Solución.

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \quad (2)$$

Restando (1) y (2)
$8x - 8y - 16 = 0 \quad x = y + 2$
Reemplazando en (2)
$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 6y - 12 + 2y = 0$

$$2y^2 = 8 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2 \Longrightarrow y = 2 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow A(4,2)$$
$$\Longrightarrow y = -2 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow B(0,-2)$$



El centro de la circunferenciar es punto medio entre A y B, es decir, $C(2,0)$ y el radio es $r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$$\therefore \; Ec. \; circunf : (x-2)^2 + y^2 = 8$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. En un mismo sistema de coordenadas graficar claramente: $y = 4$, $x = -2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = \sqrt{5 - x^2}$, achurando la región que ellas limitan.
Determinar los puntos de intersección correspondientes a la región.

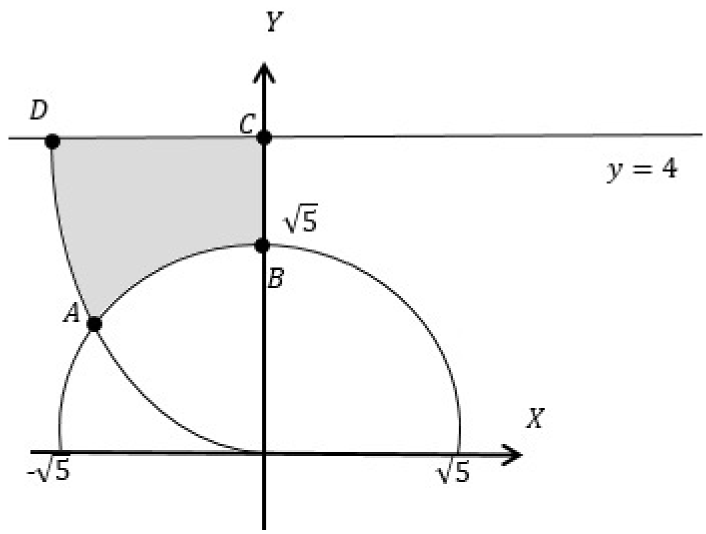
Solución.

$y = 4$

$x = -2\sqrt{y} \quad (x^2 = 4y)$

$x = 0$

$y = \sqrt{5 - x^2} \quad (x^2 + y^2 = 5)$



Para A:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 = 4y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow 4y + y^2 - 5 = 0 \Longrightarrow y^2 + 4y - 5 = 0 \Longrightarrow (y+5)(y-1) = 0$$

$y = 1 \Longrightarrow x = -2 \Longrightarrow A(-2, 1)$

Para B: $y = \sqrt{5 - x^2}$, $x = 0 \Longrightarrow B(0, \sqrt{5})$

Para C: $y = 4$, $x = 0 \Longrightarrow C(0, 4)$

Para D: $x = -2\sqrt{y}$, $y = 4 \Longrightarrow x = -4 \Longrightarrow D(-4, 4)$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

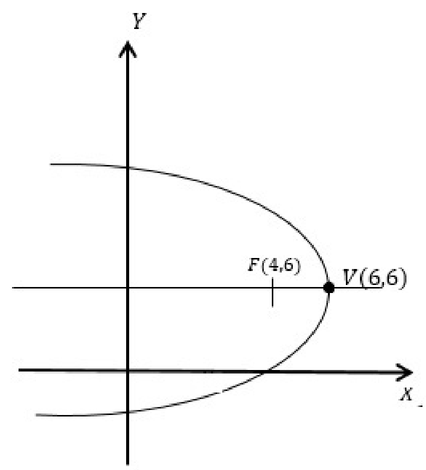
Prueba $n°1$ año 2011

1. Determinar la ecuación de la hipérbola, en la forma ordinaria, cuyas asíntotas son $2x + y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, su eje focal es paralelo al eje X y pasa por el foco de la curva $y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$.

   Solución.

   $y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$

   $y^2 - 12y + 36 = -8x + 12 + 36 = -8x + 48$
   $(y - 6)^2 = -8(x - 6)$



   $4p = -8 \Longrightarrow p = -2 \quad \therefore F(4, 6)$

$$
\begin{aligned}
(2x + y - 3)(2x - y - 1) &= k \\
4x^2 - 2xy - 2x + 2xy - y^2 - y - 6x + 3y + 3 &= k \\
4x^2 - 8x - y^2 + 2y + 3 &= k
\end{aligned}
$$

   $(4, 6) \in \ \ Hip: \ \ 64 - 32 - 36 + 12 + 3 = k \therefore k = 11$

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) = 11 - 3 + 4 - 1$$
$$4(x - 1)^2 - (y - 1)^2 = 11$$
$$\therefore \ \ \frac{(x - 1)^2}{\frac{11}{4}} - \frac{(y - 1)^2}{11} = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Dadas las ecuaciones $9x^2 + 2y^2 + 36x - 12y + 36 = 0$, $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 65 = 0$, $x = 4$. Identificarlas y graficarlas claramente en un mismo sistema de ejes coordenados, achurando la región que ellas encierrran.

Solución.

$9(x^2 + 4x + 4) + 2(y^2 - 6y + 9) = -36 + 36 + 18$

$\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$ *elipse* $C(-2, 3)$

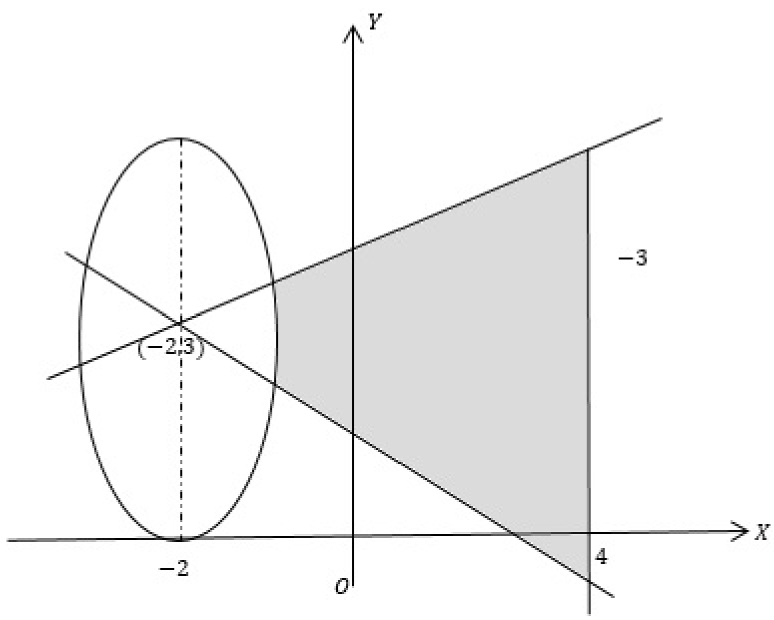
$4(x^2 + 4x + 4) - 9(y^2 - 6y + 9) = 65 + 16 - 81 = 0$

$4(x+2)^2 - 9(y-3)^2 = 0$

$2(x+2) - 3(y-3) = 0 \quad 2(x+2) + 3(y-3) = 0$

$2x - 3y + 13 = 0 \quad 2x + 3y - 5 = 0$ Asíntotas hipérbola

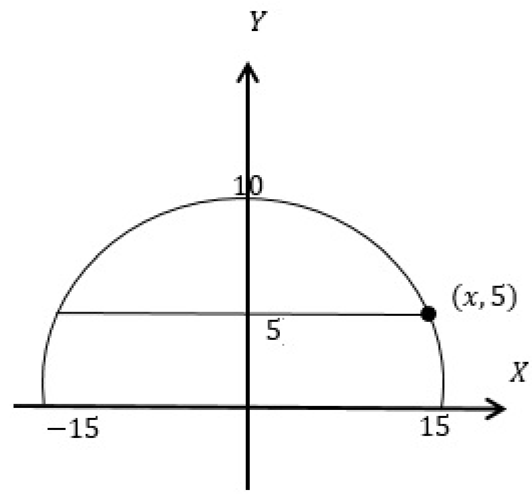
$x = 4$ *recta* $\parallel$ eje Y



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. El arco de un puente es semielíptico, con el eje mayor horizontal. La base del arco tiene $30m$ de longitud y su parte más alta, con respecto a la base, mide $10m$. Determinar la longitud de la cuerda paralela a la base y a $5m$ de altura de ella.

Solución.



$\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

$100x^2 + 225y^2 = 22500$

$100x^2 + 225 \cdot 25 = 22500 \Longrightarrow 100x^2 = 22500 - 5625 = 16875$

$x^2 = \dfrac{16875}{100} = \dfrac{625 \cdot 27}{100} \Longrightarrow x = \pm\dfrac{25 \cdot 3\sqrt{3}}{10} \Longrightarrow 2x = 15\sqrt{3}$

FIN .... FIN

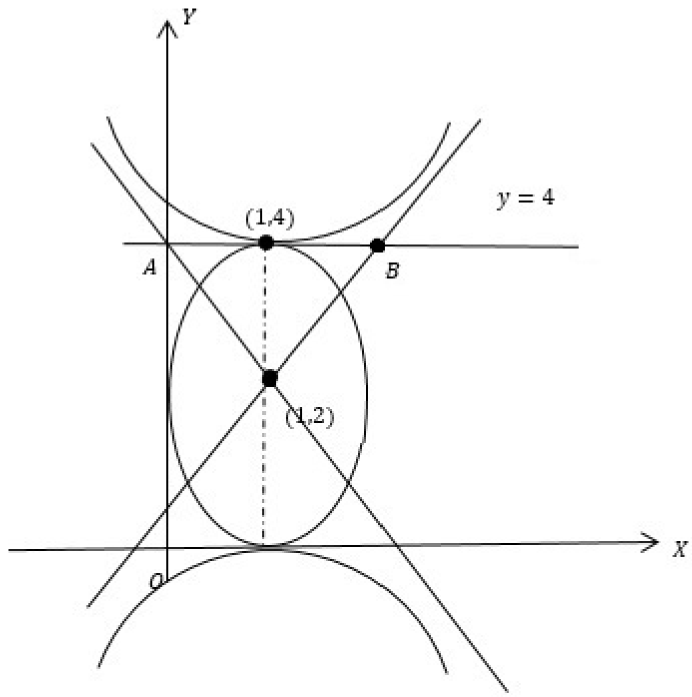
4. Sea $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$. Su eje mayor coincide con el eje transverso de una hipérbola que pasa por $(0, 2 - 2\sqrt{5})$. Determinar el área del triángulo formado por las asíntotas de ella y el segmento paralelo al eje X que pasa por uno de los vértices de la hipérbola.

Solución.

$4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

$4(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Longrightarrow (x-1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1 \Longrightarrow a^2 = 4 \Longrightarrow a = 2$

$b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$



Hipérbola: $a = 2 \Longrightarrow \dfrac{(y-2)^2}{a^2} - \dfrac{(x-1)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2(y-2)^2 - 4(x-1)^2 = 4b^2$
Pero $(0, 2-2\sqrt{5}) \in \ \ Hip: \ \ 20b^2 - 4 = 4b^2 \Longrightarrow 16b^2 = 4 \Longrightarrow b^2 = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}(y-2)^2 - 4(x-1)^2 = 1 \Longrightarrow (y-2)^2 - 16(x-1)^2 = 4$
Asíntotas:
$y - 2 - 4(x-1) = 0 \Longrightarrow 4x - y - 2 = 0$
$y - 2 + 4(x-1) = 0 \Longrightarrow 4x + y - 6 = 0$

$$Si \ \ y = 4 \Longrightarrow x = \frac{3}{2} \Longrightarrow B\left(\frac{3}{2}, 4\right)$$
$$x = \frac{1}{2} \Longrightarrow A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

$$\therefore A_{\triangle} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} \cdot 2 = 1 \ \ u.a.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

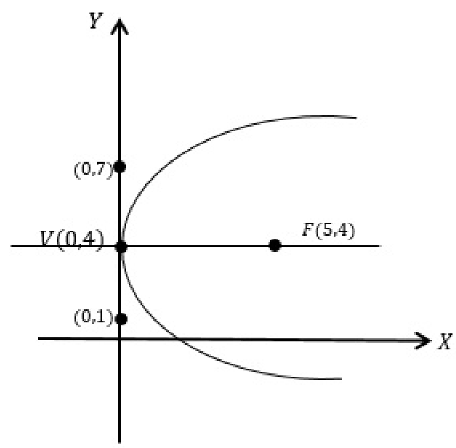
Prueba $n^{\circ}1$ año 2012

1. Determinar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto medio de la cuerda común a las curvas $C_1 : x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 7 = 0$ y cuyo foco es el centro de C_2.

   Solución.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \quad C_1(-2, 4) \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y + 7 = 0 \quad C_2(5, 4) \quad (2) \end{aligned}$$

   Restando (1) y (2)
   $14x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y^2 - 8y + 7 = 0 \Longrightarrow (y - 7)(y - 1) = 0 \Longrightarrow y = 7,\ \ y = 1$
   $\Longrightarrow (0, 7), (0, 1)$ pto. medio $(0, 4)$
   Ec. parábola:
   $(y - k)^2 = 4p(x - h), p > 0\ |\overline{VF}| = 5$
   $\therefore (y - 4)^2 = 20x$

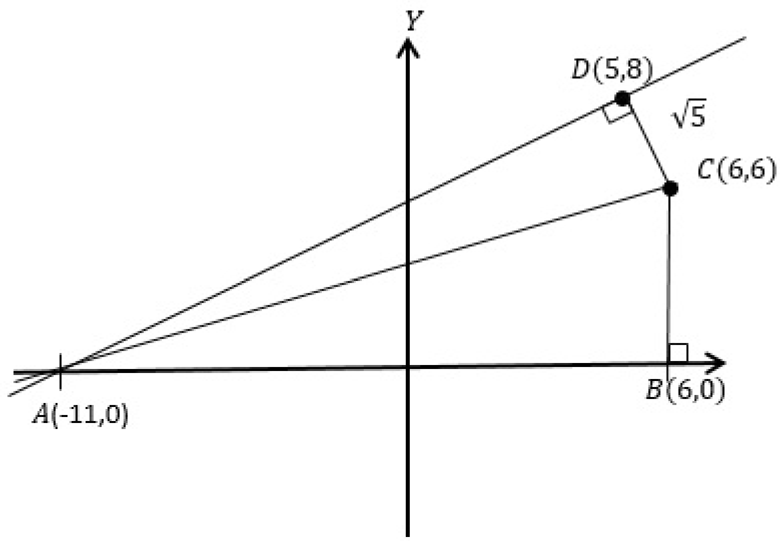


FIN .... FIN

2. Sea $C : 2x^2 + 2y^2 - 24x - 24y + 134 = 0$. Determinar el área del cuadrilátero formado por la tangente a C en $(5, 8)$, el eje X, el radio de C correspondiente al punto de tangencia dado y la perpendicular trazada desde el centro de C al eje X.

Solución.

$$C : 2x^2 + 2y^2 - 24x - 24y + 134 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 67 = 0 \quad C(6,6) \quad r = \sqrt{5}$$



$m_r = \dfrac{2}{-1} = -2 \Longrightarrow m_T = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow ec.\ tg \quad y - 8 = \frac{1}{2}(x-5) \Longrightarrow x - 2y + 11 = 0$
$\Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = -11 \Longrightarrow A(-11,0), \ \ B(6,0)$
$A_{\triangle ABC} = \dfrac{17 \cdot 6}{2} = 51. \mid \overline{AD} \mid = \sqrt{256 + 64} = 8\sqrt{5}$
$A_{\triangle ACD} = \dfrac{8\sqrt{5}\sqrt{5}}{2} = 20$

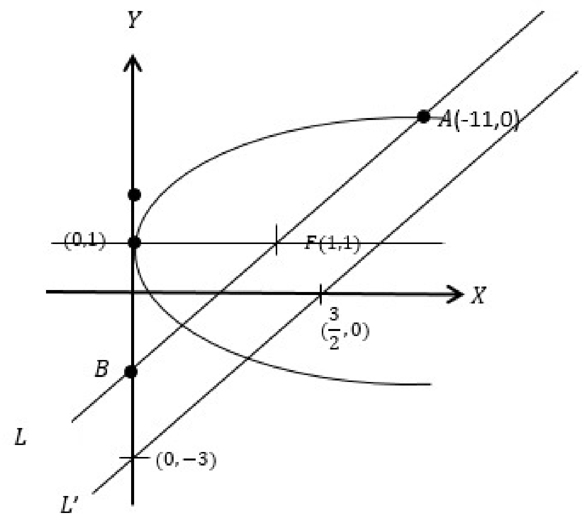
$$A = 51 + 20 = 71 \ \ u.a$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Determinar los puntos de intersección de la recta L con $C : y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, sabiendo que L pasa por el foco de C y es paralela a $\dfrac{x}{\frac{3}{2}} - \dfrac{y}{3} = 1$.

Solución.

$y^2 - 2y + 1 = 4x \Longrightarrow (y-1)^2 = 4x$



$4p = 4$

$p = 1 \Longrightarrow F(1,1)$

Ec. $L : y - 1 = \dfrac{3 \cdot 2}{3}(x-1) \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0 \Longrightarrow 2x = y + 1 \Longrightarrow (y-1)^2 = 2(y+1) \Longrightarrow y^2 - 2y + 1 = 2y + 2 \Longrightarrow y^2 - 4y - 1 = 0$

$y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

$\therefore x = \dfrac{2 + \sqrt{5} + 1}{2} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow A\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5}\right)$

$x = \dfrac{2 - \sqrt{5} + 1}{2} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow B\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right)$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Hallar la ecuación de la elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X, su centro es el vértice de $x = 2y^2 + 12y + 24$ y corta a los ejes X e Y determinando segmentos cuyas longitudes son 16 y 8, respectivamente.

Solución.

$x = 2y^2 + 12y + 24 \Longrightarrow 2(y^2 + 6y + 9) = x - 24 + 18 = x - 6 \Longrightarrow (y+3)^2 = \frac{1}{2}(x-6)$

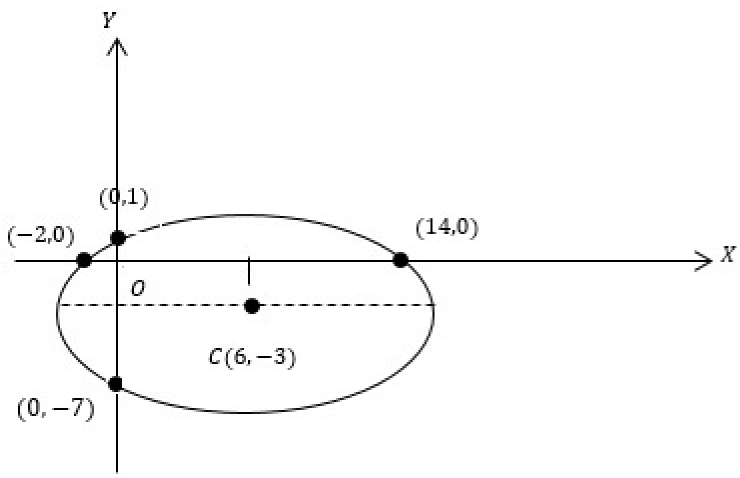
$\therefore V(6, -3)$

$$Ec.\ elipse : \frac{(x-6)^2}{a^2} + \frac{(y+3)^2}{b^2} = 1$$

Intersección con los ejes:

Segmento de 16 unidades en el eje $X \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(14, 0)$

Segmento de 8 unidades en el eje $Y \Longrightarrow (0, 1)$ y $(0, -7)$



$(0,1) \in Elipse : \ \frac{36}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Longrightarrow 36b^2 + 16a^2 = a^2b^2$

$(-2,0) \in Elipse : \ \frac{64}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \Longrightarrow 64b^2 + 9a^2 = a^2b^2 \Longrightarrow$

$36b^2 + 16a^2 = 64b^2 + 9a^2 \Longrightarrow 7a^2 = 28b^2 \Longrightarrow a^2 = 4b^2 \Longrightarrow 36b^2 + 64b^2 = 4b^4 \Longrightarrow$

$4b^2 = 100 \Longrightarrow b^2 = 25 \Longrightarrow a^2 = 100$

$$\therefore \frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

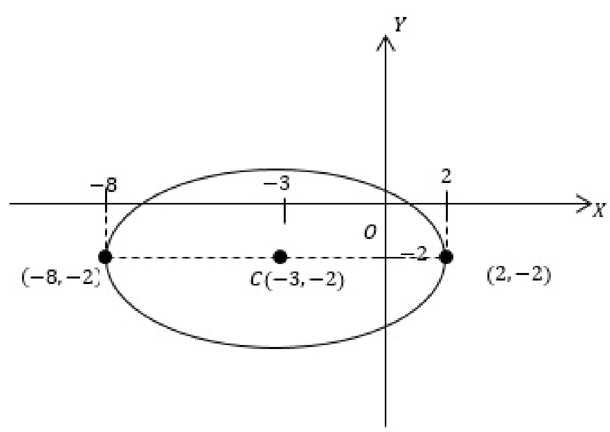
Prueba $n°1$ año 2013

1. Determinar la ecuación de la elipse sabiendo que los extremos de su eje mayor son el vértice y el foco de $y^2 - 40x + 4y - 316 = 0$ y que la longitud de sus lados rectos es igual al diámetro de $25x^2 + 25y^2 - 50x - 50y - 31 = 0$.

   Solución.

   $y^2 + 4y + 4 = 40x + 316 + 4 = 40x + 320$

   $(y + 2)^2 = 40(x + 8)$

   $4p = 40 \Longrightarrow p = 10$

   $\therefore\ V(-8, -2)\, y\, F(2, -2)$

   $\therefore\ 2a = 10 \Longrightarrow \boxed{a = 5}$

   $\therefore\ C(-3, -2)$

$$25x^2 + 25y^2 - 50x - 50y = 31$$
$$25(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 2y + 1) = 31 + 50$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{25} \Longrightarrow r = \frac{9}{5} \Longrightarrow 2r = d = \frac{18}{5}$$
$$\therefore\ \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5} \Longrightarrow b^2 = 9$$
$$Ec.\, elipse : \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es igual a la longitud del segmento que se forma al intersectar la curva $18y - x^2 - 6x + 27 = 0$ con el eje X y cuyo centro es el vértice de dicha curva.

Solución.

$x^2 + 6x + 9 = 18y + 27 + 9 = 18y + 36$

$(x+3)^2 = 18(y+2) \Longrightarrow V(-3,-2) = C_{\otimes}$

$y = 0 \Longrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$

$(x+9)(x-3) = 0$

$x_1 = -9 \quad y \quad x_2 = 3$

$d_{x_1x_2} = 12 = d_{\otimes} \Longrightarrow 2r = 12 \Longrightarrow \boxed{r = 6}$

$$Ec.\, circunf:\ (x+3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

FIN .... FIN

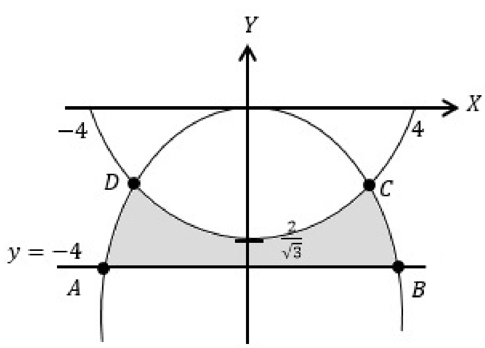
3. Sean $y = -\sqrt{\dfrac{16 - x^2}{12}}$, $x^2 = -4y$, $y = -4$. Identificar cada curva. En un mismo sistema de coordenadas, graficarlas, achurar la región que ellas encierran y obtener los puntos de intersección correspondientes a la región achurada.

Solución.

$y = -\sqrt{\dfrac{16 - x^2}{12}} \quad 12y^2 + x^2 = 16 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$ "mitad de elipse"

$-4y = x^2$ parábola

$y = -4 \Longrightarrow$ recta



Para $A \quad y \quad B$:

$x^2 = -4y$ con $y = -4 \Longrightarrow x^2 = 16 \Longrightarrow x = \pm 4 \Longrightarrow A(-4,-4) \quad y \quad B(4,-4)$

Para $C \quad y \quad D$:

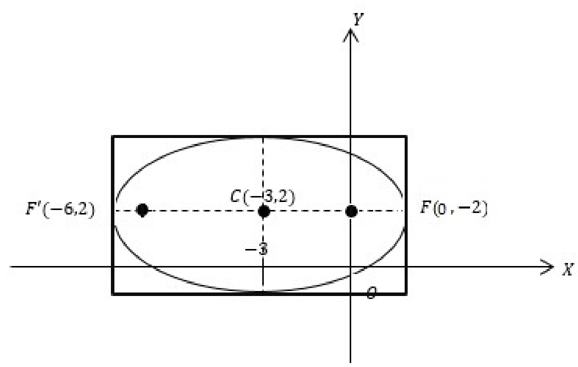
$x^2 = -4y$ con $y = -\sqrt{\dfrac{16-x^2}{12}} \Longrightarrow 12y^2 + x^2 = 16 \Longrightarrow$
$16 - 12y^2 = -4y \Longrightarrow 3y^2 - y - 4 = 0 \Longrightarrow (3y-4)(y+1) = 0$
$y = \dfrac{4}{3}$ no es solución; $y = -1 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$

$$\therefore C(2,-1) \quad y \quad D(-2,-1)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea C una elipse cuyos focos son $(0,2)$ y $(-6,2)$. Circunscrito a C se dibuja un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes focal y normal de la elipse. Si el área del rectángulo es de $80cm^2$, determinar la ecuación de la elipse.

Solución.



$C_{elipse} = (-3,2)$ y $c = 3$
$2a \cdot 2b = 80$
$ab = 20$
Pero $a^2 - c^2 = b^2 \Longrightarrow \boxed{a^2 - b^2 = 9}$
$\frac{400}{b^2} - b^2 = 9 \Longrightarrow 400 - b^4 = 9b^2 \Longrightarrow b^4 + 9b^2 - 400 = 0 \Longrightarrow$
Si $x = b^2 \Longrightarrow x^2 + 9x - 400 = 0 \Longrightarrow (x+25)(x-16) = 0$
$x = -25$ no es solución
$x = b^2 = 16 \Longrightarrow \boxed{b = 4} \Longrightarrow \boxed{a = 5}$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

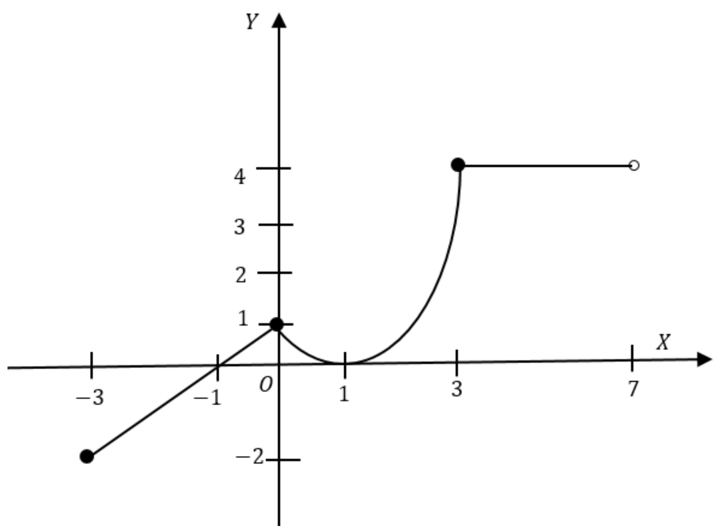
Prueba $n°2$ año 2009

1. Graficar la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in [-3,0), \\ x^2 - 2x + 1, & \text{si } x \in [0,3], \\ 4, & \text{si } x \in (3,7). \end{cases}$$

   Del gráfico, determinar: recorrido, ceros, puntos de intersección con el eje Y, paridad, intervalos de monotonía y acotamiento.

   Solución.



$$\begin{aligned} recorrido &= [-2,4] \\ ceros &= \{-1,1\} \\ inter.\ con\ el\ eje\ y &= \{1\} \\ paridad &= no\ tiene \\ inter.\ de\ monot. &= (-3,0) \cup (1,7)\ \ creciente \\ &= (0,1)\ \ decreciente \\ acotamiento &= es\ acotada\ ya\ que\ recf = [-2,4] \end{aligned}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + a$.

   a) Determinar, justificadamente, $dom(f)$ y $rec(f)$.

   b) Determinar el valos de a para que se tenga $(g \circ f)(x) = x$ para todo x.

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{1+2x-2}{x-1} = \dfrac{2x-1}{x-1}$

$dom f = \mathbb{R} - \{1\}$

$yx - y = 2x - 1 \quad x(y-2) = y - 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y-1}{y-2}$

$\therefore rec f = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $g(f(x)) = g\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{x-1} - 2} + a = x$

$$\frac{1}{\dfrac{2x-1}{x-1} - 2} + a = x \Longrightarrow x - 1 + a = x$$

$$\boxed{a = 1}$$

FIN .... FIN

3. Considerar las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x \in (0,2], \\ 6, & \text{si } x \in (5,8], \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \in [1,5], \\ x-2, & \text{si } x \in (5,10] \end{cases}$$

Determinar el $dom\left(\dfrac{g}{f}\right)$ y su expresión analítica.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x \in (0,2] \quad f_1, \\ 6, & \text{si } x \in (5,8] \quad f_2, \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \in [1,5] \quad g_1, \\ x-2, & \text{si } x \in (5,10] \quad g_2 \end{cases}$$

$$dom\frac{g_1}{f_1} = [1,5] \cap (0,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\} = [1,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\left(\frac{g_1}{f_1}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

$$dom\frac{g_1}{f_2} = [1,5] \cap (5,8] = \emptyset$$

$$dom\frac{g_2}{f_1} = (5,10] \cap (0,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\} = \emptyset$$

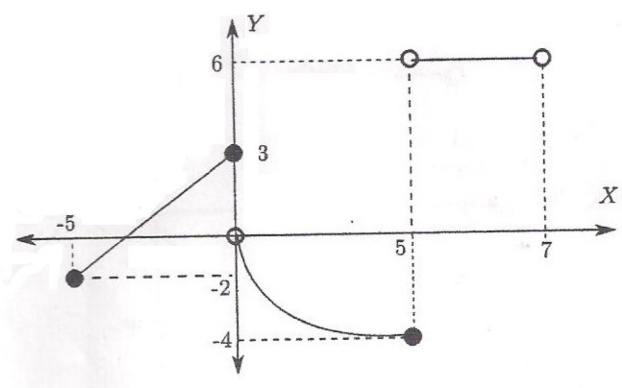
$$dom\frac{g_2}{f_2} = (5,10] \cap (5,8] = (5,8]$$

$$\left(\frac{g_2}{f_2}\right)(x) = \frac{x-2}{6}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{2x-3}, & \text{si } x \in [1,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\}, \\ \dfrac{x-2}{6}, & \text{si } x \in (5,8] \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Dado el siguiente gráfico de f:



Responder:

a) ¿Cuáles son los intervalos de monotonía?

b) ¿Es f acotada? ¿Por qué?

c) ¿Es f par, impar o ninguna? ¿Por qué?

d) ¿Es f periódica? ¿Por qué?

e) Determinar $f(-5), f(0), f(5), f(7)$.

Solución.

a) $(-5,0)\cup(5,7)$ creciente; $(0,5)$ decreciente

b) Si, ya que $recf=[-4,3]\cup\{6\}$

c) Ninguna ya que no hay simetria con respecto al eje y y origen.

d) No es periódica ya que $\nexists T$ tal que $f(x+T)=f(x)$ en $[-5,7)$.

e) $f(-5)=-2$, $f(0)=3$, $f(5)=-4$, $f(7)$ no tiene.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°2$ año 2010

1. Sea
$$f(x)=\sqrt{\frac{2x-\sqrt{|\,x+3\,|}}{x^2+2x+4}}$$
. Determinar el dominio de f.

Solución.
Es necesario que $2x-\sqrt{|\,x+3\,|}\geqslant 0$ ya que $(x+1)^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.
$2x\geqslant\sqrt{|\,x+3\,|}$ es necesario que $x>0$.

$$\begin{array}{rcl}
4x^2\geqslant|\,x+3\,| & \Longrightarrow & -4x^2\geqslant x+3\geqslant 4x^2\\
x+3\leqslant 4x^2 & \wedge & x+3\geqslant -4x^2\\
4x^2-x-3\geqslant 0 & \wedge & 4x^2+x+3\geqslant 0\\
(4x+3)(x-1)\geqslant 0 & \wedge & b^2-4ac<0\\
x\in(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[1,+\infty) & \wedge & \forall x\in\mathbb{R}\quad pero\quad x>0
\end{array}$$

$$\therefore C.S=[1,+\infty)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & \text{si } x \in [-1, 3) - \langle 2 \rangle, \\ |\, x - 3 \,|, & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

a) Determinar analíticamente $rec(f)$.

b) Graficar claramente f.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & \text{si } x \in [-1, 3) - \{2\}, \\ |\, x - 3 \,|, & \text{si } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x - 2}, & \text{si } x \in [-1, 3) - \{2\}, \\ -x + 3, & \text{si } x < -1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} x + 1, & \text{si } x \in [-1, 3) - \{2\} \quad ; f_2 \\ -x + 3, & \text{si } x < -1 \quad ; f_2 \end{cases}$$

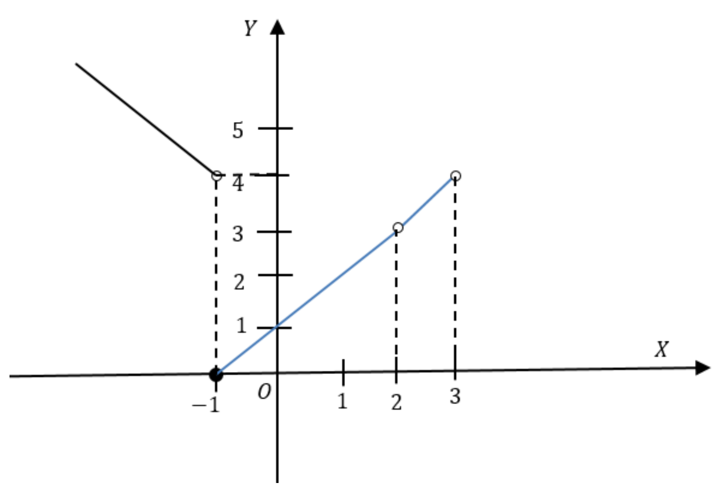
a) $-1 \leqslant x < 3, \;\; x \neq 2$

$0 \geqslant x + 1 < 4, \;\; x + 1 \neq 3 \Longrightarrow recf_1 = [0, 4) \setminus \{2\}$

$x < -1 \Longrightarrow -x > 1 \longrightarrow -x + 3 > 4 \Longrightarrow recf_2 = (4, +\infty)$

$$recf = [0, 4) \cup (4, +\infty) - \{3\}$$

b)



FIN .... FIN

3. Sean f y g las funciones definidas por:

$$f(x)=\sqrt{2x-9} \quad y \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{3x}{[x]}, & \text{si } x\in(1,3), \\ |\ x+1\ |, & \text{si } x<-5, \end{cases}$$

Determinar la expresión analítica de $f\circ g$ con su correspondiente dominio.

Solución.

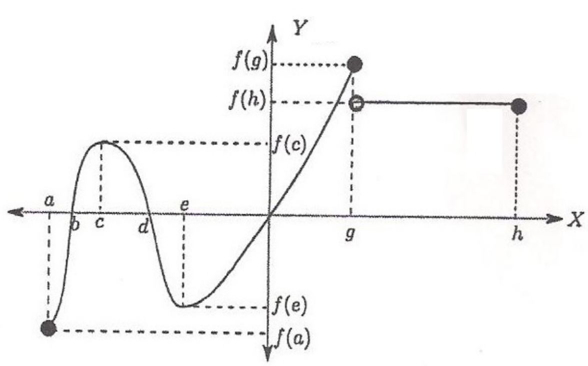
$$f(x)=\sqrt{2x-9} \quad y \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{3x}{[x]}, & \text{si } x\in(1,3), \\ |\ x+1\ |, & \text{si } x<-5, \end{cases} = \begin{cases} 3x & \text{si } x\in(1,2) \quad g_1, \\ \dfrac{3x}{2}, & \text{si } x\in[2,3) \quad g_2, \\ -x-1, & \text{si } x<-5 \quad g_3, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Dom(f\circ g_1) &= \left\{x\in(1,2)\wedge 3x\geqslant\frac{9}{2}\right\}=\left\{1<x<2\wedge x\geqslant\frac{3}{2}\right\}=\left[\frac{3}{2},2\right) \\ f(g_1(x)) &= f(3x)=\sqrt{6x-9} \\ Dom(f\circ g_2) &= \left\{x\in[2,3)\wedge\frac{3x}{2}\geqslant\frac{9}{2}\right\}=\{2\leqslant x<3\wedge x\geqslant 3\}=\emptyset \\ Dom(f\circ g_3) &= \left\{x<-5\wedge -x-1\geqslant\frac{9}{2}\right\}=\left\{x<-5\wedge x\leqslant-\frac{11}{2}\right\}=\left(-\infty,-\frac{11}{2}\right] \\ f(g_3(x)) &= f(-x-1)=\sqrt{2(-x-1)-9}=\sqrt{-2x-11} \end{aligned}$$

$$\therefore (f\circ g)(x)=\begin{cases} \sqrt{6x-9}, & \text{si } x\in\left[\frac{3}{2},2\right), \\ \sqrt{-2x-11}, & \text{si } x\in\left(-\infty,-\frac{11}{2}\right] \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Considerar la función f cuyo gráfico es:



Justificando claramente, determinar:

a) Dominio de f. Recorrido de f.

b) Valores de x para los cuales $f(x) > 0$.

c) Los tramos donde f es estrictamente creciente y los tramos donde f es estrictamente decreciente.

d) Si f es o no acotada.

Solución.

a) $domf = [a, h]$, $recf = [f(a), f(g)]$.

b) $x \in (b, d) \cup (0, h]$.

c) f es estrictamente creciente $\forall x \in (a, c) \cup (e, g)$.
f es estrictamente decreciente $\forall x \in (c, e)$.

d) f es acotada ya que $recf = [f(a), f(g)]$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

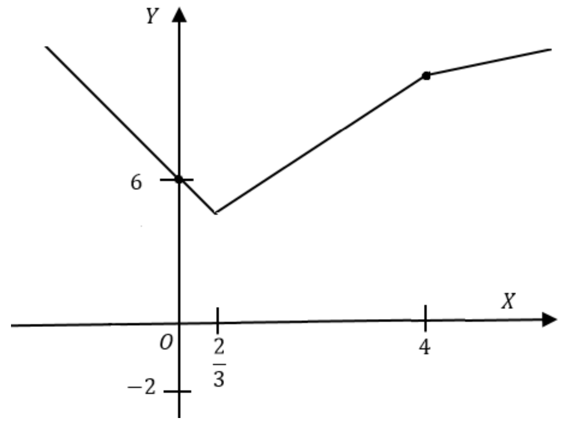
Prueba $n°2$ año 2011

1. Graficar: $f(x) =| 3x - 2 | + | 4 - x |$

Solución.
$f(x) =| 3x - 2 | + | x - 4 |$

Si $x < \frac{2}{3} : f(x) = -3x + 2 - x + 4 = -4x + 6$
si $\frac{2}{3} \leqslant x < 4 : f(x) = 3x - 2 - x + 4 = 2x + 2$
si $x \geqslant 4 : f(x) = 3x - 2 + x - 4 = 4x - 6$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -4x + 6 & \text{si } x < \frac{2}{3}, \\ 2x + 2, & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x < 4, \\ 4x - 6, & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



FIN .... FIN

2. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-6} - \sqrt{x^2-3x+2}}{x+5}$. Determinar dominio de f.

Solución.

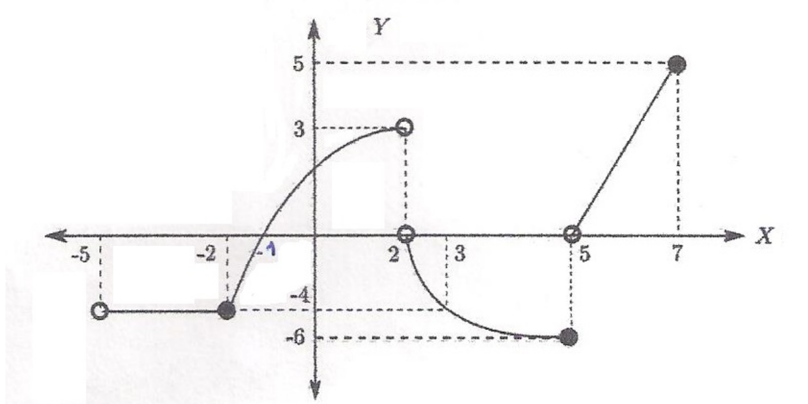
Es necesario que: $x \neq 5$ y

$x^2+x-6 = (x+3)(x-2) \geqslant 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$ y
$x^2-3x+2 = (x-2)(x-1) \geqslant 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

$$\therefore dom f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \setminus \{-5\}$$

FIN .... FIN

3. $f(: Dom(f) \to \mathbb{R}$ la función representada en el siguiente gráfico:



a) Determinar $Dom(f)$.

b) Determinar $Rec(f)$.

c) Intervalos de x donde $f(x) \geqslant 0$

d) ¿Es f acotada? Justifique.

Solución.

a) $domf = (-5,2) \cup (2,7]$

b) $recf = [-5,5]$

c) $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-1,2) \cup (5,7]$

d) f es acotada ya que $recf = [-5,5]$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sean

$$f(x) = \sqrt{x} + 3, x \geqslant 3 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x > 1 \quad ; g_1 \\ -3 - x, & \text{si } x \leqslant 1 \quad ; g_2 \end{cases}$$

Determinar la expresión analítica de $f \circ g$ y su respectivo dominio.

Solución.

$$f(x) = \sqrt{x} + 3, x \geqslant 3 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x > 1 \quad ; g_1 \\ -3 - x, & \text{si } x \leqslant 1 \quad ; g_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dom(f \circ g_1) &= \{x > 1 \wedge x^2 - 2x \geqslant 3\} \\ &= \{x > 1 \wedge (x-3)(x+1) \geqslant 0\} \\ &= \{x > 1 \wedge x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)\} = [3, +\infty) \end{aligned}$$

$$f(g_1(x)) = f(x^2 - 2x) = \sqrt{x^2 - 2x} + 3$$

$$\begin{aligned} dom(f \circ g_2) &= \{x \leqslant 1 \wedge -3 - x \geqslant 3\} \\ &= \{x \leqslant 1 \wedge x \leqslant -6\} = (-\infty, -6] \end{aligned}$$

$$f(g_2(x)) = f(-3 - x) = \sqrt{-3 - x} + 3$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} + 3, & \text{si } x \geqslant 3, \\ \sqrt{-3 - x}, & \text{si } x \leqslant -6 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°2$ año 2012

1. Sea $f(x) = \mid x+2 \mid + \mid 2-x \mid - \mid x \mid -1$ con $x \in [-3,3]$.

   a) Graficar claramente f.

   b) Analizar la paridad y el acotamiento de f. Justificar analíticamente.

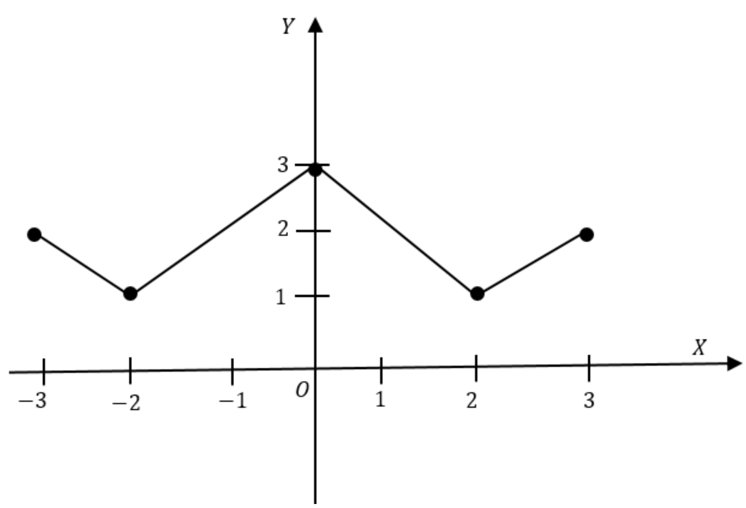
Solución.

$f(x) = \mid x+2 \mid + \mid 2-x \mid - \mid x \mid -1$ con $\forall x \in [-3,3]$

Si $-3 \leqslant x < -2 : f(x) = -x-2+2-x+x-1 = -x-1$
Si $-2 \leqslant x < 0 : f(x) = x+2+2-x+x-1 = x+3$
Si $0 \leqslant x < 2 : f(x) = x+2+2-x-x-1 = -x+3$
Si $2 \leqslant x \leqslant 3 : f(x) = x+2+x-2-x-1 = x-1$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{si } -3 \leqslant x < -2 \\ x+3, & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ -x+3, & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ x-1, & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

a)



b)

$$\begin{aligned} f(-x) &= \mid -x+2 \mid + \mid 2-(-x) \mid - \mid -x \mid -1 \\ &= \mid -x+2 \mid + \mid 2+x \mid - \mid x \mid -1 = f(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f \;\; es \;\; par$$

Como $recf = [1,3]$ f es acotada.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sean f y g las funciones definidas por:

$$f:[-1,0)\to\mathbb{R}, f(x)=-x+1 \quad y \quad g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{si } x<-2\\ (1-x)^2, & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$$

Determinar $dom(g\circ f)$ y su expresión analítica.

Solución.

$$f:[-1,0)\to\mathbb{R}, f(x)=-x+1 \quad y \quad g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{si } x<-2, \ g_1\\ (1-x)^2, & \text{si } x\geqslant 2, \ g_2\end{cases}$$

$$\begin{aligned} dom(g_1\circ f) &= \{x\in[-1,0)\wedge -x+1<-2\}\\ &= \{x\in[-1,0)\wedge x>3\}=\emptyset\\ dom(g_2\circ f) &= \{x\in[-1,0)\wedge -x+1\geqslant -2\}\\ &= \{x\in[-1,0)\wedge x\leqslant 3\}=[-1,0)\end{aligned}$$

$g_2(f(x))=g_2(-x+1)=(1+x-1)^2=x^2$

$$\therefore g(f(x))=x^2, \quad \forall x\in[-1,0)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^2-2x+4)(4-x^2)}{x(x^2-x-2)(\sqrt{x^2+10})}}$. Determinar $dom(f)$.

Solución.

Es necesario que: $\dfrac{(x^2-2x+4)(4-x^2)}{x(x^2-x-2)(\sqrt{x^2+10})} \geqslant 0$

Pero $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ y $\sqrt{x^2+10}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\therefore \dfrac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(x+1)\cdot x} \geqslant 0,\ x\neq 2$

$\dfrac{x+2}{(x+1)\cdot x} \leqslant 0$

$-\infty \qquad -2 \qquad -1 \qquad 0 \qquad +\infty$

$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$$dom f = (-\infty,-2]\cup(-1,0)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea las funciones $f_1=\sqrt{-x}$, $f_2(x)=ax+b$ y $f_3(x)=x^2-5$. Sea f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{si } x\leqslant -1,\\ f_2(x), & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 2,\\ f_3(x), & \text{si } x\geqslant 2.\end{cases}$$

a) Determinar los valores de "a" y "b" para que f sea una función, esto es, determinar a y b tal que $f_1(-1)=f_2(-1)$ y $f_2(2)=f_3(2)$.

b) Graficar f y determinar $rec(f)$.

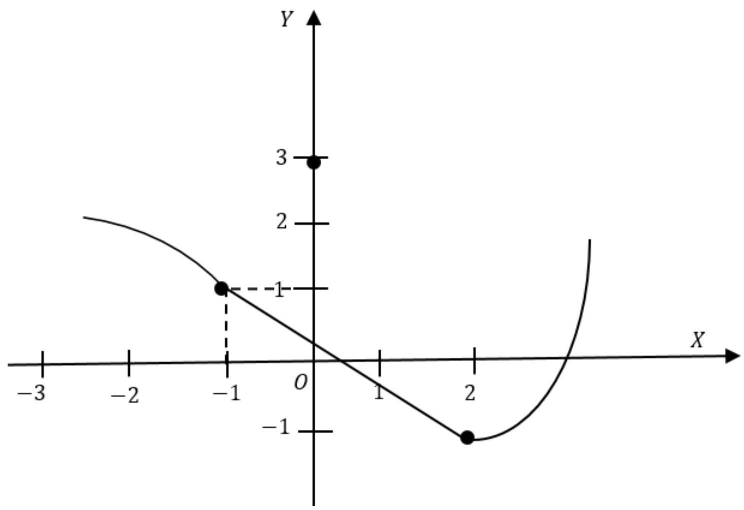
Solución.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x):\sqrt{-x}, & \text{si } x\leqslant -1,\\ f_2(x):ax+b, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 2,\\ f_3(x):x^2-5, & \text{si } x\geqslant 2.\end{cases}$$

a) $f_1(-1) = f_2(-1) \Longrightarrow 1 = -a + b$
$f_2(2) = f_3(2) \Longrightarrow -1 = 2a + b$
$3a = -2 \Longrightarrow \boxed{a = \dfrac{-2}{3}} \Longrightarrow \boxed{b = \dfrac{1}{3}}$

$$\therefore f_2(x) = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$$

b)



c) $recf = [-1, +\infty)$

FIN .... FIN

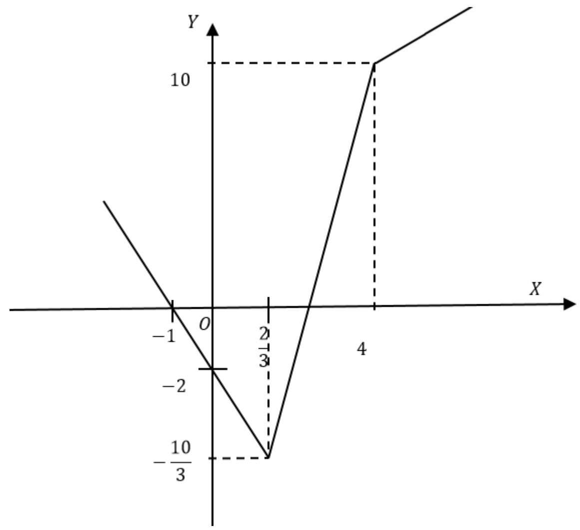
Prueba $n°2$ año 2013

1. Graficar $f(x) =| 3x - 2 | - | x - 4 |$

Solución.
$f(x) =| 3x - 2 | - | x - 4 |$

Si $x < \frac{2}{3} : f(x) = -3x + 2 + x - 4 = -2x - 2$
si $\frac{2}{3} \leqslant x < 4 : f(x) = 3x - 2 + x - 4 = 4x - 6$
si $x \geqslant 4 : f(x) = 3x - 2 - x + 4 = 2x + 2$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < \frac{2}{3}, \\ 4x - 6, & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x < 4, \\ 2x + 2, & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determinar dominio y recorrido de:

$$f(x) = \frac{1}{\mid x-1 \mid +1}$$

Solución.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\mid x-1 \mid +1} > 0 \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x-1+1} = \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1, f_1 \\ \dfrac{1}{-x+1+1} = \dfrac{1}{-x+2}, & \text{si } x < 1, f_2 \end{array} \right. \Longrightarrow domf = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Para f_1: $y = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{y} \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{y} - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{1-y}{y} \geqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{y-1}{y} \leqslant 0$
$\Longrightarrow y \in (0, 1]$
Para f_2: $y = \dfrac{1}{-x+2} \Longrightarrow -yx + 2y - 1 = 0 \Longrightarrow xy - 2y + 1 = 0$
$\Longrightarrow x = \dfrac{2y-1}{y} < 1 \Longrightarrow \dfrac{2y-1-y}{y} < 0 \Longrightarrow \dfrac{y-1}{y} < 0 \Longrightarrow y \in (0, 1)$

$$\therefore \; recf = (0, 1]$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sean $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 4 - 3x, & \text{si } -3 < x \leqslant 0 \end{cases}$ y $g(x) = -3$. Determinar:

a) Expresión analítica de $f + g$.

b) Monotonía de cada tramo de $f + g$.

c) Acotamiento de $f + g$, si es que tuviese.

d) Graficar $f + g$.

Solución.

$f(x) = \begin{cases} 4 - 3x, & \text{si } -3 < x \leqslant 0 \quad : f_1 \\ x^2 - 1, & \text{si } 0 < x < 3 \quad : f_2 \end{cases}$, $g(x) = -3$

a) $dom(f_1 + g) = (0, 3) \cap \mathbb{R} = (0, 3)$

$$\therefore \ (f_1 + g)(x) = x^2 - 1 - 3 = x^2 - 4$$

$dom(f_2 + g) = (-3, 0] \cap \mathbb{R} = (-3, 0]$

$$\therefore \ (f_2 + g)(x) = 4 - 3x - 3 = 1 - 3x$$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x \in (0, 3) \\ 1 - 3x, & \text{si } x \in (-3, 0] \end{cases}$$

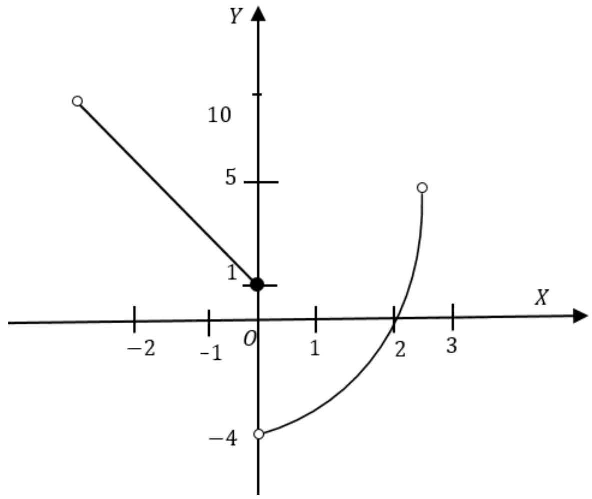
b) $0 < x_1 < x_2 < 3 \Longrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Longrightarrow x_1^2 - 4 < x_2^2 - 4 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\therefore f$ es estrictamente creciente en $(0, 3)$
$-3 < x_1 < x_2 \leqslant 0 \Longrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Longrightarrow -3x_1 + 1 > -3x_2 + 1 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
$\therefore f$ es estrictamente decreciente en $(-3, 0]$

c) $0 < x < 3 \Longrightarrow 0 < x^2 < 9 \Longrightarrow -4 < x^2 - 4 < 5 \Longrightarrow recf = (-4, 5)$
$-3 < x \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant -x < 3 \Longrightarrow 0 \leqslant -3x < 9 \Longrightarrow 1 \leqslant -3x + 1 < 10$

$$\therefore \ rec(f + g) = [1, 10) \cup (-4, 5) = (-4, 10)$$

$$\therefore \ f + g \ \ es \ \ acotada$$

$d)$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sean $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ y $g(x) =\mid 3x - 2 \mid$.
Determinar $Dom(f \circ g)$ y la expresión analítica correspondiente.

Solución.
$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 0 & : f_1 \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 & : f_2 \end{cases}$ y $g(x) =\mid 3x - 2 \mid = \begin{cases} 3x - 2, & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} & : g_1 \\ -3x + 2, & \text{si } x < \frac{2}{3} & : g_2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} dom(f_1 \circ g_1) &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge 3x - 2 < 0\} \\ &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge x < \frac{2}{3}\} = \emptyset \\ dom(f_1 \circ g_2) &= \{x < \frac{2}{3} \wedge -3x + 2 < 0\} \\ &= \{x < \frac{2}{3} \wedge x > \frac{2}{3}\} = \emptyset \\ dom(f_2 \circ g_1) &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge 3x - 2 \geqslant 1\} \\ &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge x \geqslant 1\} = [1, +\infty) \end{aligned}$$

$\therefore f_2(g_1(x)) = f_2(3x - 2) = (1 - 3x + 2)^2 = (3 - 3x)^2$

$$
\begin{aligned}
dom(f_2 \circ g_2) &= \{x < \frac{2}{3} \wedge -3x + 2 \geqslant 1\} \\
&= \{x < \frac{2}{3} \wedge x \leqslant \frac{1}{3}\} = (-\infty, \frac{1}{3}]
\end{aligned}
$$

$\therefore f_2(g_2(x)) = f_2(-3x + 2) = (1 + 3x - 2)^2 = (3x - 1)^2$

$$\therefore f(g(x)) = \begin{cases} (3 - 3x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 \\ (3x - 1)^2, & \text{si } x \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n^{\circ}3$ año 2009

1. Calcular los siguientes limites

   a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x - 1}\right)^{\dfrac{x}{2}}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 + \cos \pi(z + 1)}{z^2} =$

$x - 1 = z, \quad Si \quad x \to 1 \Longrightarrow z \to 0$

$\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 + \cos(\pi z + \pi)}{z^2} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 - \cos \pi z}{z^2} \cdot \dfrac{1 + \cos \pi z}{1 + \cos \pi z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \pi z}{z^2} \cdot \dfrac{1}{1 + \cos \pi z}$

$= \lim\limits_{z \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}\right)^2 \cdot \dfrac{\pi^2}{1 + \cos \pi z} = \dfrac{\pi^2}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x - 1}\right)^{\dfrac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{4}{2x - 1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4x}{2(2x-1)}} = e$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determine $a \in \mathbb{R}$ talque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x + a\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = 4$

Solución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + a\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x\cos x + a\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{2\cos x + a\operatorname{sen} x - 2}{1-\cos x}\right)\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{-2(1-\cos x) + a\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\cdot(1+\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}^2 x + a\operatorname{sen} x(1+\cos x)}{\operatorname{sen} x} = 2a$$

$$\therefore 2a = 4 \Longrightarrow \boxed{a=2}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{1}{x+1}, & \text{si } x < -1,\\ \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{1}{x+1}, & \text{si } x < -1,\\ \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x+1+\dfrac{1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x+1)^2+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = -\infty$

$\therefore x = -1$ es asíntota vertical.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2}{x(x^2+1)} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2 = b$

$\therefore y = 2$ es asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+1+\frac{1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x+1)^2+1}{x(x+1)} = \lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{(1-y)^2+1}{y^2-y}$

Sea $x = -y$. Si $x \to -\infty \Longrightarrow y \to +\infty$

$\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{1-2y+y^2+1}{y^2-y} = 1 = m$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+1\dfrac{1}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+2}{x+1} = \lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{-y+2}{-y+1} = 1 = b$

$\therefore y = x+1$ es asíntota oblicua izquierda

FIN .... FIN

4. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}, & \text{si } x > a, \\ \dfrac{9(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{a}}{x - a}, & \text{si } x < a \end{cases}$

Determine "a" y luego redefina la función para que sea continua en $x_0 = a$

Solución.

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}, & \text{si } x > a, \\ \dfrac{9(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{a}}{x - a}, & \text{si } x < a \end{cases}$

$f(a)$ no está definida

$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = 3a^2$

$\lim\limits_{x \to a^-} 9\dfrac{(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{a}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^-} 9\dfrac{(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{a}}{x - a} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}}$

$= \lim\limits_{x \to a^-} 9\dfrac{x - a}{(x - a)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2})} = \dfrac{9}{3\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$

$$\therefore 3a^2 = \frac{3}{\sqrt[3]{a^2}} \Longrightarrow \sqrt[3]{a^8} = 1 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}, & \text{si } x > a, \\ 3, & \text{si } x = a, \\ \dfrac{9(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{a}}{x - a}, & \text{si } x < a \end{cases}$$

FIN .... FIN

Prueba $n°3$ año 2010

1. Determinar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = x^{\operatorname{sen} x}$ en $x = \frac{\pi}{2}$

   Solución.

$$
\begin{aligned}
y &= x^{\operatorname{sen} x} \quad \backslash \ln \quad en \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\
\ln y &= \operatorname{sen} x \ln x \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x) \cos x \\
y' &= y \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x) \cos x \right) \\
y'(\frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}} + 0 \right) = 1
\end{aligned}
$$

   Ec. tg: $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = x$
   Ec. normal: $y - \frac{\pi}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow y + x - \pi = 0$
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Derivar

$$f(x) = \cos^3(x^4 - e^{x^3+2x}) - \ln^4(\operatorname{tg}(x^3 - 7x))$$

   Solución.
   $y = \cos^3(x^4 - e^{x^3+2x}) - \ln^4(\operatorname{tg}(x^3 - 7x))$
   $y' = 3\cos^2(x^4 - e^{x^3+2x})(-\operatorname{sen}(x^4 - e^{x^3+2x}))(4x^3 - e^{x^3+2x}(3x^2 + 2))$
   $- 4\ln^3(\operatorname{tg}(x^3 - 7x)) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x^3 - 7x)} \cdot \sec^2(x^3 - 7x) \cdot (3x^2 - 7)$
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1, \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

   a) Analizar si f es continua en $x = -1$

   b) Calcular $f'(1)$, si existe.

   c) Calcular $f'(x)$.

Solución.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{si } x<1 \quad , f_1\\ (1-x)^2, & \text{si } x\geqslant 1 \quad , f_1\end{cases}$$

a) Continua en $x=-1$
$f(-1)=\sqrt{2}$
$\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{1-x}=\sqrt{2}$
$\Longrightarrow \therefore f$ es continua en $x=-1$

b) f es contínua en $x=1$ y
$f_1(x)=\sqrt{1-x}\Longrightarrow f_1'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$
$\therefore f_-'(1)\nexists \therefore f$ no es derivable en $x=1$

c) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-2\sqrt{1-x}}, & \text{si } x<1,\\ -2(1-x), & \text{si } x>1\end{cases}$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, si $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{9}{x}}, & \text{si } x<0,\\ \dfrac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}}, & \text{si } x>0\end{cases}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+1-\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{a}{a-x}}\right]^{\frac{a-x}{a}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\dfrac{a-x}{a}\right)^{\frac{a}{a-x}}\right]^{-\frac{1}{a}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(x-a)}}=e^{-\frac{1}{a}}$

b) $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{9}{x}}, & \text{si } x<0,\\ \dfrac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}}, & \text{si } x>0\end{cases}$

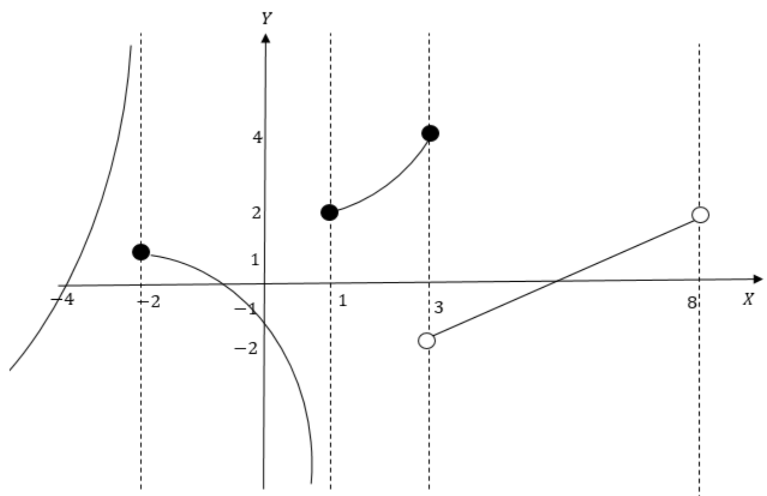
$\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{9}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}\right]^{-9}=e^{-9}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}} \cdot \frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos 3x} \cdot \frac{1}{\frac{x^2-(e^{3x^2}-1)}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9}{1+\cos 3x} \cdot \frac{1}{1-\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}\cdot 3} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{1-3} = -\frac{9}{4}$$

FIN .... FIN

5. Trazar el gráfico de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:
f debe ser continua en $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3]$, $(3,8)$ y además $f(-2)=1$,
$\lim_{x\to -4} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 8^-} f(x) = 2$

Solución.



FIN .... FIN

Prueba $n°3$ año 2011

1. Hallar, si existe, un número $c \in (-2, 2)$ en el que la recta tangente a $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$ sea paralela a la recta que une $(0, 0)$ y $(5, 1)$.

   Solución.
   $c \in (-2, 2)$
   $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$
   $y' = \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{(2-x)^2}} \cdot \dfrac{2-x+x}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{4-4x+x^2+x^2} = \dfrac{2}{2x^2-4x+4} = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$
   $m_r = \frac{1}{5}$
   $\therefore \dfrac{1}{c^2-2c+2} = \dfrac{1}{5} \Longrightarrow c^2-2c+2 = 5 \Longrightarrow c^2-2c-3 = 0 \Longrightarrow (c-3)(c+1) = 0 \Longrightarrow$
   $c = 3 \notin (-2, 2) \quad c = -1 \in (-2, 2)$
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. *a*) Si $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, verificar que $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

   b) Encuentre f', para $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2} + \cos(e^{x^2}-3) + \log(3x^2+4)$.

   Solución.

   a) $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
   $\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{xy'-y}{x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$
   $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{xy'-y}{x^2} = \dfrac{x+yy'}{x^2+y^2} \Longrightarrow y'(x-y) = x+y$

   $$\therefore y' = \frac{x+y}{x-y}$$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2} + \cos(e^{x^2}-3) + \log(3x^2+4)$
   $y' = \dfrac{1}{3}(x^2-2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x - \operatorname{sen}(e^{x^2}-3) \cdot e^{x^2} \cdot 2x + \dfrac{6x}{3x^2+4}\log e$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Considere la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

   a) Determine $f'(x)$, $f''(x)$

b) Encuentre máximos y/o mínimos relativos y puntos de inflexión.

c) Determine intervalos de crecimiento y concavidad.

d) Asíntotas.

e) Bosqueje el gráfico de $f(x)$.

Solución.
$f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

a) $f'(x) = \dfrac{(x^+4)4 - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2+4)^2(-8x) - (-4x^2+16)2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} \\ &= \frac{(x^2+4)(-8x) - (-4x^2+16)2\cdot 2x}{(x^2+4)^3} \\ &= \frac{-8x^3 - 32x + 16x^3 - 64}{(x^2+4)^3} = \frac{8x^3 - 96x}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \\ &= \frac{8x(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

Si $x < -3{,}4 : f' < 0, \quad f'' < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo
Si $-3{,}4 < x < -2 : f' < 0, \quad f'' > 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba.

$\therefore$ en $x = -2\sqrt{3}$ hay un punto de inflexión $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $-2 < x < 0 : f' > 0, \quad f'' > 0 \Longrightarrow f$ es creciente y cóncava hacia arriba.

$\therefore$ en $x = -2$ hay un mínimo con $f(-2) = -1$

Si $0 < x < 2 : f' > 0, \quad f'' < 0 \Longrightarrow f$ es creciente y cóncava hacia abajo.

$\therefore$ en $x = 0$ hay un punto de inflexión con $f(0) = 0$

Si $2 < x < 3{,}4 : f' < 0, \quad f'' < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo.

$\therefore$ en $x = 2$ hay un máximo con con $f(2) = 1$

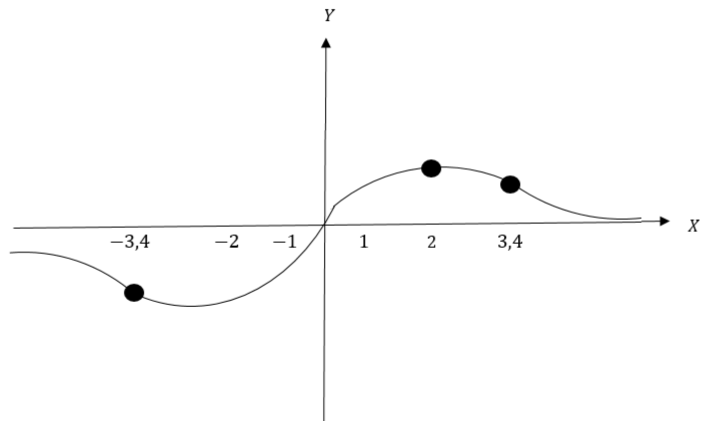
Si $x > 3{,}4 : f' < 0, \quad f'' > 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba.

$\therefore$ en $x = 2\sqrt{3}$ hay un punto de inflexión con con $f(2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x^3+4x} = 0 = m$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x}{x^2+4} - 0\right) = 0 = b \Longrightarrow y = 0$ asíntota horizontal

c)



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°3$ año 2012

1. Considerar la siguiente función:

$$h(x) = \frac{(x-1)(x^2-x-12)}{x^2-5x+4}$$

Analizar la continuidad de h en los puntos $x = 4$ y $x = 1$. Clasificar sus discontinuidades, y redefinir h, si corresponde.

Solución.
$h(x) = \dfrac{(x-1)(x^2-x-12)}{x^2-5x+4} = \dfrac{(x-1)(x-4)(x+3)}{(x-4)(x-1)} = (x+3). \quad x \neq 4, x \neq 1$

a) Para $x = 1$
$h(1) =$ no está definida.
$\lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4$
h tiene en $x = 1$ una discontinuidad reparable haciendo $h(1) = 4$

b) Para $x = 4$

$h(4) =$ no está definida.

$\lim\limits_{x\to 4}(x+3) = 7$

h tiene en $x = 4$ una discontinuidad reparable haciendo $h(4) = 7$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2-x-12)}{x^2-5x+4} = (x+3), & \text{si } x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq 4, \\ 4, & \text{si } x = 1, \\ 7, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Hallar todas las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1}$$

Solución.

$f(x) = \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1} = -\infty$

$\therefore x = -1$ es asíntota vertical.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 2}{x^2 + x} + \dfrac{1}{x^2 + x} \cdot \operatorname{sen}(x) \right) = 3 = m$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1} - 3x \right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x) - 3x^2 - 3x}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x - 2}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} \cdot \operatorname{sen}(x) = -3 = b$

$$\therefore y = 3x - 3 \text{ es asíntota oblicua derecha.}$$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x(x+1)} = \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{3y^2 - 2 - \operatorname{sen} y}{y^2 - y} = 3 = m$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1} - 3x \right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1}$

$= \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{-3y - 2 - \operatorname{sen} y}{-y + 1} = -3 = b$

$$\therefore y = 3x - 3 \text{ es asíntota oblicua izquierda.}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Realizar en cada caso lo que se pide:

   a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\operatorname{sen}(x)}$

   b) Calcular $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\pi - x}$

   c) Calcular el valor de k de modo que $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+kx+1}-x)=2$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\operatorname{sen}(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}=\ln 2$

b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\pi - x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+z)}{-z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} z}{-z}=1$
Sea $z=x-\pi$. Si $x\to\pi \Longrightarrow z\to 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+kx+1}-x)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+kx+1}+x}{\sqrt{x^2+kx+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+kx+1-x^2}{\sqrt{x^2+kx+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx+1}{x\sqrt{1+\frac{k}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(k+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{k}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}=\dfrac{k}{2}=2\Longrightarrow\boxed{k=4}$

FIN .... FIN

4. Encontrar los valores de c y k de modo que la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2c, & \text{si } x<-2,\\ 3cx+k, & \text{si } -2\leqslant x<1,\\ 3x-2k, & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución.

$$f(x)=\begin{cases} x+2c, & \text{si } x<-2,\\ 3cx+k, & \text{si } -2\leqslant x<1,\\ 3x-2k, & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

a) en $x=-2$

$f(-2)=-6c+k$

$\lim\limits_{x\to -2^-}(x+2c)=-2+2c$

$\lim\limits_{x\to -2^+}(3cx+k)=-6c+k$

$-2+2c=-6c+k\Longrightarrow\boxed{8c-k=2}$

b) en $x = 1$

$f(1) = 3 - 2k$

$\lim_{x \to 1^-} (3cx + k) = 3c + k$

$\lim_{x \to 1^+} (3x - 2k) = 3 - 2k$

$3c + k = 3 - 2k \Longrightarrow 3c + 3k = 3 \Longrightarrow \boxed{c + k = 1}$

$\therefore 8c - k = 2 \quad \wedge \quad c + k = 1$

$9c = 3 \Longrightarrow \boxed{c = \dfrac{1}{3}}$

$k = 1 - \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{k = \dfrac{2}{3}}$

FIN .... FIN

Prueba $n^\circ 3$ año 2013

1. Calcular los siguientes limites

   a) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{5^{x^2-6x+9} - e^{x^2-6x+9}}{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)}$

   b) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{x-k}, a, b, k \in \mathbb{R}$

Solución.

a) $$\lim_{x \to 3} \frac{5^{x^2-6x+9} - e^{x^2-6x+9}}{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{5^{(x-3)^2} - e^{(x-3)^2}}{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)} = \lim_{x \to 3} \left[\frac{5^{(x-3)^2} - 1}{(x-3)^2} - \frac{e^{(x-3)^2} - 1}{(x-3)^2}\right] \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}} = \ln 5 - 1$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{x-k} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \left(\frac{x-b}{x-a} - 1\right)\right)^{x-k} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x-b-x+a}{x-a}\right)^{x-k} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{a-b}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{a-b}}\right]^{\frac{(a-b)(x-k)}{x-a}} = e^{a-b}$$

FIN .... FIN

2. Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+ax)-\ln(x^2-ax)}{x^{-1}} = 5$

Solución.
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+ax)-\ln(x^2-ax)}{x^{-1}} = 5$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+ax}{x^2-ax}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2ax}{x^2-ax}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{2ax}{x^2-ax}\right)^{\frac{x^2-ax}{2ax}}\right]^{\frac{2ax\cdot x}{x^2-ax}} =$$

$\ln e^{2a} = 5$

$$\therefore 2a = 5 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{2}}$$

FIN .... FIN

3. Sea $f(x) = \dfrac{4x+5-4x^3}{x^2+1}$. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.

Solución.

- No hay asíntotas verticales.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+5-4x^3}{x(x^2+1)} = -4 = m$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x+5-4x^3}{x^2+1}+4x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+5-4x^3+4x^3+4x}{x^2+1}$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x+5}{x^2+1} = 0 = b \Longrightarrow y = -4x$ asíntota oblicua derecha.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+5-4x^3}{x^3+x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{-4y+5+4y^3}{-y^3-y} = -4 = m$
  Sea $x = -y$. Si $x \to -\infty \longrightarrow y \to +\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x+5-4x^3}{x^2+1}+4x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x+5}{x^2+1} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{-8y+5}{y^2+1} = 0$
  $\therefore y = -4x$ asíntota oblicua izquierda.
- No hay asńtotas horizontales.

FIN .... FIN

4. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt[3]{x}}, & \text{si } x > 1, \\ -3, & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{3(x+5)\operatorname{sen}(2x-2)}{2x^2+8x-10}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Analizar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$. Si fuese discontinua, justificar si es o no reparable y redefinir si corresponde.

Solución.

a) $f(1) = -3$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3(x+5)\operatorname{sen} 2(x-1)}{2(x+5)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3\operatorname{sen} 2(x-1)}{2(x-1)} = 3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{2(1-t^3)}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{2(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{2(1+t+t^2)}{(1+t)} = 3$

$x = t^6$. Si $x \to 1^+ \longrightarrow t \to 1$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 3 \neq f(1)$$

$\therefore f$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad reparable.
Redefiniendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt[3]{x}}, & \text{si } x > 1, \\ 3, & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{3(x+5)\operatorname{sen}(2x-2)}{2x^2+8x-10}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°4$ año 2009

1. Aplicando L'Hopital, calcular:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$$

Solución.

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$

$y = \left(\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$ Aplicando ln y luego $\lim\limits_{x\to 0}$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}\ln\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}\cdot\dfrac{(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x)(3\cos 3x)-(\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x)(-3\cos 3x)}{(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x)^2}}{3\cos 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} a\cos 3x-3\operatorname{sen} 3x\cos 3x+3\operatorname{sen} a\cos 3x+3\operatorname{sen} 3x\cos 3x}{3\cos 3x(\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 3x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6\operatorname{sen} a\cos 3x}{3\cos 3x(\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 3x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\operatorname{sen} a}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{\frac{2}{\operatorname{sen} a}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}, & \text{si } x\neq 1,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x=1\end{cases}$ Analizar la continuidad de f en $x=1$. Si fuese discontinua, justificar si es o no reparable y redefinir f si correspondiese.

Solución.

$f(1)=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\operatorname{sen}\pi x}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos\pi x}{2}=\frac{\pi^2}{2}\neq\frac{\pi}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe, $\therefore$ f tiene en $x=1$ una discontinuidad reparable.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}, & \text{si } x\neq 1,\\ \frac{\pi^2}{2}, & \text{si } x=1\end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $\operatorname{sen}(2x+y)=x$. Verificar que $y''(\frac{\pi}{8},0)=2$.

Solución.

$\operatorname{sen}(2x+y)=y \Longrightarrow (2+y')\cos(2x+y)=1$

$2\cos(2x+y)+y'\cos(2x+y)=1 \Longrightarrow y'=\dfrac{1-2\cos(2x+y)}{\cos(2x+y)} \Longrightarrow y'(\frac{\pi}{2},0)=\sqrt{2}-2$

$-2(2+y')\operatorname{sen}(2x+y)+y''\cos(2x+y)-y'(2+y')\operatorname{sen}(2x+y)=0$

$-4\operatorname{sen}(2x+y)-2y'\operatorname{sen}(2x+y)+y''\cos(2x+y)-2y'\operatorname{sen}(2x+y)-y'^2\operatorname{sen}(2x+y)=0$

$-4\operatorname{sen}(2x+y)-4y'\operatorname{sen}(2x+y)+y''\cos(2x+y)-y'^2\operatorname{sen}(2x+y)=0$

$-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-4(\sqrt{2}-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+y''\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2-4\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=0$

$-4-4\sqrt{2}+8+y''-2+4\sqrt{2}-4=0 \Longrightarrow \boxed{y''=2}$

FIN .... FIN

4. Sea $x^3+ay^3-3xy=0$. Determinar $a\in\mathbb{R}$ tal que la pendiente de la tangente a esta curva en $(1,3)$ sea igual a la pendiente de la tangente a $f(x)=(\ln x)^x$ en el punto de la abscisa $x=e$.

Solución.

$x^3+ay^3-3xy=0 \Longrightarrow 3x^2+3ay^2y'-3xy'-3y=0$

$\Longrightarrow 3+27ay'-3y'-9=0 \Longrightarrow y'=\dfrac{6}{27a-3}=\dfrac{2}{9a-1}$

$f(x)=(\ln x)^x$. Si $x=e \Longrightarrow y=1$

$\ln y = x\ln(\ln x)$

$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{x}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}+\ln(\ln x)$

$y'=y\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)\right) \Longrightarrow y'(e,1)=1+0$

$$\therefore \frac{2}{9a-1}=1 \Longrightarrow 9a-1=2 \Longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}}$$

FIN .... FIN

5. Si $y=3b^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$, $b\in\mathbb{R}$, verificar que:

$$y'=\frac{4x^2}{\sqrt{bx-x^2}}$$

Solución.

$$
\begin{aligned}
y &= 3b^2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2} \\
y' &= 3b^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{b-x}} \cdot \frac{\sqrt{b-x}}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{b-x+x}{(b-x)^2} - (3b+2x)\frac{b-2x}{2\sqrt{bx-x^2}} - 2\sqrt{bx-x^2} \\
&= \frac{3b^2(b-x)}{b} \cdot \frac{b\sqrt{b-x}}{2\sqrt{x}(b-x)^2} - \frac{(3b+2x)(b-2x)}{2\sqrt{bx-x^2}} - 2\sqrt{2x-x^2} \\
&= \frac{3b^2-3b^2+6bx-2bx+4x^2-4bx+4x^2}{2\sqrt{bx-x^2}} = \frac{8x^2}{2\sqrt{bx-x^2}} = \frac{4x^2}{\sqrt{bx-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$\therefore y' = \frac{4x^2}{\sqrt{bx-x^2}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°4$ año 2010

1. Sea $f(x) = \begin{cases} 2\pi^2 & \text{si } -1 < x \leqslant 0, \\ \dfrac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$
   Analizar la derivabilidad de f en $x=0$.
   ¡Justificar claramente. No usar L'Hopital!

Solución.

En $x=0$

$f(0) = 2\pi^2 \ \lim\limits_{x\to 0^-} 2\pi^2 = 2\pi^2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2} \cdot \frac{1+\cos 2\pi x}{1+\cos 2\pi x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 2\pi x}{(2\pi x)^2} \cdot \frac{4\pi^2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1+\cos 2\pi x} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

$$\therefore f \text{ es continua en } x=0. \text{ Luego}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^2(1-x)^2(\operatorname{sen} 2\pi x)(2\pi) - (1-\cos 2\pi x)(-x^2\cdot 2(1-x) + 2x(1-x)^2)}{x^4(1-x)^4}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^2(1-x)^2(2\pi \operatorname{sen} 2\pi x) - (1-\cos 2\pi x)(2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x))}{x^4(1-x)^4}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$f'_- = 0$

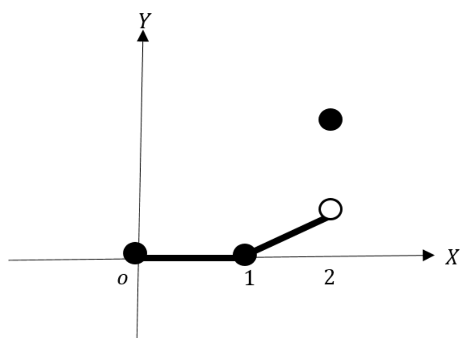
$f'_+ \nexists$

$$\therefore f \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = (x-1)[x]$. Graficar f para $x \in [0,2]$. A partir del gráfico y justificando claramente, determinar si existen $f'_-(1)$, $f'_+(1)$ y $f'(1)$.

   Solución.
   Si $0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow [x] = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$
   si $1 \leqslant x < 2 \Longrightarrow [x] = 1 \Longrightarrow f(x) = x - 1$
   si $x = 2 \Longrightarrow [x] = 2 \Longrightarrow f(x) = 2$
   $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ x-1, & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \\ 2, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

   $f'_-(1) = 0$ pendiente recta horizontal.
   $f_+(1) = 1$ pendiente recta diagonal.
   $f'(1) \nexists$ punta en $x = 1$.
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Si T es la tangente a $\left(\frac{x}{2}\right)^n + \left(\frac{y}{3}\right)^n = 2$, $n \in \mathbb{N}$ en $(2,3)$, demostrar que la suma de los segmentos que T determina sobre los ejes coordenados es 10.

   Solución.
   $\left(\frac{x}{2}\right)^n + \left(\frac{y}{3}\right)^n = 2$
   $n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} + n\left(\frac{y}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot y' = 0$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot y'=0\Longrightarrow y'=-\frac{3}{2}$
Ec. tg:

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$$
$$2y-6=-3x+6$$
$$3x+2y-12=0$$

Si $x=0\Longrightarrow y=6$
si $y=0\Longrightarrow x=4$
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Derivar:
$$y=\frac{\operatorname{sen}^3 e^{x^2}+\ln^4(x^2+1)}{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4+a^4}}$$

Solución.
$y=\dfrac{\operatorname{sen}^3 e^{x^2}+\ln^4(x^2+1)}{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4+a^4}}$
$y'=\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4-a^4}\left(3\operatorname{sen}^2 e^{x^2}\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x+4\ln^3(x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}}$
$-\dfrac{(\operatorname{sen}^3 e^{x^2}+\ln^4(x^2+1))\cdot\sec^2\sqrt{3x^4+a^4}\cdot\frac{12x^3}{2\sqrt{3x^4+a^4}}}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}}$
$y'=\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4-a^4}\left(3\operatorname{sen}^2 e^{x^2}\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x+4\ln^3(x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}}$
$-\dfrac{(\operatorname{sen}^3 e^{x^2}+\ln^4(x^2+1))\cdot\sec^2\sqrt{3x^4+a^4}\cdot\frac{6x^3}{\sqrt{3x^4+a^4}}}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}}$
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Sea $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$. Verificar que $4y''-6y'+3=0$.

Solución.
$y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$
$4y''-6y'+3=0$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos x}\cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}} - \sqrt{1-\cos x}\cdot \dfrac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1+\cos x}}}{1+\cos x} \\
&= \frac{1+\cos x}{2}\cdot \frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x+1-\cos x)}{(1+\cos x)2\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow y'' = 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore 4'' - 6y' + 3 = 0 - 3 + 3 = 0$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°4$ año 2011

1. Derivar:

$$y = \frac{x^{-\frac{3}{2}} - \sec\sqrt{x+4}}{\operatorname{sen}^3(e^{x^4-2})}$$

Solución.

$$y = \frac{x^{-\frac{3}{2}} - \sec\sqrt{x+4}}{\operatorname{sen}^3(e^{x^4-2})}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen}^3(e^{x^4-2})\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \sec\sqrt{x+4}\operatorname{tg}\sqrt{x+4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)}{\operatorname{sen}^6(e^{x^4-2})}$$

$$-\frac{(x^{-\frac{3}{2}} - \sec\sqrt{x+4})2\operatorname{sen}^2(e^{x^4-2})\cdot\cos(e^{x^4-2})\cdot e^{x^4-2}\cdot 4x^3}{\operatorname{sen}^6(e^{x^4-2})}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Si $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, verificar que $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

Solución.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln x^2+y^2$$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}(xy'-y) = \frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$xy' - yy' = x + y \Longrightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y'' = \frac{(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{x + xy' - y - yy' - x + xy' - y + yy'}{(x-y)^2}$$

$$y'' = \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x\frac{x+y}{x-y} - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x^2 + 2xy - 2xy + 2y^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

FIN .... FIN

3. Verificar que las rectas tangentes a las curvas:
$3x - 4y^3 - 2y \operatorname{arc\,tg} x^2 + y = 0$ y $y^2(x+y) = \frac{x}{3} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$ son perpendiculares entre si en el origen.

Solución.

$3x - 4y^3 - 2y \operatorname{arc\,tg} x^2 + y = 0$

$3 - 12y^2y' - 2y\frac{1}{1+x^4}2x - 2y' \operatorname{arc\,tg} x^2 + y' = 0$

en $(0,0)$: $\quad 3 + y' = 0 \Longrightarrow y' = -3 = m_{tg_1}$

$y^2(x+y) = \frac{x}{3} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$

$$y^2(1+y') + 2yy'(x+y) = \frac{1}{3} - \frac{y'}{y+1} + e^{xy}(xy' + y)$$

en $(0,0)$: $\quad 0 = \frac{1}{3} - y' \Longrightarrow y' = \frac{1}{3} = m_{tg_2}$

$\therefore -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ las tangentes son perpendiculares.

FIN .... FIN

4. Aplicando L'Hopital, calcular:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 4x^2)^{\frac{1}{x^4}}$

Solución.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x + 4\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 2\cos x}{-\operatorname{sen} x + 2\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{sen} 2x - 4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x}{-\cos x + 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{4}{1} = 4$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 4x^2)^{\frac{1}{x^4}}$

$y = (\cos 4x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ aplicando ln y $\lim\limits_{x\to 0}$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \ln\cos 4x^2$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 4x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} 4x^2 \cdot 8x}{\cos 4x^2 \cdot 4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{tg} 4x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} -2\frac{\operatorname{sen} 4x^2}{4x^2}\cdot\frac{4}{\cos 4x^2} = -8$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{-8}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°4$ año 2012

1. Verificar que la recta tangente a $x^3 + xy^2 + x^3y^3 = 3$ en $(1,1)$ pasa por $(6,-6)$.

   Solución.
   $x^3 + xy^2 + x^3y^3 = 3$
   $3x^2 + y^2 + x\cdot 2y\cdot y' + x^3\cdot 3y^2y' + 3x^2y^3 = 0$
   en $(1,1) : 3 + 2y' + 1 + 3y' + 3 = 0$

$$5y' = -7 \Longrightarrow m_t = -\frac{7}{5}$$

$$\therefore \text{Ec. tg: } y - 1 = -\frac{7}{5}(x-1) \Longrightarrow 7x + 5y - 12 = 0$$
$$\text{Para } (6,-6): \quad 42 - 30 - 12 = 0$$
$$\therefore \text{la recta tangente pasa por } (6,-6).$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+16})$. Verificar que:

$$f(3)\cdot f'(3) + \frac{2}{5}\ln(2) = \ln(2).$$

   Solución.

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+16})$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+16})}\cdot\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+16})}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+16}+x}{\sqrt{x^2+16}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}$$
$$f'(2) = \frac{1}{5}$$

$$f(3)\cdot f'(3)+\frac{2}{5}\ln(2)=[\ln(3+5)]\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\ln(2)=\frac{3}{5}\ln(2)+\frac{2}{5}\ln(2)=\ln 2$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Aplicar logarítmo y derivar:

$$y=\frac{(\operatorname{sen}(x^2-e^{2x}))^{\frac{1}{3}}(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{x^{x^3}}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{(\operatorname{sen}(x^2-e^{2x}))^{\frac{1}{3}}(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{x^{x^3}}\\
\ln y &= \frac{1}{3}\ln\operatorname{sen}(x^2-e^{2x})+2\ln(\operatorname{arc\,sen}(x))-x^3\ln x\\
\frac{1}{y}y' &= \frac{1}{3}\frac{\cos(x^2-e^{2x})(2x-2e^{2x})}{\operatorname{sen}(x^2-e^{2x})}+2\frac{1}{\operatorname{arc\,sen}(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^3}{x}-3x^2\ln x\\
y' &= y\left[\frac{2}{3}\frac{(x-e^{2x})\cos(x^2-e^{2x})}{\operatorname{sen}(x^2-e^{2x})}+\frac{2}{\operatorname{arc\,sen}(x)\sqrt{1-x^2}}-x^2-3x^2\ln x\right]
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Aplicando L'Hopital, calcular:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)+\ln\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}\right)^{x+3}$

Solución.

a) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)+\ln\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{3x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{x(1-x)(1+x)}{(1-x)x}}{3x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{3x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3(1+x)}=\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}\right)^{x+3}$$
$$y=\left(\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}\right)^{x+3}$$

$$\text{lím}_{x\to 0^+} \ln y = \text{lím}_{x\to 0^+}(x+3)\ln\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1} = \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}}{(x+3)^{-1}}$$
$$= \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{\frac{2x^2+x-1}{2x^2-4}\cdot\frac{(2x^2+x-1)4x-(2x^2-4)(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2}}{-(x+3)^{-2}}$$
$$= \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{(8x^3+4x^2-4x-8x^3-2x^2+16x+4)(x+3)^2}{-(2x^2-4)(2x^2+x-1)}$$
$$= \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{(2x^2+12x+4)(x+3)^2}{-(2x^2-4)(2x^2+x-1)} = \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{2x^4+\ldots}{-(4x^4+\ldots)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} y = e^{-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°5$ año 2012

1. *a*) Determinar m y n de modo que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(mx+n-\frac{x^2-5\sqrt[3]{x^2+3}+4}{x+1}\right) = -\frac{3}{4}$$

   b) Utilizando L'Hopital, calcular:

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Solución.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(mx+n-\frac{x^2-5\sqrt[3]{x^2+3}+4}{x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{mx^2+mx+nx+n-x^2+5\sqrt[3]{x^2+3}-4}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(m-1)x^2+(m+n)x+5\sqrt[3]{x^2+3}+n-4}{x+1}$$

Es necesario que el límite $\exists \Longrightarrow m-1=0 \Longrightarrow \boxed{m=1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+n)x+5\sqrt[3]{x^2+3}+n-4}{x+1} = 1+n = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$$

$$n = -\frac{3}{4}-1 = -\frac{7}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

$y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ aplicando ln y $\lim\limits_{x\to 0^+}$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x-1}-3\sqrt{3-x}}{x-2} & \text{si } 1 < x < 2, \\ a, & \text{si } x = 2, \\ \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^2+x-6}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 2$.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x-1}-3\sqrt{3-x}}{x-2} & \text{si } 1 < x < 2, \\ a, & \text{si } x = 2, \\ \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^2+x-6}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$f(2) = a$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3\sqrt{x-1}-3\sqrt{3-x}}{x-2} \cdot \frac{3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}}{3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{9(x-1)-9(3-x)}{(x-2)(3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x})}$$

$$= 9 \lim_{x\to 2^-} \frac{2(x-2)}{(x-2)(3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x})} = 9 \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore \boxed{a = 3}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Verificar que la curva definida por $2xy + \operatorname{sen} y = 2x$ pasa por el punto $P(0, \pi)$. Además encontrar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en el punto P.

Solución.

$2xy + \operatorname{sen} y = 2x$

$2 \cdot 0 \cdot \pi + \operatorname{sen} \pi = 0 + 0 = 0$

$\therefore P(0, \pi) \in$ curva

$2xy' + 2y + \cos y \cdot y' = 2$

$2\pi - y' = 2 \Longrightarrow m_T = 2\pi - 2$
Ec. Tg: $y - \pi = (2\pi - 2)x$
Ec. Normal: $y - \pi = \dfrac{-1}{2\pi - 2}x = \dfrac{1}{2 - 2\pi}x$

$\boxed{\text{FIN}}$ . . . . $\boxed{\text{FIN}}$

4. Hallar los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

Como debe ser continua en $x = 1$, se debe cumplir que $a + b = \dfrac{1}{2}$
Además

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1, \\ \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

$f'_{-}(1) = a, \quad f'_{+}(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} \Longrightarrow b = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ . . . . $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n^\circ 4$ año 2013

1. Sea $f(x)=\begin{cases} 3x+x^2\operatorname{sen}(x^3+1) & \text{si } x\leqslant 0,\\ (\ln e^{3x})\cdot\ln(1+x), & \text{si } x>0,\end{cases}$
   Calcular $f'(0)$ y $f'(e)$, si es que existen.

   Solución.
   $f(x)=\begin{cases} 3x+x^2\operatorname{sen}(x^3+1) & \text{si } x\leqslant 0,\\ (\ln e^{3x})\cdot\ln(1+x), & \text{si } x>0,\end{cases}$
   Como f es continua en $x=0$, calcularemos $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$
   $f'(x)=\begin{cases} 3+x^2\cos(x^3+1)\cdot 3x^2+2x\operatorname{sen}(x^3+1) & \text{si } x<0,\\ 3x\cdot\frac{1}{1+x}+3\ln(1+x), & \text{si } x>0,\end{cases}$
   $\therefore f'_-(0)=3$ y $f'_+(0)=0$ son distintos $\Longrightarrow f'(0)\nexists$
   $f'(e)=\dfrac{3e}{1+e}+3\ln(1+e)$
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x)=\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+3}}$. Comprobar que:

$$2y'+\frac{4(x^2+3)}{x}y''=-\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

   Solución.
   $f(x)=\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+3})$
   $f'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{2\sqrt{x^2+3}(x+\sqrt{x^2+3})}=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$
   $f''(x)=-\dfrac{1}{4}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\dfrac{-x}{2(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$
   $\therefore 2y'+\dfrac{4(x^2+3)}{x}y''=\dfrac{2}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}+\dfrac{4(x^2+3)}{x}\cdot\dfrac{-x}{2(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$
   $=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+3}}$
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Determinar el o los puntos de $x+\sqrt{xy}+y=1$, en los cuales las rectas tangentes tienen pendiente igual a -1 siendo $x>0$, $y>0$

   Solución.
   $x+\sqrt{xy}+y=1\Longrightarrow 1+\dfrac{xy'+y}{2\sqrt{xy}}+y'=0\Longrightarrow y'=\dfrac{-y-2\sqrt{xy}}{x+2\sqrt{xy}}$
   Como $m=y'=-1$

$$1 + \frac{-x+y}{2\sqrt{xy}} - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{y = x}$$

$$\therefore x + x + x = 3x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{3} = y \qquad \therefore P\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

FIN .... FIN

4. Determinar $m \in \mathbb{R}$ tal que las curvas $5x - 4y^3 - 2y \cdot \operatorname{arc\,tg} x^2 + y = 0$ y $y^2(x+y) = \dfrac{4x}{m} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$ sean perpendiculares entre sí en el origen.

   Solución.

   $$5x - 4y^3 - 2y \cdot \operatorname{arc\,tg} x^2 + y = 0$$

   $$5 - 12y^2y' - 2y \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x + 2y' \operatorname{arc\,tg} x^2 + y' = 0$$

   en $(0,0) \Longrightarrow y_1' = -5$

   $$y^2(x+y) = \frac{4x}{m} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$$

   $$y^2(1+y') + 2yy'(x+y) = \frac{4}{m} - \frac{y'}{y+1} + e^{xy}(xy' + y)$$

   en $(0,0) : 0 = \dfrac{4}{m} - y_2' \Longrightarrow y_2' = \dfrac{4}{m}$

   $$\therefore y_1' \cdot y_2' = -5 \cdot \frac{4}{m} = -1 \Longrightarrow \boxed{m = 20}$$

FIN .... FIN

Prueba $n°5$ año 2013

1. Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que:

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{ae^x + \ln x}{e^x + x} = 3$$

   Solución.

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{ae^x + \ln x}{e^x + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ae^x + \frac{1}{x}}{e^x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{axe^x + 1}{x(e^x + 1)}$$

   $$= \lim_{x \to \infty} \frac{axe^x + ae^x}{xe^x + e^x + 1} = a \lim_{x \to \infty} \frac{xe^x + e^x + e^x}{xe^x + e^x + e^x} = \boxed{a = 3}$$

FIN .... FIN

2. Calcular:

   $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$$

Solución.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$

$\left(\dfrac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$ aplicando ln y $\lim\limits_{x\to 0}$

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{x\to 0} y &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}\cdot \ln\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}\cdot\frac{(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x)3\cos 3x+(\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x)3\cos 3x}{(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x)^2}}{3\cos 3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 3x}=\frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a}=\frac{2}{\operatorname{sen} a}
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{\frac{2}{\operatorname{sen} a}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Determine a, b, c y d tal que $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sea tangente al eje X en $x=2$ y tenga un punto de inflexión en $(0,4)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d\\
f'(x) &= 3ax^2+2bx+c \Longrightarrow en\ \ x=2: \quad 12a+4b+c=0\\
f''(x) &= 6ax+2b \Longrightarrow en\ \ x=0: \quad 2b=0 \Longrightarrow \boxed{b=0}
\end{aligned}$$

$(0,4)\in f: \quad \boxed{d=4}$

$(2,0)\in f: \quad 8a+4b+2c+d=0$

$12a+c=0$

$8a+2c+4=0$

$\Longrightarrow 12a+c=0$

$4a+c+2=0 \Longrightarrow 8a-2=0 \Longrightarrow \boxed{a=\dfrac{1}{4}}$

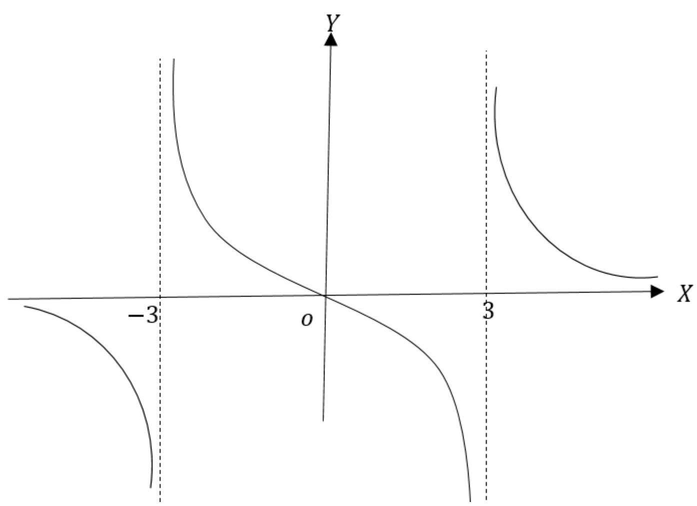
$c=-\dfrac{12}{4}=-3$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Analizar y graficar determinado dominio, intersección con los ejes, extremos, intervalos de monotonía, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

$$y = \frac{x}{x^2-9}$$

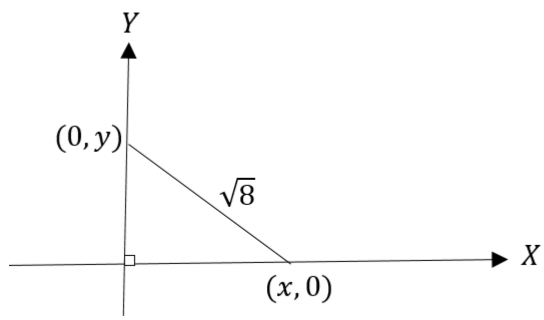
Solución.
$y = \dfrac{x}{x^2-9}$. Intersección $x = 0 \Longrightarrow y = 0$; $y = 0 \Longrightarrow x = 0$
$Domf = \{x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}\}$
Asíntotas: $x = \pm 3$
$y' = \dfrac{x^2-9-x\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-x^2-9}{(x^2-9)^2} < 0 \ \forall x \neq \pm 3$
$y'' = \dfrac{(x^2-9)^2(-2x)+(x^2-9)2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} = \dfrac{-2x^3+18x+4x^3+36x}{(x^2-9)^3}$
$= \dfrac{2x^3+54x}{(x^2-9)^3} = \dfrac{2x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}$
Si $x < -3 : f' < 0$ y $f'' < 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia abajo
Si $-3 < x < 0 : f' < 0$ y $f'' > 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia arriba; $x = -3$ es asńtota
Si $0 < x < 3 : f' < 0$ y $f'' < 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia abajo
en $x = 0$ hay punto de inflexión con $f(0) = 0$
Si $x > 3 : f' < 0$ y $f'' > 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia arriba; $x = 3$ es asńtota



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Determinar el área máxima de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{8}cm$.

Solución.



$x^2 + y^2 = 8 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{8 - x^2}$

$A = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x\sqrt{8 - x^2}}{2}$

$A' = \dfrac{1}{2}\left(x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{8 - x^2}} + \sqrt{8 - x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{-x^2 + 8 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \dfrac{-x^2 + 4}{\sqrt{8 - x^2}}$

$-x^2 + 4 = 0$

$\Longrightarrow x = \pm 2$

Si $x < 2 \Longrightarrow A' > 0 \Longrightarrow$ A crece

Si $x > 2 \Longrightarrow A' < 0 \Longrightarrow$ A decrece

en $x = 2$ hay un máximo.

$\therefore A = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{8 - 4}}{2} = 2 \cdot \dfrac{2}{2} = 2$ área máxima.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Pruebas Desarrolladas

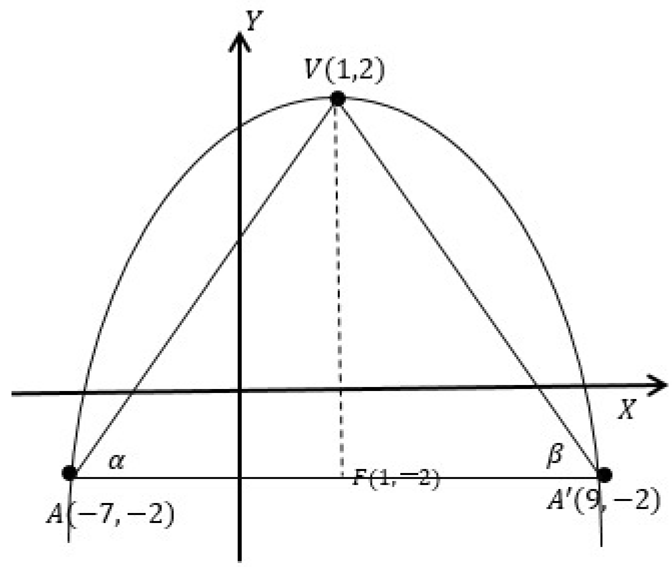
años 2009 al 2013

Prueba $n°1$ año 2009

1. $C: x^2 - 2x + 16y - 31 = 0$ y AVA' el triángulo formado por el lado recto de la curva dada y los segmentos obtenidos al unir el vértice de ella con cada extremo del lado recto. Demostrar que los ángulos interiores del triángulo, correspondientes al lado recto, son iguales.

   Solución.
   $x^2 - 2x + 16y - 31 = 0$

   $x^2 - 2x + 1 = -16y + 31 + 1 = -16y + 32$
   $(x-1)^2 = -16(y-2)$



   $4p = -16 \quad p = -4 \Longrightarrow F(1,-2)$
   $|\overline{AA'}| = 16 \Rightarrow \quad A'(9,-2)$ y $A(-7,-2)$
   $m_{\overline{AV}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \quad m_{\overline{AA'}} = 0 \; m_{\overline{A'V}} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$
   $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\frac{1}{2} - 0}{1+0} = \dfrac{1}{2} \quad \operatorname{tg}\beta = \dfrac{0 - (-\frac{1}{2})}{1+0} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = \beta$

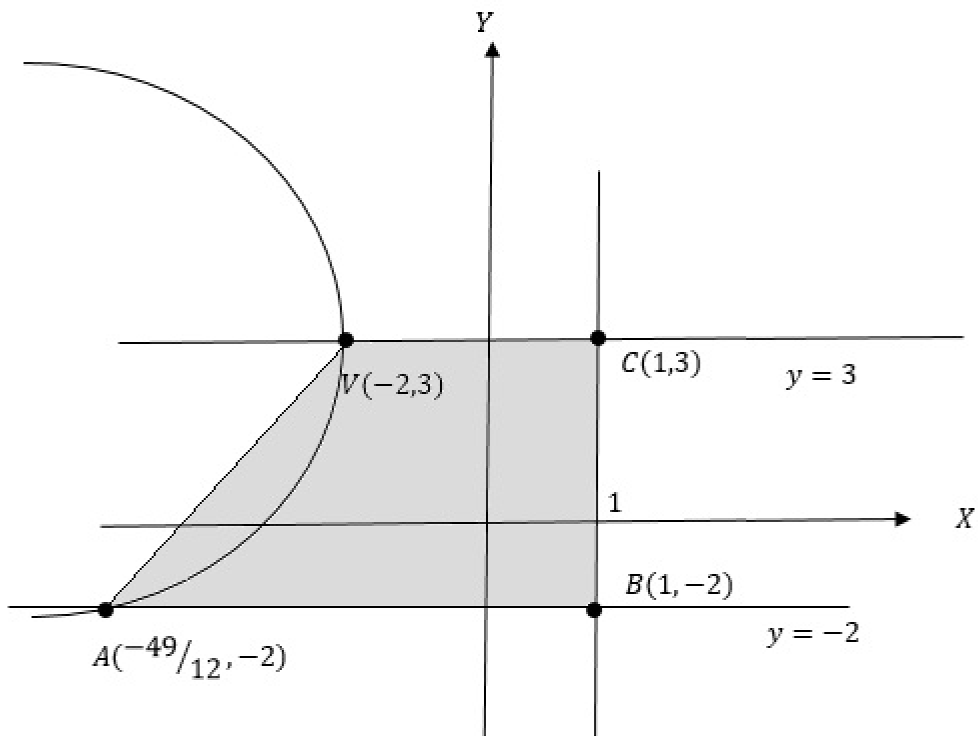
   FIN .... FIN

2. Sea $C: y^2+12x-6y+33=0$. Determinar el área de la región encerrada por la cuerda que une al vértice de C con el punto de intersección de C con $y=-2$, el eje focal de C, la directriz de C y $y=-2$

Solución.

$y^2+12x-6y+33=0$

$y^2-6y+9=-12x-33+9=0 \qquad (y-3)^2=-12x-24=-12(x+2)$



Si $y=-2 \Longrightarrow 4+12x+12+33=0 \Longrightarrow x=-\dfrac{49}{12} \Longrightarrow A(-\frac{49}{12},-2)$

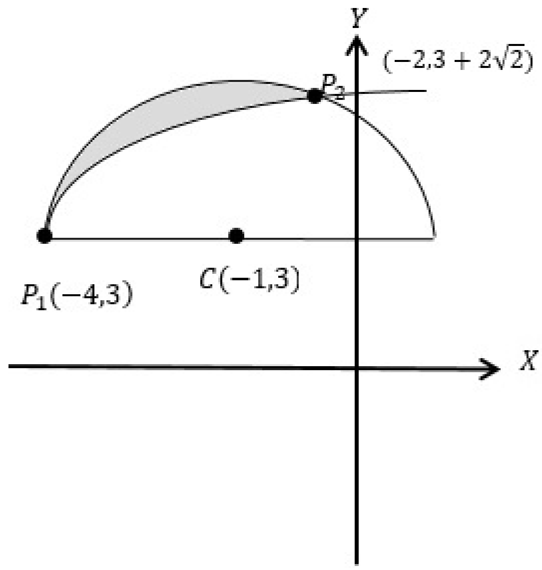
$4p=-12 \Longrightarrow p=-3 \Longrightarrow \ \ directriz: x=1$

$A=\dfrac{|\overline{AB}|+|\overline{VC}|}{2}\cdot|\overline{BC}|=\dfrac{1+\frac{49}{12}+1+2}{2}(3+2)=\dfrac{97}{24}\cdot 5=\dfrac{485}{24}\ \ u.a$

FIN .... FIN

3. Identificar y gráficar $y = 3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x}$, $y = 3 + 2\sqrt{x + 4}$. Determinar sus puntos de intersección y achurar la región que ellas encierran.

Solución.



$y = 3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x} \Longrightarrow (y - 3)^2 = 8 - x^2 - 2x \Longrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y - 3)^2 = 9 \Longrightarrow$
$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$
$\therefore\ y = 3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x}$ es la mitad de una circunferencia.
$y = 3 + 2\sqrt{x + 4} \Longrightarrow (y - 3)^2 = 4(x + 4)$
$\therefore\ y = 3 + 2\sqrt{x + 4}$ es la mitad de una parábola.
Puntos de intersección:

$3 + \sqrt{8 - x^2 - 2x} = 3 + 2\sqrt{x + 4}$
$8 - x^2 - 2x = 4x + 16$
$x^2 + 6x + 8 = 0 \Longrightarrow (x + 4)(x + 2) = 0 \Longrightarrow$
$x = -4 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow P_1(-4, 3)$
$x = -2 \Longrightarrow y = 3 + 2\sqrt{2} \Longrightarrow P_2(-2, 3 + 2\sqrt{2})$

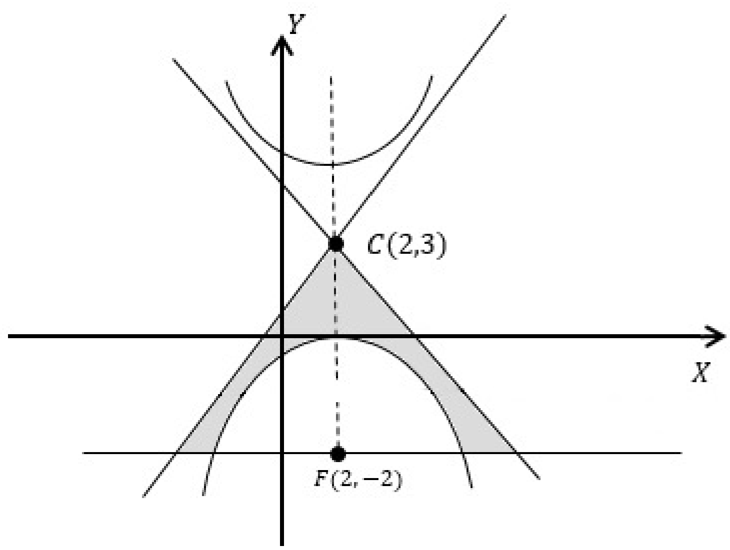
El punto P_1 y P_2 son puntos de intersección.
Las curvas dadas encierran la región achurada.
FIN .... FIN

4. Sea $C : 9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$. Determinar las ecuaciones de las asíntotas y achurar claramente la región limitada por ellas, la rama de C con $y \leqslant 0$ y la recta que contiene al lado recto de la misma rama.

Solución.

$9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y = -36$

$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = -36 + 36 - 144$
$9(x-2)^2 - 16(y-3)^2 = -144$
$\dfrac{(y-3)^2}{9} - \dfrac{(x-2)^2}{16} = 1$. De donde $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$
$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$ y $c^2 - a^2 = b^2 \Longrightarrow c^2 = 25 \Longrightarrow c = 5$

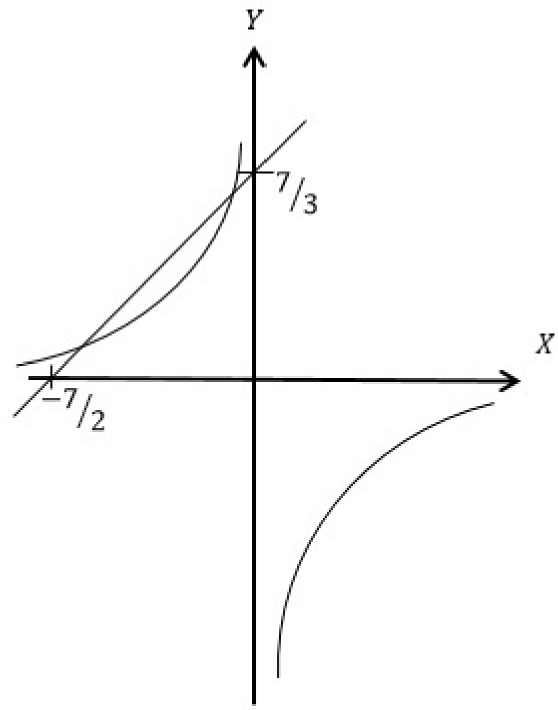


Ecuación asíntotas: $16(y-3)^2 - 9(x-2)^2 = 0$
$4(y-3) - 3(x-2) = 0 \Longrightarrow 3x - 4y + 6 = 0$
$4(y-3) + 3(x-2) = 0 \Longrightarrow 3x + 4y - 18 = 0$
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°1$ año 2010

1. Determinar el área del triángulo formado por las asíntotas de $xy=-4$ y por la asíntota, de pendiente positiva, de $4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$.

   Solución.



$4(x^2+4x+4)-9(y^2-2y+1)=-43+16-9=-36$
$9(y-1)^2-4(x+2)^2=36$
$3(y-1)-2(x+2)=0$
$3(y-1)+2(x+2)=0$
$3y-3-2x-4=0 \Longrightarrow \boxed{2x-3y+7=0}$
$3y-3+2x+4=0 \Longrightarrow \boxed{2x+3y+1=0}$ $2x-3y+7=0$ es la asíntota de pendiente positiva.
Si $y=0 \Longrightarrow x=-\dfrac{7}{2}$ Si $x=0 \Longrightarrow y=\dfrac{7}{3}$

$$\therefore\ A_{\triangle}=\frac{|\frac{-7}{2}|\cdot\frac{7}{3}}{2}=\frac{49}{12}\ u.a.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

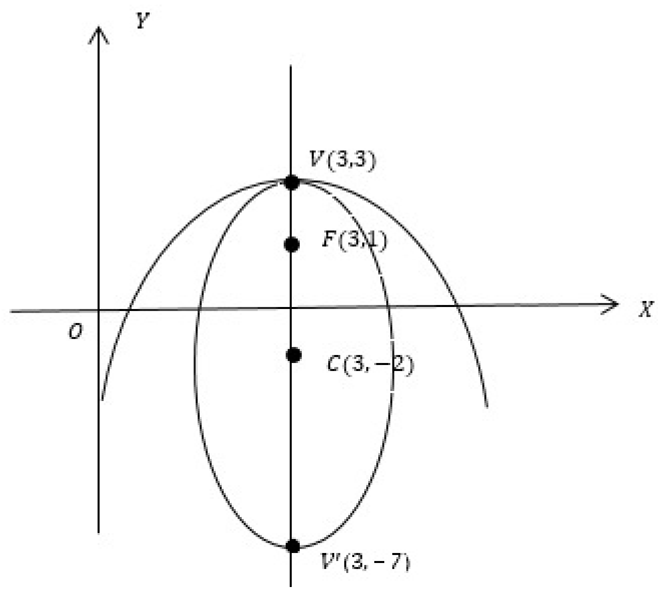
2. Determinar la ecuación de una elipse sabiendo que tiene su centro sobre $y = -2$, uno de sus vértices coincide con el de la curva $6x - 8y + 15 - x^2 = 0$ y uno de sus focos coincide con el foco de la curva dada.

Solución.

$x^2 - 6x + 9 = -8y + 15 + 9 = -8y + 24$

$(x-3)^2 = -8(x-3)$

$V(3,3) \quad 4p = -8 \quad p = -2 \quad \therefore \; F = (3,1)$



$$\left.\begin{array}{c} 2a = 10 \Longrightarrow a = 5 \\ 2c = 6 \Longrightarrow c = 3 \end{array}\right\}. \; a^2 - c^2 = b^2 \Longrightarrow b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4 \quad C(3,-2)$$

$$\therefore Ec. \; \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de C_1 : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ y tiene su centro sobre la cuerda común de C_1 y C_2.

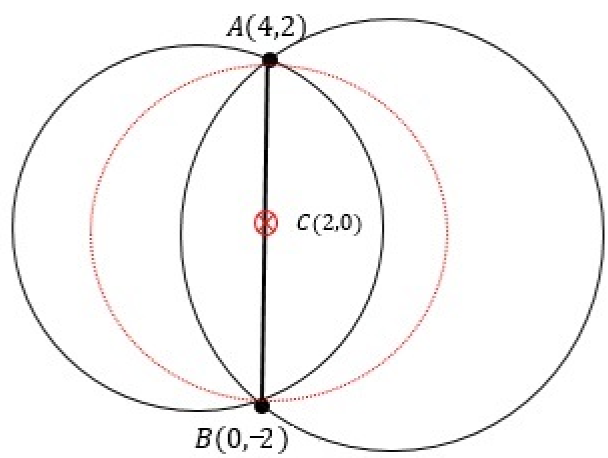
Solución.

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0 \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \tag{2}$$

Restando (1) y (2)
$8x - 8y - 16 = 0 \quad x = y + 2$
Reemplazando en (2)
$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 6y - 12 + 2y = 0$

$$2y^2 = 8 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2 \Longrightarrow y = 2 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow A(4,2)$$
$$\Longrightarrow y = -2 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow B(0,-2)$$



El centro de la circunferenciar es punto medio entre A y B, es decir, $C(2,0)$ y el radio es $r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$$\therefore \ \ Ec.\ circunf : (x-2)^2 + y^2 = 8$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. En un mismo sistema de coordenadas graficar claramente: $y = 4$, $x = -2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = \sqrt{5 - x^2}$, achurando la región que ellas limitan.
Determinar los puntos de intersección correspondientes a la región.

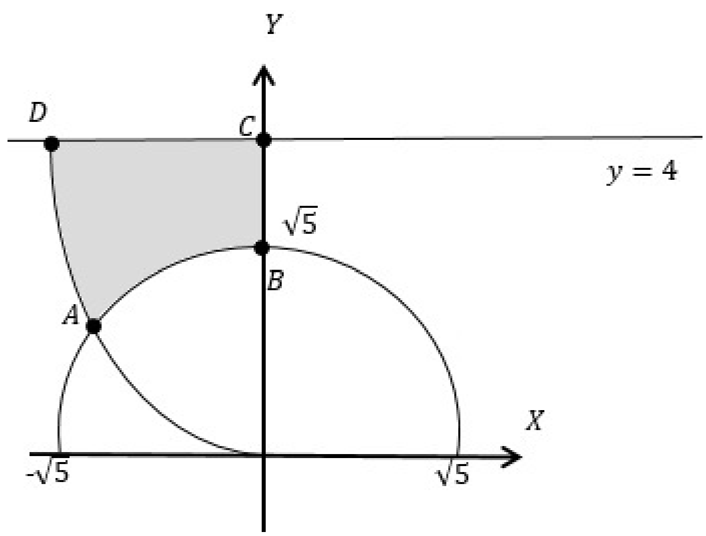
Solución.

$y = 4$

$x = -2\sqrt{y} \quad (x^2 = 4y)$

$x = 0$

$y = \sqrt{5 - x^2} \quad (x^2 + y^2 = 5)$



Para A:

$$\begin{matrix} x^2 = 4y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{matrix} \Longrightarrow 4y + y^2 - 5 = 0 \Longrightarrow y^2 + 4y - 5 = 0 \Longrightarrow (y+5)(y-1) = 0$$

$y = 1 \Longrightarrow x = -2 \Longrightarrow A(-2, 1)$

Para B: $y = \sqrt{5 - x^2}$, $x = 0 \Longrightarrow B(0, \sqrt{5})$

Para C: $y = 4$, $x = 0 \Longrightarrow C(0, 4)$

Para D: $x = -2\sqrt{y}$, $y = 4 \Longrightarrow x = -4 \Longrightarrow D(-4, 4)$

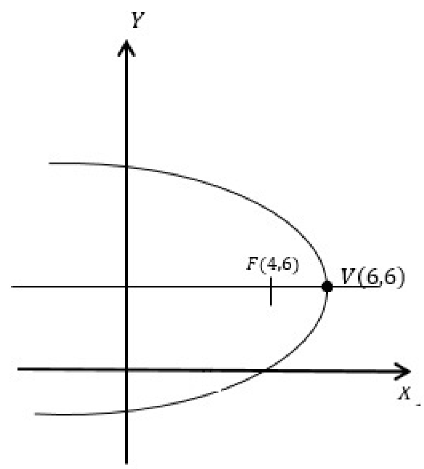
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°1$ año 2011

1. Determinar la ecuación de la hipérbola, en la forma ordinaria, cuyas asíntotas son $2x + y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, su eje focal es paralelo al eje X y pasa por el foco de la curva $y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$.

   Solución.
   $y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$

   $y^2 - 12y + 36 = -8x + 12 + 36 = -8x + 48$
   $(y - 6)^2 = -8(x - 6)$



   $4p = -8 \Longrightarrow p = -2 \quad \therefore F(4, 6)$

$$\begin{aligned} (2x + y - 3)(2x - y - 1) &= k \\ 4x^2 - 2xy - 2x + 2xy - y^2 - y - 6x + 3y + 3 &= k \\ 4x^2 - 8x - y^2 + 2y + 3 &= k \end{aligned}$$

   $(4, 6) \in \;\; Hip: \;\; 64 - 32 - 36 + 12 + 3 = k \therefore k = 11$

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) &= 11 - 3 + 4 - 1 \\ 4(x - 1)^2 - (y - 1)^2 &= 11 \\ \therefore \quad \frac{(x-1)^2}{\frac{11}{4}} - \frac{(y-1)^2}{11} &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Dadas las ecuaciones $9x^2 + 2y^2 + 36x - 12y + 36 = 0$, $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 65 = 0$, $x = 4$. Identificarlas y graficarlas claramente en un mismo sistema de ejes coordenados, achurando la región que ellas encierrran.

Solución.

$9(x^2 + 4x + 4) + 2(y^2 - 6y + 9) = -36 + 36 + 18$

$\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$ *elipse* $C(-2, 3)$

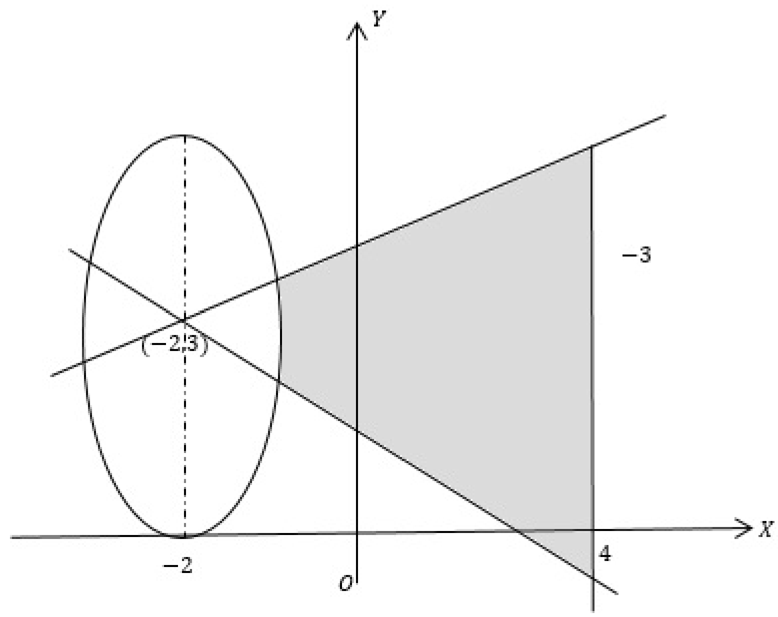
$4(x^2 + 4x + 4) - 9(y^2 - 6y + 9) = 65 + 16 - 81 = 0$

$4(x+2)^2 - 9(y-3)^2 = 0$

$2(x+2) - 3(y-3) = 0 \quad 2(x+2) + 3(y-3) = 0$

$2x - 3y + 13 = 0 \quad 2x + 3y - 5 = 0$ Asíntotas hipérbola

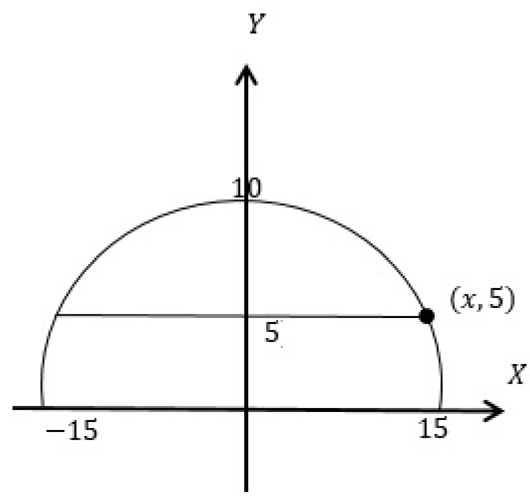
$x = 4$ *recta* $\parallel$ eje Y



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. El arco de un puente es semielíptico, con el eje mayor horizontal. La base del arco tiene $30m$ de longitud y su parte más alta, con respecto a la base, mide $10m$. Determinar la longitud de la cuerda paralela a la base y a $5m$ de altura de ella.

Solución.

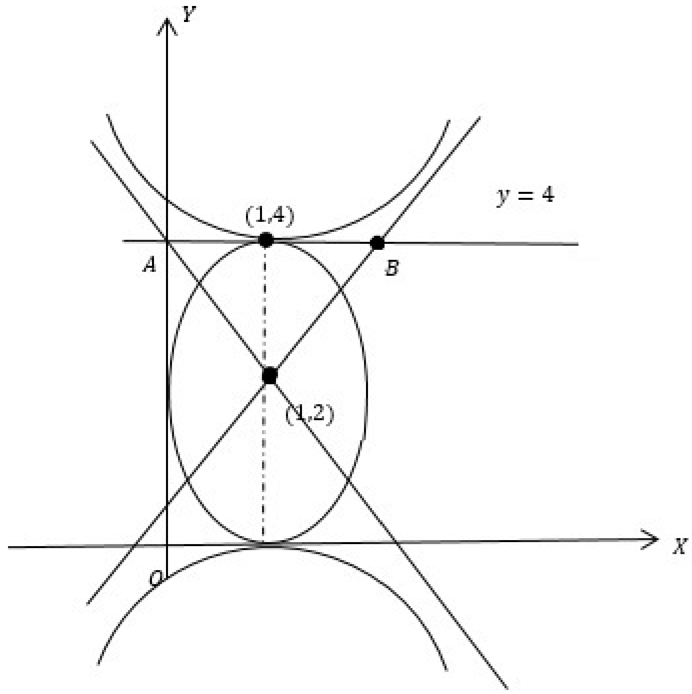


$\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{100} = 1$
$100x^2 + 225y^2 = 22500$
$100x^2 + 225 \cdot 25 = 22500 \Longrightarrow 100x^2 = 22500 - 5625 = 16875$
$x^2 = \dfrac{16875}{100} = \dfrac{625 \cdot 27}{100} \Longrightarrow x = \pm \dfrac{25 \cdot 3\sqrt{3}}{10} \Longrightarrow 2x = 15\sqrt{3}$
FIN .... FIN

4. Sea $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$. Su eje mayor coincide con el eje transverso de una hipérbola que pasa por $(0, 2 - 2\sqrt{5})$. Determinar el área del triángulo formado por las asíntotas de ella y el segmento paralelo al eje X que pasa por uno de los vértices de la hipérbola.

Solución.
$4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

$4(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Longrightarrow (x-1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1 \Longrightarrow a^2 = 4 \Longrightarrow a = 2$
$b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$



Hipérbola: $a = 2 \Longrightarrow \dfrac{(y-2)^2}{a^2} - \dfrac{(x-1)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2(y-2)^2 - 4(x-1)^2 = 4b^2$
Pero $(0, 2-2\sqrt{5}) \in \ \ Hip: \ \ 20b^2 - 4 = 4b^2 \Longrightarrow 16b^2 = 4 \Longrightarrow b^2 = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}(y-2)^2 - 4(x-1)^2 = 1 \Longrightarrow (y-2)^2 - 16(x-1)^2 = 4$
Asíntotas:
$y - 2 - 4(x-1) = 0 \Longrightarrow 4x - y - 2 = 0$
$y - 2 + 4(x-1) = 0 \Longrightarrow 4x + y - 6 = 0$

$$Si \ \ y = 4 \Longrightarrow x = \frac{3}{2} \Longrightarrow B\left(\frac{3}{2}, 4\right)$$
$$x = \frac{1}{2} \Longrightarrow A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

$$\therefore A_{\triangle} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} \cdot 2 = 1 \ \ u.a.$$

FIN .... FIN

Prueba $n°1$ año 2012

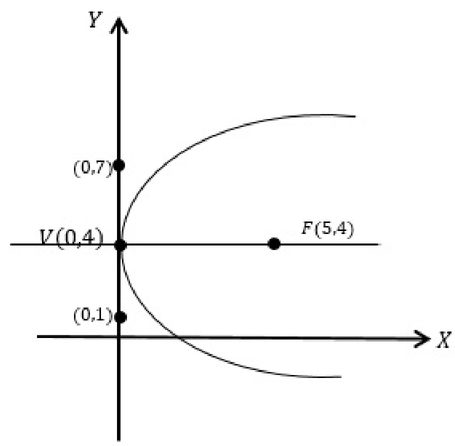
1. Determinar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto medio de la cuerda común a las curvas $C_1 : x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 7 = 0$ y cuyo foco es el centro de C_2.

   Solución.

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \quad C_1(-2, 4) \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 7 = 0 \quad C_2(5, 4) \tag{4}$$

   Restando (1) y (2)
   $14x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y^2 - 8y + 7 = 0 \Longrightarrow (y-7)(y-1) = 0 \Longrightarrow y = 7, \;\; y = 1$
   $\Longrightarrow (0, 7), (0, 1)$ pto. medio $(0, 4)$
   Ec. parábola:
   $(y-k)^2 = 4p(x-h), p > 0 \; |\overline{VF}| = 5$
   $\therefore \; (y-4)^2 = 20x$

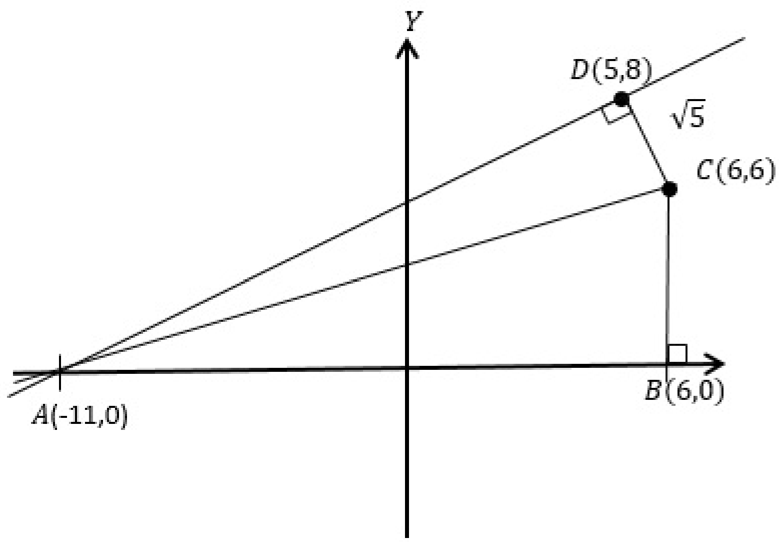


FIN .... FIN

2. Sea $C : 2x^2 + 2y^2 - 24x - 24y + 134 = 0$. Determinar el área del cuadrilátero formado por la tangente a C en $(5, 8)$, el eje X, el radio de C correspondiente al punto de tangencia dado y la perpendicular trazada desde el centro de C al eje X.

Solución.

$$C: 2x^2+2y^2-24x-24y+134=0$$
$$x^2+y^2-12x-12y+67=0 \quad C(6,6) \quad r=\sqrt{5}$$



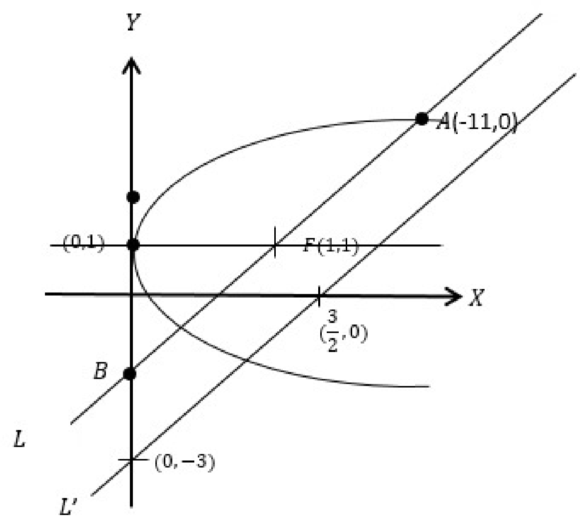
$m_r = \dfrac{2}{-1} = -2 \Longrightarrow m_T = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow ec.\ tg \quad y-8=\frac{1}{2}(x-5) \Longrightarrow x-2y+11=0$
$\Longrightarrow y=0 \Longrightarrow x=-11 \Longrightarrow A(-11,0),\ \ B(6,0)$
$A_{\triangle ABC} = \dfrac{17\cdot 6}{2} = 51.\ |\ \overline{AD}\ | = \sqrt{256+64} = 8\sqrt{5}$
$A_{\triangle ACD} = \dfrac{8\sqrt{5}\sqrt{5}}{2} = 20$

$$A = 51+20 = 71\ \ u.a$$

FIN .... FIN

3. Determinar los puntos de intersección de la recta L con $C: y^2-4x-2y+1=0$, sabiendo que L pasa por el foco de C y es paralela a $\dfrac{x}{\frac{3}{2}} - \dfrac{y}{3} = 1$.

Solución.
$y^2 - 2y + 1 = 4x \Longrightarrow (y-1)^2 = 4x$



$4p = 4$
$p = 1 \Longrightarrow F(1,1)$
Ec. $L : y - 1 = \dfrac{3 \cdot 2}{3}(x-1) \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0 \Longrightarrow 2x = y + 1 \Longrightarrow (y-1)^2 = 2(y+1) \Longrightarrow y^2 - 2y + 1 = 2y + 2 \Longrightarrow y^2 - 4y - 1 = 0$
$y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$
$\therefore x = \dfrac{2+\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow A\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\right)$
$x = \dfrac{2-\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow B\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{5}\right)$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Hallar la ecuación de la elipse cuyo eje focal es paralelo al eje X, su centro es el vértice de $x = 2y^2 + 12y + 24$ y corta a los ejes X e Y determinando segmentos cuyas longitudes son 16 y 8, respectivamente.

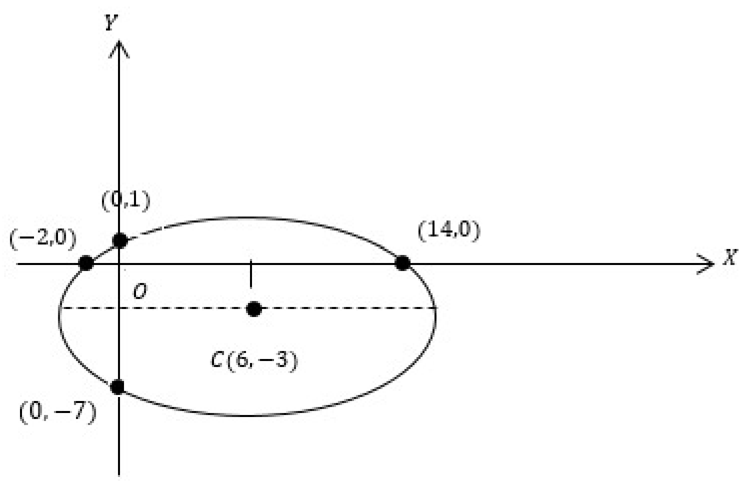
Solución.

$x = 2y^2 + 12y + 24 \Longrightarrow 2(y^2 + 6y + 9) = x - 24 + 18 = x - 6 \Longrightarrow (y+3)^2 = \frac{1}{2}(x-6)$

$\therefore V(6, -3)$

$$Ec.\ elipse : \frac{(x-6)^2}{a^2} + \frac{(y+3)^2}{b^2} = 1$$

Intersección con los ejes:
Segmento de 16 unidades en el eje $X \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(14, 0)$
Segmento de 8 unidades en el eje $Y \Longrightarrow (0, 1)$ y $(0, -7)$



$(0,1) \in Elipse :\ \frac{36}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Longrightarrow 36b^2 + 16a^2 = a^2b^2$
$(-2,0) \in Elipse :\ \frac{64}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \Longrightarrow 64b^2 + 9a^2 = a^2b^2 \Longrightarrow$
$36b^2 + 16a^2 = 64b^2 + 9a^2 \Longrightarrow 7a^2 = 28b^2 \Longrightarrow a^2 = 4b^2 \Longrightarrow 36b^2 + 64b^2 = 4b^4 \Longrightarrow$
$4b^2 = 100 \Longrightarrow b^2 = 25 \Longrightarrow a^2 = 100$

$$\therefore \frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

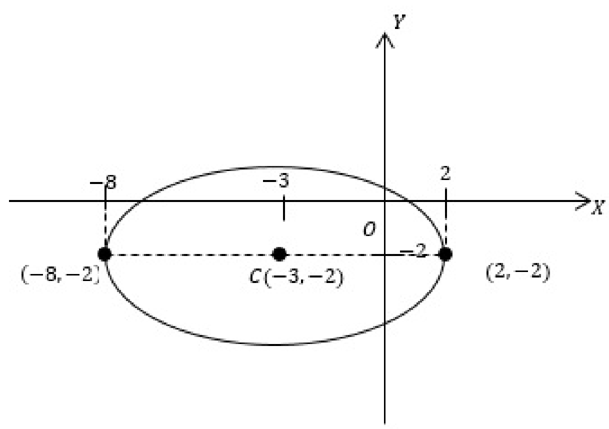
Prueba $n°1$ año 2013

1. Determinar la ecuación de la elipse sabiendo que los extremos de su eje mayor son el vértice y el foco de $y^2 - 40x + 4y - 316 = 0$ y que la longitud de sus lados rectos es igual al diámetro de $25x^2 + 25y^2 - 50x - 50y - 31 = 0$.

Solución.

$y^2 + 4y + 4 = 40x + 316 + 4 = 40x + 320$

$(y+2)^2 = 40(x+8)$



$4p = 40 \Longrightarrow p = 10$

$\therefore\ V(-8,-2)\, y\, F(2,-2)$

$\therefore\ 2a = 10 \Longrightarrow \boxed{a = 5}$

$\therefore\ C(-3,-2)$

$$25x^2 + 25y^2 - 50x - 50y = 31$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 2y + 1) = 31 + 50$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{25} \Longrightarrow r = \frac{9}{5} \Longrightarrow 2r = d = \frac{18}{5}$$

$$\therefore\ \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5} \Longrightarrow b^2 = 9$$

$$Ec.\, elipse : \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

FIN .... FIN

2. Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es igual a la longitud del segmento que se forma al intersectar la curva $18y - x^2 - 6x + 27 = 0$ con el eje X y cuyo centro es el vértice de dicha curva.

Solución.

$x^2 + 6x + 9 = 18y + 27 + 9 = 18y + 36$

$(x+3)^2 = 18(y+2) \Longrightarrow V(-3,-2) = C_{\otimes}$

$y = 0 \Longrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$

$(x+9)(x-3) = 0$

$x_1 = -9 \quad y \quad x_2 = 3$

$d_{x_1x_2} = 12 = d_{\otimes} \Longrightarrow 2r = 12 \Longrightarrow \boxed{r = 6}$

$$Ec.\, circunf:\ (x+3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

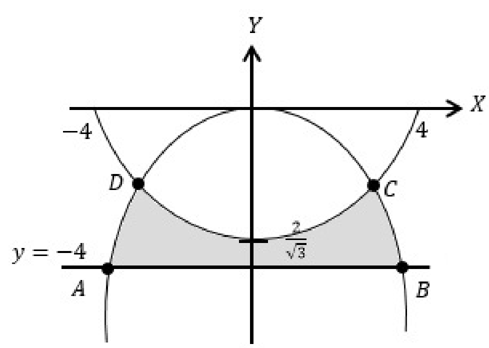
3. Sean $y = -\sqrt{\dfrac{16 - x^2}{12}}$, $x^2 = -4y$, $y = -4$. Identificar cada curva. En un mismo sistema de coordenadas, graficarlas, achurar la región que ellas encierran y obtener los puntos de intersección correspondientes a la región achurada.

Solución.

$y = -\sqrt{\dfrac{16 - x^2}{12}} \quad 12y^2 + x^2 = 16 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$ "mitad de elipse"

$-4y = x^2$ parábola

$y = -4 \Longrightarrow$ recta



Para $A \quad y \quad B$:

$x^2 = -4y$ con $y = -4 \Longrightarrow x^2 = 16 \Longrightarrow x = \pm 4 \Longrightarrow A(-4,-4) \quad y \quad B(4,-4)$

Para $C \quad y \quad D$:

$x^2 = -4y$ con $y = -\sqrt{\dfrac{16 - x^2}{12}} \Longrightarrow 12y^2 + x^2 = 16 \Longrightarrow$

$16 - 12y^2 = -4y \Longrightarrow 3y^2 - y - 4 = 0 \Longrightarrow (3y - 4)(y + 1) = 0$

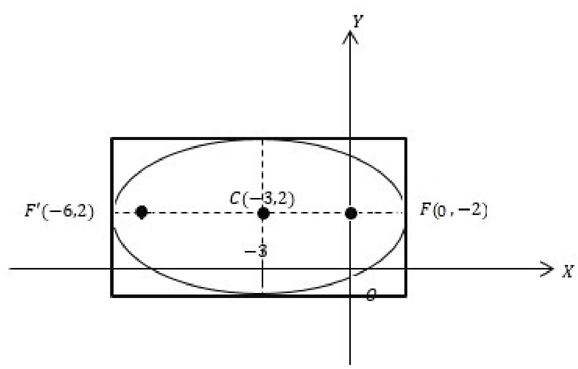
$y = \dfrac{4}{3}$ no es solución; $y = -1 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$

$$\therefore C(2, -1) \quad y \quad D(-2, -1)$$

FIN .... FIN

4. Sea C una elipse cuyos focos son $(0, 2)$ y $(-6, 2)$. Circunscrito a C se dibuja un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes focal y normal de la elipse. Si el área del rectángulo es de $80cm^2$, determinar la ecuación de la elipse.

   Solución.



$C_{elipse} = (-3, 2)$ y $c = 3$

$2a \cdot 2b = 80$

$ab = 20$

Pero $a^2 - c^2 = b^2 \Longrightarrow \boxed{a^2 - b^2 = 9}$

$\frac{400}{b^2} - b^2 = 9 \Longrightarrow 400 - b^4 = 9b^2 \Longrightarrow b^4 + 9b^2 - 400 = 0 \Longrightarrow$

Si $x = b^2 \Longrightarrow x^2 + 9x - 400 = 0 \Longrightarrow (x + 25)(x - 16) = 0$

$x = -25$ no es solución

$x = b^2 = 16 \Longrightarrow \boxed{b = 4} \Longrightarrow \boxed{a = 5}$

$$\therefore \frac{(x + 3)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$$

FIN .... FIN

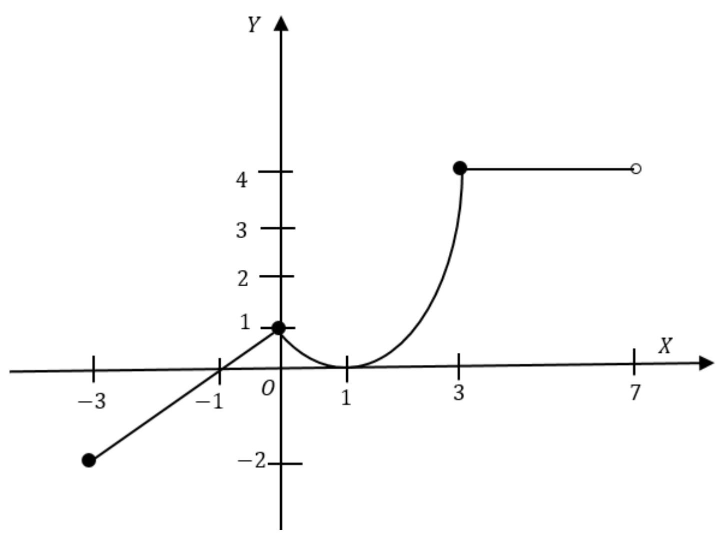
Prueba $n°2$ año 2009

1. Graficar la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in [-3,0), \\ x^2-2x+1, & \text{si } x \in [0,3], \\ 4, & \text{si } x \in (3,7). \end{cases}$$

Del gráfico, determinar: recorrido, ceros, puntos de intersección con el eje Y, paridad, intervalos de monotonía y acotamiento.

Solución.



$$\begin{aligned} recorrido &= [-2,4] \\ ceros &= \{-1,1\} \\ inter.\ con\ el\ eje\ y &= \{1\} \\ paridad &= no\ tiene \\ inter.\ de\ monot. &= (-3,0) \cup (1,7)\ creciente \\ &= (0,1)\ decreciente \\ acotamiento &= es\ acotada\ ya\ que\ recf = [-2,4] \end{aligned}$$

FIN .... FIN

2. Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + a$.

   a) Determinar, justificadamente, $dom(f)$ y $rec(f)$.

   b) Determinar el valos de a para que se tenga $(g \circ f)(x) = x$ para todo x.

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{1+2x-2}{x-1} = \dfrac{2x-1}{x-1}$

$domf = \mathbb{R} - \{1\}$

$yx - y = 2x - 1 \quad x(y-2) = y - 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y-1}{y-2}$

$\therefore recf = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $g(f(x)) = g\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{x-1} - 2} + a = x$

$$\frac{1}{\dfrac{2x-1}{x-1} - 2} + a = x \Longrightarrow x - 1 + a = x$$

$$\boxed{a = 1}$$

FIN .... FIN

3. Considerar las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x \in (0,2], \\ 6, & \text{si } x \in (5,8], \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \in [1,5], \\ x-2, & \text{si } x \in (5,10] \end{cases}$$

Determinar el $dom\left(\dfrac{g}{f}\right)$ y su expresión analítica.

Solución.

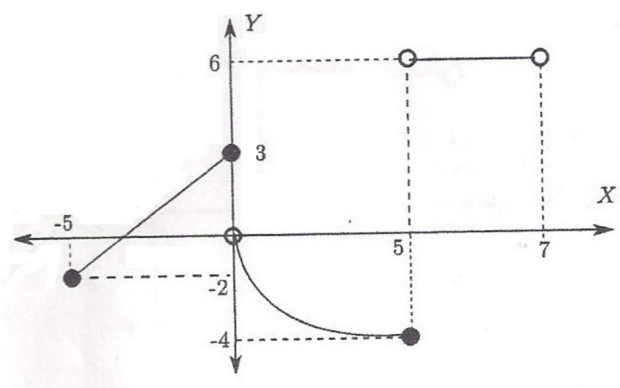
$$f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x \in (0,2] \quad f_1, \\ 6, & \text{si } x \in (5,8] \quad f_2, \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \in [1,5] \quad g_1, \\ x-2, & \text{si } x \in (5,10] \quad g_2 \end{cases}$$

$$dom\frac{g_1}{f_1} = [1,5] \cap (0,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\} = [1,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$
$$\left(\frac{g_1}{f_1}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$
$$dom\frac{g_1}{f_2} = [1,5] \cap (5,8] = \emptyset$$
$$dom\frac{g_2}{f_1} = (5,10] \cap (0,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\} = \emptyset$$
$$dom\frac{g_2}{f_2} = (5,10] \cap (5,8] = (5,8]$$
$$\left(\frac{g_2}{f_2}\right)(x) = \frac{x-2}{6}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{2x-3}, & \text{si } x \in [1,2] - \left\{\frac{3}{2}\right\}, \\ \dfrac{x-2}{6}, & \text{si } x \in (5,8] \end{cases}$$

FIN .... FIN

4. Dado el siguiente gráfico de f:



Responder:

a) ¿Cuáles son los intervalos de monotonía?

b) ¿Es f acotada? ¿Por qué?

c) ¿Es f par, impar o ninguna? ¿Por qué?

d) ¿Es f periódica? ¿Por qué?

e) Determinar $f(-5), f(0), f(5), f(7)$.

Solución.

a) $(-5,0)\cup(5,7)$ creciente; $(0,5)$ decreciente

b) Si, ya que $recf = [-4,3]\cup\{6\}$

c) Ninguna ya que no hay simetria con respecto al eje y y origen.

d) No es periódica ya que $\nexists T$ tal que $f(x+T)=f(x)$ en $[-5,7)$.

e) $f(-5)=-2,\ f(0)=3,\ f(5)=-4,\ f(7)$ no tiene.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°2$ año 2010

1. Sea

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x-\sqrt{\mid x+3\mid}}{x^2+2x+4}}$$

. Determinar el dominio de f.

Solución.

Es necesario que $2x-\sqrt{\mid x+3\mid}\geqslant 0$ ya que $(x+1)^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$2x\geqslant\sqrt{\mid x+3\mid}$ es necesario que $x>0$.

$$\begin{aligned}
4x^2\geqslant \mid x+3\mid &\Longrightarrow -4x^2\geqslant x+3\geqslant 4x^2\\
x+3\leqslant 4x^2 \quad &\wedge \quad x+3\geqslant -4x^2\\
4x^2-x-3\geqslant 0 \quad &\wedge \quad 4x^2+x+3\geqslant 0\\
(4x+3)(x-1)\geqslant 0 \quad &\wedge \quad b^2-4ac<0\\
x\in(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[1,+\infty) \quad &\wedge \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad pero \quad x>0
\end{aligned}$$

$$\therefore C.S=[1,+\infty)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & \text{si } x \in [-1, 3) - \langle 2 \rangle, \\ \mid x - 3 \mid, & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

a) Determinar analíticamente $rec(f)$.

b) Graficar claramente f.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & \text{si } x \in [-1, 3) - \{2\}, \\ \mid x - 3 \mid, & \text{si } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x - 2}, & \text{si } x \in [-1, 3) - \{2\}, \\ -x + 3, & \text{si } x < -1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} x + 1, & \text{si } x \in [-1, 3) - \{2\} \quad ; f_2 \\ -x + 3, & \text{si } x < -1 \quad ; f_2 \end{cases}$$

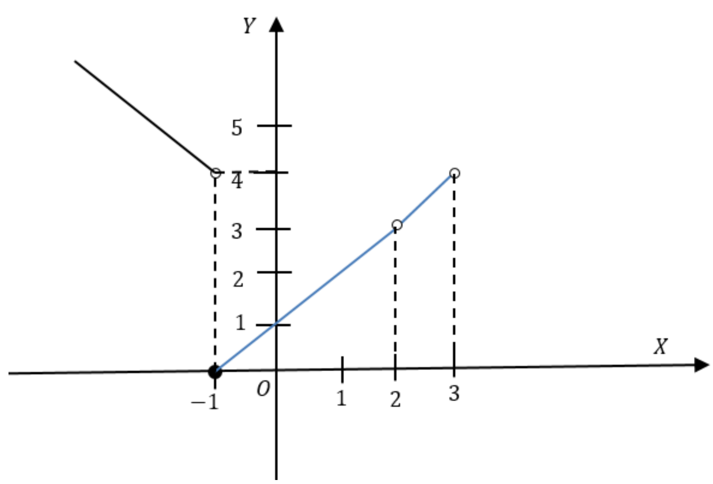
a) $-1 \leqslant x < 3, \ x \neq 2$

$0 \geqslant x + 1 < 4, \ x + 1 \neq 3 \Longrightarrow recf_1 = [0, 4) \setminus \{2\}$

$x < -1 \Longrightarrow -x > 1 \longrightarrow -x + 3 > 4 \Longrightarrow recf_2 = (4, +\infty)$

$$recf = [0, 4) \cup (4, +\infty) - \{3\}$$

b)



FIN .... FIN

3. Sean f y g las funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{2x-9} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{[x]}, & \text{si } x \in (1,3), \\ |\, x+1 \,|, & \text{si } x < -5, \end{cases}$$

Determinar la expresión analítica de $f \circ g$ con su correspondiente dominio.

Solución.

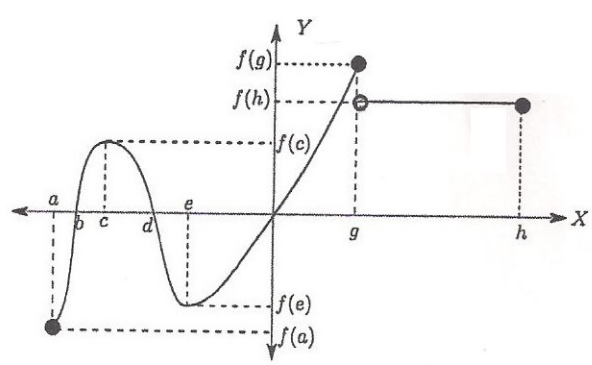
$$f(x) = \sqrt{2x-9} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{[x]}, & \text{si } x \in (1,3), \\ |\, x+1 \,|, & \text{si } x < -5, \end{cases} = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in (1,2) \quad g_1, \\ \dfrac{3x}{2}, & \text{si } x \in [2,3) \quad g_2, \\ -x-1, & \text{si } x < -5 \quad g_3, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Dom(f \circ g_1) &= \left\{ x \in (1,2) \wedge 3x \geqslant \frac{9}{2} \right\} = \left\{ 1 < x < 2 \wedge x \geqslant \frac{3}{2} \right\} = \left[\frac{3}{2}, 2 \right) \\ f(g_1(x)) &= f(3x) = \sqrt{6x-9} \\ Dom(f \circ g_2) &= \left\{ x \in [2,3) \wedge \frac{3x}{2} \geqslant \frac{9}{2} \right\} = \{ 2 \leqslant x < 3 \wedge x \geqslant 3 \} = \emptyset \\ Dom(f \circ g_3) &= \left\{ x < -5 \wedge -x-1 \geqslant \frac{9}{2} \right\} = \left\{ x < -5 \wedge x \leqslant -\frac{11}{2} \right\} = \left(-\infty, -\frac{11}{2} \right] \\ f(g_3(x)) &= f(-x-1) = \sqrt{2(-x-1)-9} = \sqrt{-2x-11} \end{aligned}$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt{6x-9}, & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right), \\ \sqrt{-2x-11}, & \text{si } x \in \left(-\infty, -\frac{11}{2}\right] \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Considerar la función f cuyo gráfico es:



Justificando claramente, determinar:

a) Dominio de f. Recorrido de f.

b) Valores de x para los cuales $f(x) > 0$.

c) Los tramos donde f es estrictamente creciente y los tramos donde f es estrictamente decreciente.

d) Si f es o no acotada.

Solución.

a) $dom f = [a, h]$, $rec f = [f(a), f(g)]$.

b) $x \in (b, d) \cup (0, h]$.

c) f es estrictamente creciente $\forall x \in (a, c) \cup (e, g)$.
f es estrictamente decreciente $\forall x \in (c, e)$.

d) f es acotada ya que $rec f = [f(a), f(g)]$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°2$ año 2011

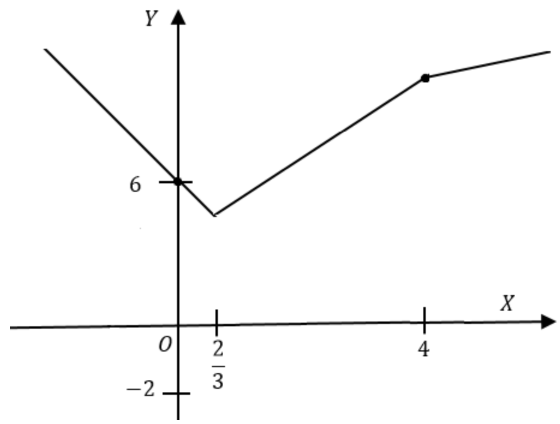
1. Graficar: $f(x) = \mid 3x - 2 \mid + \mid 4 - x \mid$

Solución.

$f(x) = \mid 3x - 2 \mid + \mid x - 4 \mid$

Si $x < \frac{2}{3} : f(x) = -3x + 2 - x + 4 = -4x + 6$
si $\frac{2}{3} \leqslant x < 4 : f(x) = 3x - 2 - x + 4 = 2x + 2$
si $x \geqslant 4 : f(x) = 3x - 2 + x - 4 = 4x - 6$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -4x + 6 & \text{si } x < \frac{2}{3}, \\ 2x + 2, & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x < 4, \\ 4x - 6, & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-6}-\sqrt{x^2-3x+2}}{x+5}$. Determinar dominio de f.

Solución.

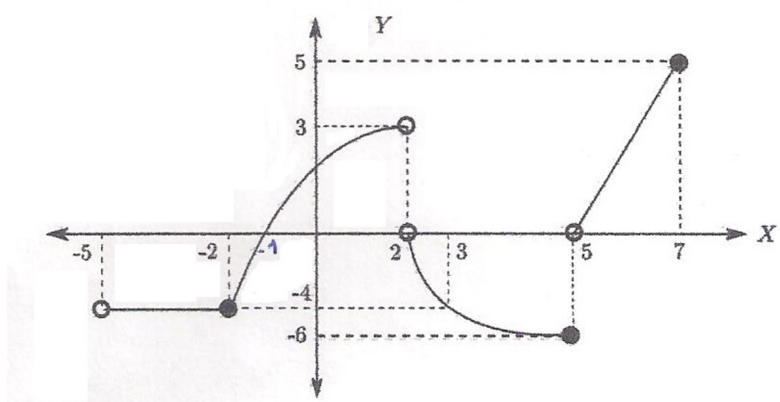
Es necesario que: $x \neq 5$ y

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)\geqslant 0 \Longrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$ y
$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)\geqslant 0 \Longrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

$$\therefore\ dom f = (-\infty,-3]\cup[2,+\infty)\setminus\{-5\}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. $f(: Dom(f)\to\mathbb{R}$ la función representada en el siguiente gráfico:



a) Determinar $Dom(f)$.

b) Determinar $Rec(f)$.

c) Intervalos de x donde $f(x) \geqslant 0$

d) ¿Es f acotada? Justifique.

Solución.

a) $domf = (-5, 2) \cup (2, 7]$

b) $recf = [-5, 5]$

c) $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-1, 2) \cup (5, 7]$

d) f es acotada ya que $recf = [-5, 5]$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sean

$$f(x) = \sqrt{x} + 3, x \geqslant 3 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x > 1 \quad ; g_1 \\ -3 - x, & \text{si } x \leqslant 1 \quad ; g_2 \end{cases}$$

Determinar la expresión analítica de $f \circ g$ y su respectivo dominio.

Solución.

$$f(x) = \sqrt{x} + 3, x \geqslant 3 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x > 1 \quad ; g_1 \\ -3 - x, & \text{si } x \leqslant 1 \quad ; g_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dom(f \circ g_1) &= \{x > 1 \wedge x^2 - 2x \geqslant 3\} \\ &= \{x > 1 \wedge (x-3)(x+1) \geqslant 0\} \\ &= \{x > 1 \wedge x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)\} = [3, +\infty) \end{aligned}$$

$$f(g_1(x)) = f(x^2 - 2x) = \sqrt{x^2 - 2x} + 3$$

$$\begin{aligned} dom(f \circ g_2) &= \{x \leqslant 1 \wedge -3 - x \geqslant 3\} \\ &= \{x \leqslant 1 \wedge x \leqslant -6\} = (-\infty, -6] \end{aligned}$$

$$f(g_2(x)) = f(-3 - x) = \sqrt{-3 - x} + 3$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} + 3, & \text{si } x \geqslant 3, \\ \sqrt{-3 - x}, & \text{si } x \leqslant -6 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°2$ año 2012

1. Sea $f(x) = \mid x+2 \mid + \mid 2-x \mid - \mid x \mid -1$ con $x \in [-3,3]$.

   a) Graficar claramente f.

   b) Analizar la paridad y el acotamiento de f. Justificar analíticamente.

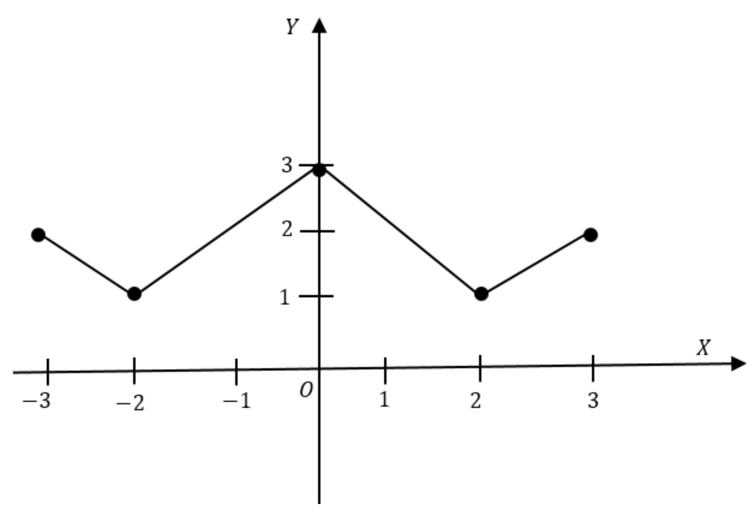
Solución.

$f(x) = \mid x+2 \mid + \mid 2-x \mid - \mid x \mid -1$ con $\forall x \in [-3,3]$

Si $-3 \leqslant x < -2 : f(x) = -x-2+2-x+x-1 = -x-1$
Si $-2 \leqslant x < 0 : f(x) = x+2+2-x+x-1 = x+3$
Si $0 \leqslant x < 2 : f(x) = x+2+2-x-x-1 = -x+3$
Si $2 \leqslant x \leqslant 3 : f(x) = x+2+x-2-x-1 = x-1$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{si } -3 \leqslant x < -2 \\ x+3, & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ -x+3, & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ x-1, & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

a)



b)

$$\begin{aligned} f(-x) &= \mid -x+2 \mid + \mid 2-(-x) \mid - \mid -x \mid -1 \\ &= \mid -x+2 \mid + \mid 2+x \mid - \mid x \mid -1 = f(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f \ \ es \ \ par$$

Como $recf = [1,3]$ f es acotada.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sean f y g las funciones definidas por:

$$f : [-1,0) \to \mathbb{R}, f(x) = -x+1 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < -2 \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Determinar $dom(g \circ f)$ y su expresión analítica.

Solución.

$$f : [-1,0) \to \mathbb{R}, f(x) = -x+1 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < -2, \ \ g_1 \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 2, \ \ g_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dom(g_1 \circ f) &= \{x \in [-1,0) \land -x+1 < -2\} \\ &= \{x \in [-1,0) \land x > 3\} = \emptyset \\ dom(g_2 \circ f) &= \{x \in [-1,0) \land -x+1 \geqslant -2\} \\ &= \{x \in [-1,0) \land x \leqslant 3\} = [-1,0) \end{aligned}$$

$g_2(f(x)) = g_2(-x+1) = (1+x-1)^2 = x^2$

$$\therefore g(f(x)) = x^2, \quad \forall x \in [-1,0)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2-2x+4)(4-x^2)}{x(x^2-x-2)(\sqrt{x^2+10})}}$. Determinar $dom(f)$.

Solución.

Es necesario que: $\dfrac{(x^2-2x+4)(4-x^2)}{x(x^2-x-2)(\sqrt{x^2+10})} \geqslant 0$

Pero $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ y $\sqrt{x^2+10}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\therefore \dfrac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(x+1)\cdot x} \geqslant 0,\ x\neq 2$

$\dfrac{x+2}{(x+1)\cdot x} \leqslant 0$

	$-\infty$ -2	-2 -1	-1 0	0 $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$$dom f = (-\infty,-2]\cup(-1,0)$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea las funciones $f_1=\sqrt{-x}$, $f_2(x)=ax+b$ y $f_3(x)=x^2-5$. Sea f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{si } x\leqslant -1,\\ f_2(x), & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 2,\\ f_3(x), & \text{si } x\geqslant 2.\end{cases}$$

a) Determinar los valores de "a" y "b" para que f sea una función, esto es, determinar a y b tal que $f_1(-1)=f_2(-1)$ y $f_2(2)=f_3(2)$.

b) Graficar f y determinar $rec(f)$.

Solución.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x):\sqrt{-x}, & \text{si } x\leqslant -1,\\ f_2(x): ax+b, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 2,\\ f_3(x): x^2-5, & \text{si } x\geqslant 2.\end{cases}$$

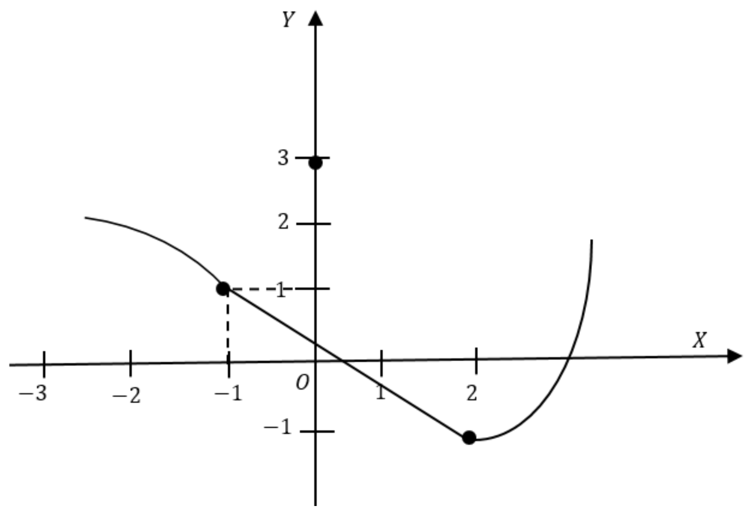
a) $f_1(-1) = f_2(-1) \Longrightarrow 1 = -a + b$

$f_2(2) = f_3(2) \Longrightarrow -1 = 2a + b$

$3a = -2 \Longrightarrow \boxed{a = \dfrac{-2}{3}} \Longrightarrow \boxed{b = \dfrac{1}{3}}$

$$\therefore f_2(x) = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$$

b)



c) $recf = [-1, +\infty)$

FIN .... FIN

Prueba $n^\circ 2$ año 2013

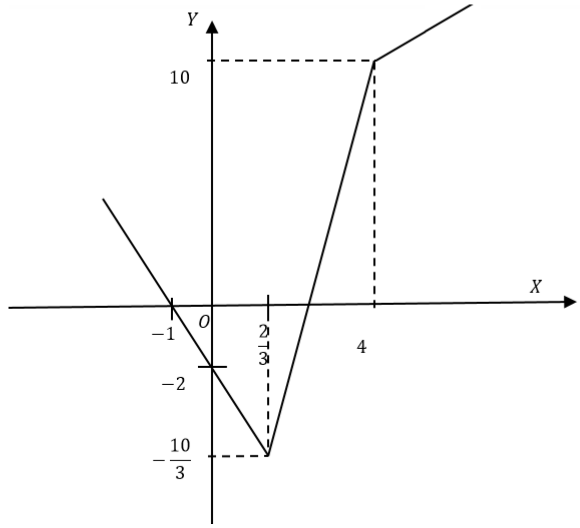
1. Graficar $f(x) = \mid 3x - 2 \mid - \mid x - 4 \mid$

Solución.

$f(x) = \mid 3x - 2 \mid - \mid x - 4 \mid$

Si $x < \frac{2}{3} : f(x) = -3x + 2 + x - 4 = -2x - 2$
si $\frac{2}{3} \leqslant x < 4 : f(x) = 3x - 2 + x - 4 = 4x - 6$
si $x \geqslant 4 : f(x) = 3x - 2 - x + 4 = 2x + 2$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < \frac{2}{3}, \\ 4x - 6, & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x < 4, \\ 2x + 2, & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determinar dominio y recorrido de:

$$f(x) = \frac{1}{\mid x-1 \mid +1}$$

Solución.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\mid x-1 \mid +1} > 0 \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x-1+1} = \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1, f_1 \\ \dfrac{1}{-x+1+1} = \dfrac{1}{-x+2}, & \text{si } x < 1, f_2 \end{array} \right. \Longrightarrow dom f = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Para f_1: $y = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{y} \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{y} - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{1-y}{y} \geqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{y-1}{y} \leqslant 0$
$\Longrightarrow y \in (0, 1]$
Para f_2: $y = \dfrac{1}{-x+2} \Longrightarrow -yx + 2y - 1 = 0 \Longrightarrow xy - 2y + 1 = 0$
$\Longrightarrow x = \dfrac{2y-1}{y} < 1 \Longrightarrow \dfrac{2y-1-y}{y} < 0 \Longrightarrow \dfrac{y-1}{y} < 0 \Longrightarrow y \in (0, 1)$

$$\therefore \; rec f = (0, 1]$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sean $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 4 - 3x, & \text{si } -3 < x \leqslant 0 \end{cases}$ y $g(x) = -3$. Determinar:

   a) Expresión analítica de $f + g$.

   b) Monotonía de cada tramo de $f + g$.

   c) Acotamiento de $f + g$, si es que tuviese.

   d) Graficar $f + g$.

Solución.

$f(x) = \begin{cases} 4 - 3x, & \text{si } -3 < x \leqslant 0 \quad : f_1 \\ x^2 - 1, & \text{si } 0 < x < 3 \quad : f_2 \end{cases}$, $g(x) = -3$

a) $dom(f_1 + g) = (0, 3) \cap \mathbb{R} = (0, 3)$

$$\therefore \ (f_1 + g)(x) = x^2 - 1 - 3 = x^2 - 4$$

$dom(f_2 + g) = (-3, 0] \cap \mathbb{R} = (-3, 0]$

$$\therefore \ (f_2 + g)(x) = 4 - 3x - 3 = 1 - 3x$$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x \in (0, 3) \\ 1 - 3x, & \text{si } x \in (-3, 0] \end{cases}$$

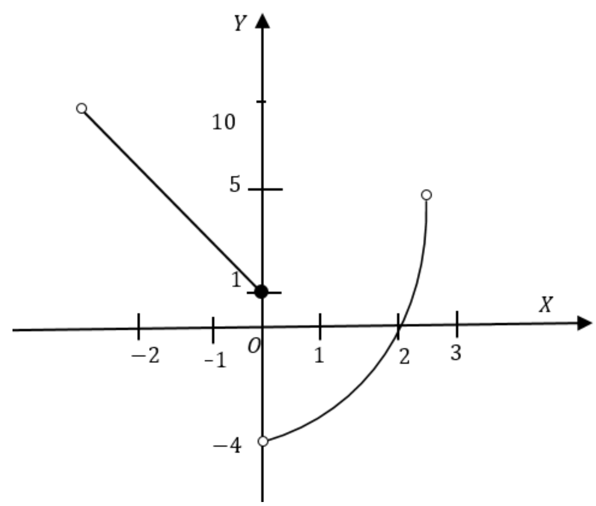
b) $0 < x_1 < x_2 < 3 \Longrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Longrightarrow x_1^2 - 4 < x_2^2 - 4 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\therefore f$ es estrictamente creciente en $(0, 3)$
$-3 < x_1 < x_2 \leqslant 0 \Longrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Longrightarrow -3x_1 + 1 > -3x_2 + 1 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
$\therefore f$ es estrictamente decreciente en $(-3, 0]$

c) $0 < x < 3 \Longrightarrow 0 < x^2 < 9 \Longrightarrow -4 < x^2 - 4 < 5 \Longrightarrow recf = (-4, 5)$
$-3 < x \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant -x < 3 \Longrightarrow 0 \leqslant -3x < 9 \Longrightarrow 1 \leqslant -3x + 1 < 10$

$$\therefore \ rec(f + g) = [1, 10) \cup (-4, 5) = (-4, 10)$$

$$\therefore \ f + g \ \ es \ \ acotada$$

d)



$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sean $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ y $g(x) =| 3x - 2 |$.
Determinar $Dom(f \circ g)$ y la expresión analítica correspondiente.

Solución.
$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 0 & : f_1 \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 & : f_2 \end{cases}$ y $g(x) =| 3x - 2 |= \begin{cases} 3x-2, & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} & : g_1 \\ -3x+2, & \text{si } x < \frac{2}{3} & : g_2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} dom(f_1 \circ g_1) &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge 3x - 2 < 0\} \\ &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge x < \frac{2}{3}\} = \emptyset \\ dom(f_1 \circ g_2) &= \{x < \frac{2}{3} \wedge -3x + 2 < 0\} \\ &= \{x < \frac{2}{3} \wedge x > \frac{2}{3}\} = \emptyset \\ dom(f_2 \circ g_1) &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge 3x - 2 \geqslant 1\} \\ &= \{x \geqslant \frac{2}{3} \wedge x \geqslant 1\} = [1, +\infty) \end{aligned}$$

$\therefore f_2(g_1(x)) = f_2(3x-2) = (1-3x+2)^2 = (3-3x)^2$

$$\begin{aligned} dom(f_2 \circ g_2) &= \{x < \frac{2}{3} \wedge -3x+2 \geqslant 1\} \\ &= \{x < \frac{2}{3} \wedge x \leqslant \frac{1}{3}\} = (-\infty, \frac{1}{3}] \end{aligned}$$

$\therefore f_2(g_2(x)) = f_2(-3x+2) = (1+3x-2)^2 = (3x-1)^2$

$$\therefore f(g(x)) = \begin{cases} (3-3x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 \\ (3x-1)^2, & \text{si } x \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°3$ año 2009

1. Calcular los siguientes limites

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

Solución.

a) $$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1} = \lim_{z\to 0} \frac{1+\cos\pi(z+1)}{z^2} = \\ &x-1=z, \quad Si \quad x\to 1 \Longrightarrow z\to 0 \\ &\lim_{z\to 0} \frac{1+\cos(\pi z+\pi)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos\pi z}{z^2} \cdot \frac{1+\cos\pi z}{1+\cos\pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \pi z}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\cos\pi z} \\ &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{1+\cos\pi z} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4x}{2(2x-1)}} = e$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Determine $a \in \mathbb{R}$ talque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x + a \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = 4$

Solución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + a \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x + a \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \left(\frac{2\cos x + a \operatorname{sen} x - 2}{1 - \cos x} \right) \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \left(\frac{-2(1-\cos x) + a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} \right) \cdot (1+\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen}^2 x + a \operatorname{sen} x (1+\cos x)}{\operatorname{sen} x} = 2a$$

$$\therefore 2a = 4 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{1}{x+1}, & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{1}{x+1}, & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1}, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} \left(x + 1 + \dfrac{1}{x+1} \right) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = -\infty$

$\therefore x = -1$ es asíntota vertical.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{x(x^2+1)} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2 = b$

$\therefore y = 2$ es asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x + 1 + \frac{1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x+1)^2 + 1}{x(x+1)} = \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{(1-y)^2 + 1}{y^2 - y}$

Sea $x = -y$. Si $x \to -\infty \Longrightarrow y \to +\infty$

$\lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{1 - 2y + y^2 + 1}{y^2 - y} = 1 = m$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1\frac{1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-y+2}{-y+1}=1=b$$
$\therefore y=x+1$ es asíntota oblicua izquierda

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}, & \text{si } x>a,\\ \dfrac{9(\sqrt[3]{x})-\sqrt[3]{a}}{x-a}, & \text{si } x<a\end{cases}$
Determine "a" y luego redefina la función para que sea continua en $x_0=a$

Solución.
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}, & \text{si } x>a,\\ \dfrac{9(\sqrt[3]{x})-\sqrt[3]{a}}{x-a}, & \text{si } x<a\end{cases}$
$f(a)$ no está definida
$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=3a^2$$
$$\lim_{x\to a^-}9\frac{(\sqrt[3]{x})-\sqrt[3]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a^-}9\frac{(\sqrt[3]{x})-\sqrt[3]{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}$$
$$=\lim_{x\to a^-}9\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2})}=\frac{9}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\therefore 3a^2=\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}\Longrightarrow\sqrt[3]{a^8}=1\Longrightarrow\boxed{a=1}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}, & \text{si } x>a,\\ 3, & \text{si } x=a,\\ \dfrac{9(\sqrt[3]{x})-\sqrt[3]{a}}{x-a}, & \text{si } x<a\end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°3$ año 2010

1. Determinar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = x^{\operatorname{sen} x}$ en $x = \frac{\pi}{2}$

   Solución.

$$\begin{aligned} y &= x^{\operatorname{sen} x} \quad \backslash \ln \quad en \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \ln y &= \operatorname{sen} x \ln x \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x) \cos x \\ y' &= y \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\ln x) \cos x \right) \\ y'(\frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}} + 0 \right) = 1 \end{aligned}$$

   Ec. tg: $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = x$
   Ec. normal: $y - \frac{\pi}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow y + x - \pi = 0$
   FIN .... FIN

2. Derivar

$$f(x) = \cos^3(x^4 - e^{x^3+2x}) - \ln^4(\operatorname{tg}(x^3 - 7x))$$

   Solución.
   $y = \cos^3(x^4 - e^{x^3+2x}) - \ln^4(\operatorname{tg}(x^3 - 7x))$
   $y' = 3\cos^2(x^4 - e^{x^3+2x})(-\operatorname{sen}(x^4 - e^{x^3+2x}))(4x^3 - e^{x^3+2x}(3x^2 + 2))$
   $- 4\ln^3(\operatorname{tg}(x^3 - 7x)) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x^3 - 7x)} \cdot \sec^2(x^3 - 7x) \cdot (3x^2 - 7)$
   FIN .... FIN

3. Sea $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1, \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

   a) Analizar si f es continua en $x = -1$

   b) Calcular $f'(1)$, si existe.

   c) Calcular $f'(x)$.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1 \quad , f_1 \\ (1-x)^2, & \text{si } x \geqslant 1 \quad , f_1 \end{cases}$$

a) Continua en $x = -1$

$f(-1) = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1-x} = \sqrt{2}$

$\Longrightarrow \therefore f$ es continua en $x = -1$

b) f es contínua en $x = 1$ y

$f_1(x) = \sqrt{1-x} \Longrightarrow f_1'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$\therefore f_-'(1) \nexists \therefore f$ no es derivable en $x = 1$

c) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-2\sqrt{1-x}}, & \text{si } x < 1, \\ -2(1-x), & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to a} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, si $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{9}{x}}, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solución.

a) $$\lim_{x \to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}} = \lim_{x \to a} \left[\left(1 + 1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{a-x}}\right]^{\frac{a-x}{a} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(a-x)^2}}$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\left(1 + \frac{a-x}{a}\right)^{\frac{a}{a-x}}\right]^{-\frac{1}{a} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(x-a)}} = e^{-\frac{1}{a}}$$

b) $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{9}{x}}, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

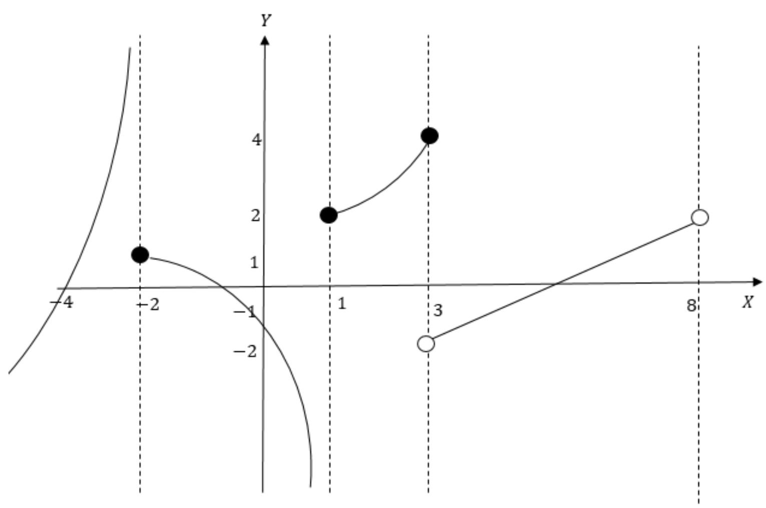
$$\lim_{x \to 0^-} (1-x)^{\frac{9}{x}} = \lim_{x \to 0^-} \left[(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}\right]^{-9} = e^{-9}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos 3x}{x^2+1-e^{3x^2}} \cdot \frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos 3x} \cdot \frac{1}{\frac{x^2-(e^{3x^2}-1)}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9}{1+\cos 3x} \cdot \frac{1}{1-\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}\cdot 3} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{1-3} = -\frac{9}{4}$$

FIN .... FIN

5. Trazar el gráfico de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:
f debe ser continua en $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3]$, $(3,8)$ y además $f(-2)=1$,
$\lim_{x\to -4} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 8^-} f(x) = 2$

Solución.



FIN .... FIN

Prueba $n°3$ año 2011

1. Hallar, si existe, un número $c \in (-2, 2)$ en el que la recta tangente a $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$ sea paralela a la recta que une $(0, 0)$ y $(5, 1)$.

   Solución.
   $c \in (-2, 2)$
   $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$
   $y' = \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{(2-x)^2}} \cdot \dfrac{2-x+x}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{4-4x+x^2+x^2} = \dfrac{2}{2x^2-4x+4} = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$
   $m_r = \frac{1}{5}$
   $\therefore \dfrac{1}{c^2-2c+2} = \dfrac{1}{5} \Longrightarrow c^2-2c+2 = 5 \Longrightarrow c^2-2c-3 = 0 \Longrightarrow (c-3)(c+1) = 0 \Longrightarrow$
   $c = 3 \notin (-2, 2) \quad c = -1 \in (-2, 2)$
   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. *a*) Si $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, verificar que $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

   b) Encuentre f', para $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2} + \cos(e^{x^2}-3) + \log(3x^2+4)$.

   Solución.

   a) $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
   $\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{xy'-y}{x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$
   $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{xy'-y}{x^2} = \dfrac{x+yy'}{x^2+y^2} \Longrightarrow y'(x-y) = x+y$
   $$\therefore y' = \frac{x+y}{x-y}$$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2} + \cos(e^{x^2}-3) + \log(3x^2+4)$
   $y' = \dfrac{1}{3}(x^2-2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x - \operatorname{sen}(e^{x^2}-3) \cdot e^{x^2} \cdot 2x + \dfrac{6x}{3x^2+4}\log e$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Considere la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

   a) Determine $f'(x)$, $f''(x)$

b) Encuentre máximos y/o mínimos relativos y puntos de inflexión.

c) Determine intervalos de crecimiento y concavidad.

d) Asíntotas.

e) Bosqueje el gráfico de $f(x)$.

Solución.

$f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

a) $f'(x) = \dfrac{(x^+4)4 - 4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^2+4)^2(-8x) - (-4x^2+16)2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}\\
&= \frac{(x^2+4)(-8x) - (-4x^2+16)2\cdot 2x}{(x^2+4)^3}\\
&= \frac{-8x^3 - 32x + 16x^3 - 64}{(x^2+4)^3} = \frac{8x^3 - 96x}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}\\
&= \frac{8x(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})}{(x^2+4)^3}
\end{aligned}$$

Si $x < -3{,}4$: $f' < 0$, $\quad f'' < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo
Si $-3{,}4 < x < -2$: $f' < 0$, $\quad f'' > 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba.

$$\therefore \text{ en } x = -2\sqrt{3} \text{ hay un punto de inflexión } y = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Si $-2 < x < 0$: $f' > 0$, $\quad f'' > 0 \Longrightarrow f$ es creciente y cóncava hacia arriba.

$$\therefore \text{ en } x = -2 \text{ hay un mínimo con } f(-2) = -1$$

Si $0 < x < 2$: $f' > 0$, $\quad f'' < 0 \Longrightarrow f$ es creciente y cóncava hacia abajo.

$$\therefore \text{ en } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión con } f(0) = 0$$

Si $2 < x < 3{,}4$: $f' < 0$, $\quad f'' < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia abajo.

$$\therefore \text{ en } x = 2 \text{ hay un máximo con con } f(2) = 1$$

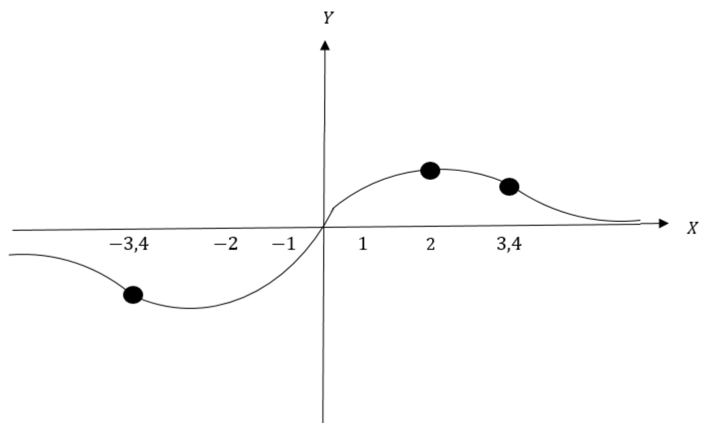
Si $x > 3{,}4$: $f' < 0$, $\quad f'' > 0 \Longrightarrow f$ es decreciente y cóncava hacia arriba.

$$\therefore \text{ en } x = 2\sqrt{3} \text{ hay un punto de inflexión con con } f(2\sqrt{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x^3+4x} = 0 = m$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x}{x^2+4} - 0\right) = 0 = b \Longrightarrow y = 0$ asíntota horizontal

c)



FIN .... FIN

Prueba $n°3$ año 2012

1. Considerar la siguiente función:

$$h(x) = \frac{(x-1)(x^2-x-12)}{x^2-5x+4}$$

Analizar la continuidad de h en los puntos $x=4$ y $x=1$. Clasificar sus discontinuidades, y redefinir h, si corresponde.

Solución.

$h(x) = \dfrac{(x-1)(x^2-x-12)}{x^2-5x+4} = \dfrac{(x-1)(x-4)(x+3)}{(x-4)(x-1)} = (x+3). \quad x \neq 4, x \neq 1$

a) Para $x = 1$

$h(1) =$ no está definida.

$\lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4$

h tiene en $x=1$ una discontinuidad reparable haciendo $h(1) = 4$

b) Para $x = 4$

$h(4) =$ no está definida.

$\lim\limits_{x\to 4}(x+3) = 7$
h tiene en $x = 4$ una discontinuidad reparable haciendo $h(4) = 7$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2-x-12)}{x^2-5x+4} = (x+3), & \text{si } x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq 4, \\ 4, & \text{si } x = 1, \\ 7, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

FIN .... FIN

2. Hallar todas las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1}$$

Solución.
$f(x) = \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1} = -\infty$
$\therefore x = -1$ es asíntota vertical.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2-2}{x^2+x} + \dfrac{1}{x^2+x} \cdot \operatorname{sen}(x) \right) = 3 = m$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1} - 3x \right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x) - 3x^2 - 3x}{x+1}$
$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x-2}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} \cdot \operatorname{sen}(x) = -3 = b$

$\therefore y = 3x - 3$ es asíntota oblicua derecha.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x(x+1)} = \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{3y^2 - 2 - \operatorname{sen} y}{y^2 - y} = 3 = m$
$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1} - 3x \right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x - 2 + \operatorname{sen}(x)}{x+1}$
$= \lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{-3y - 2 - \operatorname{sen} y}{-y+1} = -3 = b$

$\therefore y = 3x - 3$ es asíntota oblicua izquierda.

FIN .... FIN

3. Realizar en cada caso lo que se pide:

   a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{\operatorname{sen}(x)}$

   b) Calcular $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\pi - x}$

   c) Calcular el valor de k de modo que $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+kx+1} - x) = 2$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{\operatorname{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = \ln 2$

b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\pi - x} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi + z)}{-z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} z}{-z} = 1$
Sea $z = x - \pi$. Si $x \to \pi \Longrightarrow z \to 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+kx+1} - x) \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+kx+1}+x}{\sqrt{x^2+kx+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+kx+1-x^2}{\sqrt{x^2+kx+1}+x}$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{kx+1}{x\sqrt{1+\frac{k}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(k+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{k}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} = \dfrac{k}{2} = 2 \Longrightarrow \boxed{k=4}$

FIN .... FIN

4. Encontrar los valores de c y k de modo que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2c, & \text{si } x < -2, \\ 3cx+k, & \text{si } -2 \leqslant x < 1, \\ 3x-2k, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x+2c, & \text{si } x < -2, \\ 3cx+k, & \text{si } -2 \leqslant x < 1, \\ 3x-2k, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) en $x = -2$
$f(-2) = -6c + k$
$\lim\limits_{x\to -2^-} (x+2c) = -2+2c$

$\lim\limits_{x\to -2^+}(3cx+k) = -6c+k$

$-2+2c = -6c+k \Longrightarrow \boxed{8c-k=2}$

b) en $x=1$

$f(1) = 3-2k$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(3cx+k) = 3c+k$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-2k) = 3-2k$

$3c+k = 3-2k \Longrightarrow 3c+3k = 3 \Longrightarrow \boxed{c+k=1}$

$\therefore 8c-k=2 \quad \wedge \quad c+k=1$

$9c = 3 \Longrightarrow \boxed{c = \dfrac{1}{3}}$

$k = 1-\frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{k = \dfrac{2}{3}}$

FIN . . . . FIN

Prueba $n^\circ 3$ año 2013

1. Calcular los siguientes limites

   a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{x^2-6x+9}-e^{x^2-6x+9}}{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-b}{x-a}\right)^{x-k}, a, b, k \in \mathbb{R}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{x^2-6x+9}-e^{x^2-6x+9}}{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{(x-3)^2}-e^{(x-3)^2}}{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{5^{(x-3)^2}-1}{(x-3)^2} - \dfrac{e^{(x-3)^2}-1}{(x-3)^2}\right]\cdot$
$\dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}} = \ln 5 - 1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-b}{x-a}\right)^{x-k} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{x-b}{x-a}-1\right)\right)^{x-k} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-b-x+a}{x-a}\right)^{x-k} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{a-b}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{a-b}}\right]^{\frac{(a-b)(x-k)}{x-a}} = e^{a-b}$

FIN . . . . FIN

2. Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+ax)-\ln(x^2-ax)}{x^{-1}} = 5$

Solución.
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+ax)-\ln(x^2-ax)}{x^{-1}} = 5$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+ax}{x^2-ax}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2ax}{x^2-ax}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{2ax}{x^2-ax}\right)^{\frac{x^2-ax}{2ax}}\right]^{\frac{2ax\cdot x}{x^2-ax}} =$$

$\ln e^{2a} = 5$

$$\therefore 2a = 5 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{2}}$$

FIN .... FIN

3. Sea $f(x) = \dfrac{4x+5-4x^3}{x^2+1}$. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.

Solución.

- No hay asíntotas verticales.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+5-4x^3}{x(x^2+1)} = -4 = m$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x+5-4x^3}{x^2+1}+4x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+5-4x^3+4x^3+4x}{x^2+1}$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x+5}{x^2+1} = 0 = b \Longrightarrow y = -4x$ asíntota oblicua derecha.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+5-4x^3}{x^3+x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{-4y+5+4y^3}{-y^3-y} = -4 = m$
  Sea $x = -y$. Si $x \to -\infty \longrightarrow y \to +\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x+5-4x^3}{x^2+1}+4x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x+5}{x^2+1} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{-8y+5}{y^2+1} = 0$
  $\therefore y = -4x$ asíntota oblicua izquierda.
- No hay asńtotas horizontales.

FIN .... FIN

4. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt[3]{x}}, & \text{si } x > 1, \\ -3, & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{3(x+5)\operatorname{sen}(2x-2)}{2x^2+8x-10}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Analizar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$. Si fuese discontinua, justificar si es o no reparable y redefinir si corresponde.

Solución.

a) $f(1) = -3$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{3(x+5)\operatorname{sen} 2(x-1)}{2(x+5)(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3\operatorname{sen} 2(x-1)}{2(x-1)} = 3$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 1} \frac{2(1-t^3)}{1-t^2} = \lim_{t\to 1} \frac{2(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)} = \lim_{t\to 1} \frac{2(1+t+t^2)}{(1+t)} = 3$

$x = t^6$. Si $x \to 1^+ \longrightarrow t \to 1$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 3 \neq f(1)$$

$\therefore f$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad reparable.

Redefiniendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt[3]{x}}, & \text{si } x > 1, \\ 3, & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{3(x+5)\operatorname{sen}(2x-2)}{2x^2+8x-10}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n^\circ 4$ año 2009

1. Aplicando L'Hopital, calcular:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$$

Solución.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$

$\displaystyle y = \left(\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$ Aplicando ln y luego $\displaystyle\lim_{x\to 0}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ln y &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} 3x} \ln \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x} \cdot \dfrac{(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x)(3\cos 3x) - (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x)(-3\cos 3x)}{(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x)^2}}{3\cos 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen} a \cos 3x - 3\operatorname{sen} 3x \cos 3x + 3\operatorname{sen} a \cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x \cos 3x}{3\cos 3x(\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 3x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{sen} a \cos 3x}{3\cos 3x(\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 3x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\operatorname{sen} a}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{\frac{2}{\operatorname{sen} a}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}, & \text{si } x \neq 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 1 \end{cases}$ Analizar la continuidad de f en $x = 1$. Si fuese discontinua, justificar si es o no reparable y redefinir f si correspondiese.

Solución.

$f(1) = \frac{\pi}{2}$

$\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \operatorname{sen} \pi x}{2x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2} \neq \frac{\pi}{2}$

Como $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, $\therefore$ f tiene en $x = 1$ una discontinuidad reparable.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}, & \text{si } x \neq 1, \\ \frac{\pi^2}{2}, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Sea $\operatorname{sen}(2x+y)=x$. Verificar que $y''(\frac{\pi}{8},0)=2$.

   Solución.
   $\operatorname{sen}(2x+y)=y \Longrightarrow (2+y')\cos(2x+y)=1$
   $2\cos(2x+y)+y'\cos(2x+y)=1 \Longrightarrow y'=\dfrac{1-2\cos(2x+y)}{\cos(2x+y)} \Longrightarrow y'(\frac{\pi}{2},0)=\sqrt{2}-2$
   $-2(2+y')\operatorname{sen}(2x+y)+y''\cos(2x+y)-y'(2+y')\operatorname{sen}(2x+y)=0$
   $-4\operatorname{sen}(2x+y)-2y'\operatorname{sen}(2x+y)+y''\cos(2x+y)-2y'\operatorname{sen}(2x+y)-y'^2\operatorname{sen}(2x+y)=0$
   $-4\operatorname{sen}(2x+y)-4y'\operatorname{sen}(2x+y)+y''\cos(2x+y)-y'^2\operatorname{sen}(2x+y)=0$
   $-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-4(\sqrt{2}-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+y''\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2-4\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=0$
   $-4-4\sqrt{2}+8+y''-2+4\sqrt{2}-4=0 \Longrightarrow \boxed{y''=2}$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Sea $x^3+ay^3-3xy=0$. Determinar $a\in\mathbb{R}$ tal que la pendiente de la tangente a esta curva en $(1,3)$ sea igual a la pendiente de la tangente a $f(x)=(\ln x)^x$ en el punto de la abscisa $x=e$.

   Solución.
   $x^3+ay^3-3xy=0 \Longrightarrow 3x^2+3ay^2y'-3xy'-3y=0$
   $\Longrightarrow 3+27ay'-3y'-9=0 \Longrightarrow y'=\dfrac{6}{27a-3}=\dfrac{2}{9a-1}$
   $f(x)=(\ln x)^x$. Si $x=e \Longrightarrow y=1$
   $\ln y = x\ln(\ln x)$
   $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{x}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}+\ln(\ln x)$
   $y'=y\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)\right) \Longrightarrow y'(e,1)=1+0$

   $$\therefore \frac{2}{9a-1}=1 \Longrightarrow 9a-1=2 \Longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}}$$

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Si $y=3b^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$, $b\in\mathbb{R}$, verificar que:

   $$y'=\frac{4x^2}{\sqrt{bx-x^2}}$$

Solución.

$$
\begin{aligned}
y &= 3b^2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2} \\
y' &= 3b^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{b-x}} \cdot \frac{\sqrt{b-x}}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{b-x+x}{(b-x)^2} - (3b+2x)\frac{b-2x}{2\sqrt{bx-x^2}} - 2\sqrt{bx-x^2} \\
&= \frac{3b^2(b-x)}{b} \cdot \frac{b\sqrt{b-x}}{2\sqrt{x}(b-x)^2} - \frac{(3b+2x)(b-2x)}{2\sqrt{bx-x^2}} - 2\sqrt{2x-x^2} \\
&= \frac{3b^2 - 3b^2 + 6bx - 2bx + 4x^2 - 4bx + 4x^2}{2\sqrt{bx-x^2}} = \frac{8x^2}{2\sqrt{bx-x^2}} = \frac{4x^2}{\sqrt{bx-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore y' = \frac{4x^2}{\sqrt{bx-x^2}}
$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°4$ año 2010

1. Sea $f(x) = \begin{cases} 2\pi^2 & \text{si } -1 < x \leqslant 0, \\ \dfrac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

   Analizar la derivabilidad de f en $x = 0$.

   ¡Justificar claramente. No usar L'Hopital!

Solución.

En $x = 0$

$f(0) = 2\pi^2 \ \lim\limits_{x\to 0^-} 2\pi^2 = 2\pi^2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos 2\pi x}{x^2(1-x)^2} \cdot \dfrac{1+\cos 2\pi x}{1+\cos 2\pi x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2\pi x}{(2\pi x)^2} \cdot \dfrac{4\pi^2}{(1-x)^2} \cdot \dfrac{1}{1+\cos 2\pi x} = \dfrac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$

$$\therefore f \text{ es continua en } x = 0. \text{ Luego}$$

$$
f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^2(1-x)^2(\operatorname{sen} 2\pi x)(2\pi) - (1-\cos 2\pi x)(-x^2\cdot 2(1-x) + 2x(1-x)^2)}{x^4(1-x)^4}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}
$$

$$
f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^2(1-x)^2(2\pi \operatorname{sen} 2\pi x) - (1-\cos 2\pi x)(2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x))}{x^4(1-x)^4}, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}
$$

$f'_- = 0$

$f'_+ \nexists$

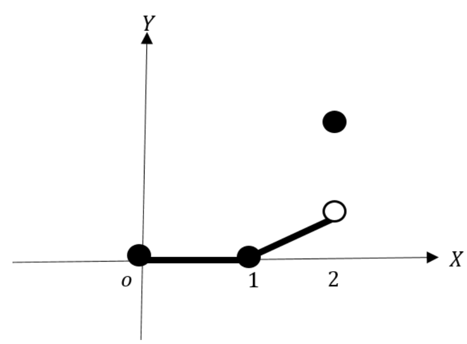
$$\therefore f \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = (x-1)[x]$. Graficar f para $x \in [0,2]$. A partir del gráfico y justificando claramente, determinar si existen $f'_-(1)$, $f'_+(1)$ y $f'(1)$.

   Solución.
   Si $0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow [x] = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$
   si $1 \leqslant x < 2 \Longrightarrow [x] = 1 \Longrightarrow f(x) = x - 1$
   si $x = 2 \Longrightarrow [x] = 2 \Longrightarrow f(x) = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ x-1, & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \\ 2, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



   $f'_-(1) = 0$ pendiente recta horizontal.
   $f_+(1) = 1$ pendiente recta diagonal.
   $f'(1)\nexists$ punta en $x = 1$.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Si T es la tangente a $\left(\dfrac{x}{2}\right)^n + \left(\dfrac{y}{3}\right)^n = 2$, $n \in \mathbb{N}$ en $(2,3)$, demostrar que la suma de los segmentos que T determina sobre los ejes coordenados es 10.

   Solución.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n + \left(\frac{y}{3}\right)^n = 2$$

$$n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} + n\left(\frac{y}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot y' = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot y' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{3}{2}$$

Ec. tg:

$$\begin{aligned} y-3 &= -\frac{3}{2}(x-2) \\ 2y-6 &= -3x+6 \\ 3x+2y-12 &= 0 \end{aligned}$$

Si $x=0 \Longrightarrow y=6$
si $y=0 \Longrightarrow x=4$
$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Derivar:

$$y = \frac{\operatorname{sen}^3 e^{x^2} + \ln^4(x^2+1)}{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4+a^4}}$$

Solución.
$y = \dfrac{\operatorname{sen}^3 e^{x^2} + \ln^4(x^2+1)}{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4+a^4}}$

$$y' = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4-a^4}\left(3\operatorname{sen}^2 e^{x^2}\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x + 4\ln^3(x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}} - \frac{(\operatorname{sen}^3 e^{x^2} + \ln^4(x^2+1))\cdot\sec^2\sqrt{3x^4+a^4}\cdot\frac{12x^3}{2\sqrt{3x^4+a^4}}}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}}$$

$$y' = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{3x^4-a^4}\left(3\operatorname{sen}^2 e^{x^2}\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x + 4\ln^3(x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}} - \frac{(\operatorname{sen}^3 e^{x^2} + \ln^4(x^2+1))\cdot\sec^2\sqrt{3x^4+a^4}\cdot\frac{6x^3}{\sqrt{3x^4+a^4}}}{tg^2\sqrt{3x^4+a^4}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

5. Sea $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$. Verificar que $4y''-6y'+3=0$.

Solución.
$y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$
$4y''-6y'+3=0$

$$y' = \frac{1}{1+\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}} - \sqrt{1-\cos x}\cdot\dfrac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1+\cos x}}}{1+\cos x}$$
$$= \frac{1+\cos x}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x+1-\cos x)}{(1+\cos x)2\operatorname{sen} x}$$
$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow y'' = 0$$

$$\therefore 4'' - 6y' + 3 = 0 - 3 + 3 = 0$$

FIN .... FIN

Prueba $n^\circ 4$ año 2011

1. Derivar:
$$y = \frac{x^{-\frac{3}{2}} - \sec\sqrt{x+4}}{\operatorname{sen}^3(e^{x^4-2})}$$

Solución.

$$y = \frac{x^{-\frac{3}{2}} - \sec\sqrt{x+4}}{\operatorname{sen}^3(e^{x^4-2})}$$
$$y' = \frac{\operatorname{sen}^3(e^{x^4-2})\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \sec\sqrt{x+4}\operatorname{tg}\sqrt{x+4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)}{\operatorname{sen}^6(e^{x^4-2})}$$
$$- \frac{(x^{-\frac{3}{2}} - \sec\sqrt{x+4})2\operatorname{sen}^2(e^{x^4-2})\cdot\cos(e^{x^4-2})\cdot e^{x^4-2}\cdot 4x^3}{\operatorname{sen}^6(e^{x^4-2})}$$

FIN .... FIN

2. Si $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, verificar que $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

Solución.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln x^2+y^2$$
$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$
$$\frac{1}{x^2+y^2}(xy'-y) = \frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$
$$xy'-yy' = x+y \Longrightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$
$$y'' = \frac{(x-y)(1+y')-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{x+xy'-y-yy'-x+xy'-y+yy'}{(x-y)^2}$$

$$y'' = \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x\frac{x+y}{x-y} - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x^2 + 2xy - 2xy + 2y^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Verificar que las rectas tangentes a las curvas:
   $3x - 4y^3 - 2y \operatorname{arc\,tg} x^2 + y = 0$ y $y^2(x+y) = \dfrac{x}{3} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$ son perpendiculares entre si en el origen.

   Solución.

   $3x - 4y^3 - 2y \operatorname{arc\,tg} x^2 + y = 0$

   $3 - 12y^2y' - 2y\dfrac{1}{1+x^4}2x - 2y' \operatorname{arc\,tg} x^2 + y' = 0$

   en $(0,0):\quad 3 + y' = 0 \Longrightarrow y' = -3 = m_{tg_1}$

   $y^2(x+y) = \dfrac{x}{3} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$

   $y^2(1+y') + 2yy'(x+y) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{y'}{y+1} + e^{xy}(xy' + y)$

   en $(0,0):\quad 0 = \dfrac{1}{3} - y' \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{3} = m_{tg_2}$

   $\therefore -3 \cdot \dfrac{1}{3} = -1$ las tangentes son perpendiculares.

   $\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Aplicando L'Hopital, calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos 4x^2)^{\frac{1}{x^4}}$

   Solución.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x}{\cos x - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x + 4\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 2\cos x}{-\operatorname{sen} x + 2\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$

   $\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{sen} 2x - 4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x}{-\cos x + 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{4}{1} = 4$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos 4x^2)^{\frac{1}{x^4}}$

   $y = (\cos 4x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ aplicando ln y $\displaystyle\lim_{x\to 0}$

   $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \ln\cos 4x^2$

   $\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 4x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} 4x^2 \cdot 8x}{\cos 4x^2 \cdot 4x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{tg} 4x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} -2\frac{\operatorname{sen} 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{4}{\cos 4x^2} = -8$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{-8}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°4$ año 2012

1. Verificar que la recta tangente a $x^3 + xy^2 + x^3y^3 = 3$ en $(1, 1)$ pasa por $(6, -6)$.

   Solución.
   $x^3 + xy^2 + x^3y^3 = 3$
   $3x^2 + y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + x^3 \cdot 3y^2y' + 3x^2y^3 = 0$
   en $(1, 1) : 3 + 2y' + 1 + 3y' + 3 = 0$

$$5y' = -7 \Longrightarrow m_t = -\frac{7}{5}$$

$$\therefore \text{Ec. tg: } y - 1 = -\frac{7}{5}(x-1) \Longrightarrow 7x + 5y - 12 = 0$$
$$\text{Para } (6, -6) : \quad 42 - 30 - 12 = 0$$
$$\therefore \text{ la recta tangente pasa por } (6, -6).$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 16})$. Verificar que:

$$f(3) \cdot f'(3) + \frac{2}{5}\ln(2) = \ln(2).$$

   Solución.

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 16})$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2+16})} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2+16})} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+16} + x}{\sqrt{x^2+16}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}$$
$$f'(2) = \frac{1}{5}$$

$$f(3)\cdot f'(3)+\frac{2}{5}\ln(2)=[\ln(3+5)]\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\ln(2)=\frac{3}{5}\ln(2)+\frac{2}{5}\ln(2)=\ln 2$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Aplicar logarítmo y derivar:

$$y=\frac{(\operatorname{sen}(x^2-e^{2x}))^{\frac{1}{3}}(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{x^{x^3}}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
y&=\frac{(\operatorname{sen}(x^2-e^{2x}))^{\frac{1}{3}}(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{x^{x^3}}\\
\ln y&=\frac{1}{3}\ln\operatorname{sen}(x^2-e^{2x})+2\ln(\operatorname{arc\,sen}(x))-x^3\ln x\\
\frac{1}{y}y'&=\frac{1}{3}\frac{\cos(x^2-e^{2x})(2x-2e^{2x})}{\operatorname{sen}(x^2-e^{2x})}+2\frac{1}{\operatorname{arc\,sen}(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^3}{x}-3x^2\ln x\\
y'&=y\left[\frac{2}{3}\frac{(x-e^{2x})\cos(x^2-e^{2x})}{\operatorname{sen}(x^2-e^{2x})}+\frac{2}{\operatorname{arc\,sen}(x)\sqrt{1-x^2}}-x^2-3x^2\ln x\right]
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Aplicando L'Hopital, calcular:

a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)+\ln\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}\right)^{x+3}$

Solución.

a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)+\ln\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{3x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{x(1-x)(1+x)}{(1-x)x}}{3x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{3x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{3}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3(1+x)}=\frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}\right)^{x+3}$

$\displaystyle y=\left(\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}\right)^{x+3}$

$$\text{lím}_{x\to 0^+} \ln y = \text{lím}_{x\to 0^+}(x+3)\ln\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1} = \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{2x^2-4}{2x^2+x-1}}{(x+3)^{-1}}$$
$$= \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{\frac{2x^2+x-1}{2x^2-4}\cdot\frac{(2x^2+x-1)4x-(2x^2-4)(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2}}{-(x+3)^{-2}}$$
$$= \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{(8x^3+4x^2-4x-8x^3-2x^2+16x+4)(x+3)^2}{-(2x^2-4)(2x^2+x-1)}$$
$$= \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{(2x^2+12x+4)(x+3)^2}{-(2x^2-4)(2x^2+x-1)} = \text{lím}_{x\to 0^+}\frac{2x^4+\ldots}{-(4x^4+\ldots)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} y = e^{-\frac{1}{2}}$$

FIN .... FIN

Prueba $n°5$ año 2012

1. *a*) Determinar m y n de modo que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(mx+n-\frac{x^2-5\sqrt[3]{x^2+3}+4}{x+1}\right) = -\frac{3}{4}$$

   b) Utilizando L'Hopital, calcular:

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Solución.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(mx+n-\dfrac{x^2-5\sqrt[3]{x^2+3}+4}{x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{mx^2+mx+nx+n-x^2+5\sqrt[3]{x^2+3}-4}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(m-1)x^2+(m+n)x+5\sqrt[3]{x^2+3}+n-4}{x+1}$$

Es necesario que el límite $\exists \Longrightarrow m-1=0 \Longrightarrow \boxed{m=1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+n)x+5\sqrt[3]{x^2+3}+n-4}{x+1} = 1+n = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$$
$$n = -\frac{3}{4}-1 = -\frac{7}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

$y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ aplicando ln y $\lim\limits_{x\to 0^+}$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

2. Sea f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x-1}-3\sqrt{3-x}}{x-2} & \text{si } 1 < x < 2, \\ a, & \text{si } x = 2, \\ \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^2+x-6}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 2$.

Solución.

$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x-1}-3\sqrt{3-x}}{x-2} & \text{si } 1 < x < 2, \\ a, & \text{si } x = 2, \\ \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^2+x-6}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(2) = a$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3\sqrt{x-1}-3\sqrt{3-x}}{x-2} \cdot \dfrac{3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}}{3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{9(x-1)-9(3-x)}{(x-2)(3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x})}$

$= 9 \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2(x-2)}{(x-2)(3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x})} = 9 \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2}{3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}} = \dfrac{18}{6} = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{15}{5} = 3$

$$\therefore \boxed{a = 3}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Verificar que la curva definida por $2xy + \operatorname{sen} y = 2x$ pasa por el punto $P(0, \pi)$. Además encontrar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en el punto P.

Solución.

$2xy + \operatorname{sen} y = 2x$

$2 \cdot 0 \cdot \pi + \operatorname{sen} \pi = 0 + 0 = 0$

$\therefore P(0, \pi) \in$ curva

$2xy' + 2y + \cos y \cdot y' = 2$

$2\pi - y' = 2 \Longrightarrow m_T = 2\pi - 2$
Ec. Tg: $y - \pi = (2\pi - 2)x$
Ec. Normal: $y - \pi = \dfrac{-1}{2\pi - 2}x = \dfrac{1}{2 - 2\pi}x$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Hallar los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$.

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

Como debe ser continua en $x = 1$, se debe cumplir que $a + b = \dfrac{1}{2}$
Además
$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1, \\ \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

$f'_-(1) = a, \quad f'_+(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} \Longrightarrow b = 1$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

Prueba $n°4$ año 2013

1. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x + x^2 \operatorname{sen}(x^3 + 1) & \text{si } x \leqslant 0, \\ (\ln e^{3x}) \cdot \ln(1 + x), & \text{si } x > 0, \end{cases}$
Calcular $f'(0)$ y $f'(e)$, si es que existen.

Solución.
$f(x) = \begin{cases} 3x + x^2 \operatorname{sen}(x^3 + 1) & \text{si } x \leqslant 0, \\ (\ln e^{3x}) \cdot \ln(1 + x), & \text{si } x > 0, \end{cases}$
Como f es continua en $x = 0$, calcularemos $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$
$f'(x) = \begin{cases} 3 + x^2 \cos(x^3 + 1) \cdot 3x^2 + 2x \operatorname{sen}(x^3 + 1) & \text{si } x < 0, \\ 3x \cdot \frac{1}{1+x} + 3\ln(1 + x), & \text{si } x > 0, \end{cases}$

$\therefore f'_-(0) = 3$ y $f'_+(0) = 0$ son distintos $\Longrightarrow f'(0)\nexists$

$f'(e) = \dfrac{3e}{1+e} + 3\ln(1+e)$

FIN .... FIN

2. Sea $f(x) = \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+3}}$. Comprobar que:

$$2y' + \frac{4(x^2+3)}{x}y'' = -\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

Solución.

$f(x) = \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+3})$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{2\sqrt{x^2+3}(x+\sqrt{x^2+3})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{4}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = \dfrac{-x}{2(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore 2y' + \dfrac{4(x^2+3)}{x}y'' = \dfrac{2}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} + \dfrac{4(x^2+3)}{x}\cdot\dfrac{-x}{2(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+3}}$

FIN .... FIN

3. Determinar el o los puntos de $x+\sqrt{xy}+y=1$, en los cuales las rectas tangentes tienen pendiente igual a -1 siendo $x>0$, $y>0$

Solución.

$x+\sqrt{xy}+y=1 \Longrightarrow 1 + \dfrac{xy'+y}{2\sqrt{xy}} + y' = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{-y-2\sqrt{xy}}{x+2\sqrt{xy}}$

Como $m = y' = -1$

$1 + \dfrac{-x+y}{2\sqrt{xy}} - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{y=x}$

$\therefore x+x+x = 3x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3} = y \quad \therefore P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

FIN .... FIN

4. Determinar $m\in\mathbb{R}$ tal que las curvas $5x-4y^3-2y\cdot\operatorname{arc\,tg}x^2+y=0$ y $y^2(x+y) = \dfrac{4x}{m} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$ sean perpendiculares entre sí en el origen.

Solución.

$5x-4y^3-2y\cdot\operatorname{arc\,tg}x^2+y=0$

$5-12y^2y'-2y\cdot\dfrac{1}{1+x^4}\cdot 2x + 2y'\operatorname{arc\,tg}x^2 + y' = 0$

en $(0,0) \Longrightarrow y_1' = -5$
$y^2(x+y) = \dfrac{4x}{m} - \ln(y+1) + e^{xy} - 1$
$y^2(1+y') + 2yy'(x+y) = \dfrac{4}{m} - \dfrac{y'}{y+1} + e^{xy}(xy'+y)$
en $(0,0) : 0 = \dfrac{4}{m} - y_2' \Longrightarrow y_2' = \dfrac{4}{m}$

$$\therefore y_1' \cdot y_2' = -5 \cdot \frac{4}{m} = -1 \Longrightarrow \boxed{m = 20}$$

FIN .... FIN

Prueba $n°5$ año 2013

1. Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ae^x + \ln x}{e^x + x} = 3$$

Solución.
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ae^x + \ln x}{e^x + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ae^x + \frac{1}{x}}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{axe^x + 1}{x(e^x + 1)}$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{axe^x + ae^x}{xe^x + e^x + 1} = a \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^x + e^x + e^x}{xe^x + e^x + e^x} = \boxed{a = 3}$

FIN .... FIN

2. Calcular:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$$

Solución.
$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$
$\left(\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$ aplicando ln y $\lim\limits_{x\to 0}$

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{x\to 0} y &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} 3x} \cdot \ln \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x} \cdot \frac{(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x) 3\cos 3x + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3x) 3\cos 3x}{(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3x)^2}}{3\cos 3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 3x} = \frac{2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{2}{\operatorname{sen} a}
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{\frac{2}{\operatorname{sen} a}}$$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

3. Determine a, b, c y d tal que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sea tangente al eje X en $x = 2$ y tenga un punto de inflexión en $(0, 4)$.

   Solución.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow en\ \ x = 2: \quad 12a + 4b + c = 0 \\ f''(x) &= 6ax + 2b \Longrightarrow en\ \ x = 0: \quad 2b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = 0} \end{aligned}$$

   $(0, 4) \in f: \quad \boxed{d = 4}$
   $(2, 0) \in f: \quad 8a + 4b + 2c + d = 0$
   $12a + c = 0$
   $8a + 2c + 4 = 0$
   $\Longrightarrow 12a + c = 0$
   $4a + c + 2 = 0 \Longrightarrow 8a - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = \dfrac{1}{4}}$
   $c = -\dfrac{12}{4} = -3$

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$

4. Analizar y graficar determinado dominio, intersección con los ejes, extremos, intervalos de monotonía, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

$$y = \frac{x}{x^2 - 9}$$

   Solución.
   $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$. Intersección $x = 0 \Longrightarrow y = 0$; $y = 0 \Longrightarrow x = 0$
   $Dom f = \{x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}\}$
   Asíntotas: $x = \pm 3$
   $y' = \dfrac{x^2 - 9 - x \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = \dfrac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} < 0\ \forall x \neq \pm 3$
   $y'' = \dfrac{(x^2 - 9)^2(-2x) + (x^2 - 9)2(x^2 - 9)2x}{(x^2 - 9)^4} = \dfrac{-2x^3 + 18x + 4x^3 + 36x}{(x^2 - 9)^3}$

$= \dfrac{2x^3+54x}{(x^2-9)^3} = \dfrac{2x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}$

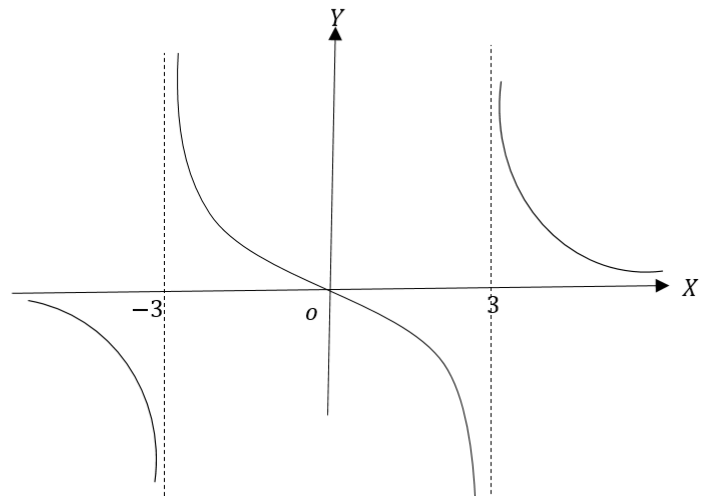
Si $x < -3 : f' < 0$ y $f'' < 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia abajo

Si $-3 < x < 0 : f' < 0$ y $f'' > 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia arriba; $x = -3$ es asńtota

Si $0 < x < 3 : f' < 0$ y $f'' < 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia abajo

en $x = 0$ hay punto de inflexión con $f(0) = 0$

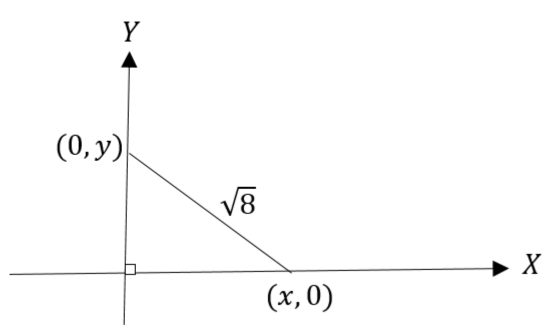
Si $x > 3 : f' < 0$ y $f'' > 0 \Longrightarrow f$ decreciente y cóncava hacia arriba; $x = 3$ es asńtota



FIN .... FIN

5. Determinar el área máxima de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{8}cm$.

Solución.



$x^2 + y^2 = 8 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{8 - x^2}$

$A = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x\sqrt{8 - x^2}}{2}$

$A' = \dfrac{1}{2}\left(x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{8 - x^2}} + \sqrt{8 - x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{-x^2 + 8 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \dfrac{-x^2 + 4}{\sqrt{8 - x^2}}$

$-x^2 + 4 = 0$

$\Longrightarrow x = \pm 2$

Si $x < 2 \Longrightarrow A' > 0 \Longrightarrow$ A crece

Si $x > 2 \Longrightarrow A' < 0 \Longrightarrow$ A decrece

en $x = 2$ hay un máximo.

$\therefore A = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{8 - 4}}{2} = 2 \cdot \dfrac{2}{2} = 2$ área máxima.

$\boxed{\text{FIN}}$ .... $\boxed{\text{FIN}}$