

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ



INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA

Autor(es): María Angélica Sanhueza Collinao

Lucía Isabel Lea Rodríguez

Facultad de Ciencias - Departamento de Matemática

Arica – Chile

2014

INDICE

PRESENTACIÓN DEL DOSSIER	5
PROGRAMA DE ASIGNATURA	7
UNIDAD I CONJUNTOS NUMÉRICOS	11
1.1. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$	11
1.1.1. Operaciones y propiedades en $\mathbb{N}$	12
1.1.2. Algunos conceptos en $\mathbb{N}$	14
1.2. El conjunto de los números cardinales $\mathbb{N}_0$	22
1.3. El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)	23
1.3.1. Operaciones y propiedades en $\mathbb{Z}$	24
1.4. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$	27
1.4.1. Transformación de un número racional	28
1.4.2. Igualdad de números racionales	30
1.4.3. Amplificación y simplificación de fracciones	31
1.4.4. Relación de orden en $\mathbb{Q}$	32
1.4.5. Operaciones en $\mathbb{Q}$	33
1.4.6. Propiedades de las operaciones en $\mathbb{Q}$	35
1.4.7. Potencias de base racional y exponente entero	36
1.4.8. Notación científica	38
1.4.9. Otras características de los números racionales	43
1.5. El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$	44
1.6. El conjunto de los números Reales $\mathbb{R}$	46
1.6.1. Subconjuntos notables en $\mathbb{R}$	46
1.6.2. Operatoria y propiedades en $\mathbb{R}$	46
1.6.3. Orden en $\mathbb{R}$	47
1.6.4. Valor absoluto de un número real	51
1.6.5. Raíz n-ésima de un número real	53
1.7. EJERCICIOS PROPUESTOS	66
UNIDAD II EXPRESIONES ALGEBRAICAS	70
2.1. Expresiones algebraicas y términos semejantes	70
2.2. Polinomios	72

2.3.	Operaciones con expresiones algebraicas.....	73
2.3.1.	Adición y Sustracción	73
2.3.2.	Multiplicación algebraica:.....	74
2.3.3.	División de expresiones algebraicas.....	77
2.3.4.	Cuocientes notables.....	86
2.4.	Factorización.....	88
2.4.1.	Métodos elementales y directos para factorización	88
2.4.2.	Factores y divisores de un polinomio.....	93
2.5.	Expresiones racionales	98
2.6.	Operatoria algebraica con radicales	108
2.7.	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	112
	UNIDAD III ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA	
	INCÓGNITA	115
3.1.	Conceptos Básicos	115
3.2.	Clasificación de las ecuaciones	116
3.3.	Principios fundamentales de las igualdades que permiten transformar las ecuaciones.....	117
3.4.	Ecuaciones con una incógnita	118
3.4.1.	Ecuaciones de primer grado con una incógnita	119
3.5.	Ecuaciones fraccionarias	122
3.5.1.	Ecuaciones fraccionarias reducibles a ecuaciones de primer grado.....	122
3.6.	Resolución de problemas de planteo	124
3.6.1.	Problemas que se resuelven mediante una ecuación de primer grado.	125
3.7.	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	127
	UNIDAD IV ECUACIONES LINEALES.....	128
4.1.	Ecuaciones lineales con dos incógnitas	128
4.2.	Método para determinar el conjunto solución	129
4.3.	Interpretación geométrica de una ecuación lineal con dos incógnitas	131
4.4.	Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.....	133
4.4.1.	Interpretación gráfica.....	133
4.4.2.	Métodos de resolución	135
4.4.3.	Clasificación de los sistemas lineales.....	138
4.5.	Aplicación a otros sistemas de ecuaciones simultáneas.....	140
4.6.	Problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales	143

4.7. EJERCICIOS PROPUESTOS.....	147
UNIDAD V ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA	148
5.1. Ecuación Cuadrática	148
5.1.1. Soluciones o raíces de la ecuación cuadrática	148
5.1.2. Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática	151
5.1.3. Otros métodos de resolución de la ecuación cuadrática.....	155
5.1.4. Relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática	157
5.2. Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de segundo grado.	160
5.3. Problemas de aplicación a ecuación de segundo grado.	165
5.4. Algunas ecuaciones no lineales reducibles a Ecuaciones de 2º grado	167
5.4.1. Ecuaciones Fraccionarias	167
5.4.2. Ecuaciones Irracionales	170
5.4.3. Ecuaciones Trinomias.....	172
5.5. Algunos Sistemas de Ecuaciones no lineales.	176
5.6. EJERCICIOS PROPUESTOS.....	183
UNIDAD VI LOGARITMOS	185
6.1. Logaritmos de números reales positivos	185
6.2. Propiedades de los logaritmos.....	187
6.3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.....	195
6.3.1. Resolución de ecuaciones exponenciales.....	196
6.3.2. Resolución de ecuaciones logarítmicas	197
6.4. Sistemas de ecuaciones no lineales que involucran logaritmos, exponenciales y radicales	201
6.5. EJERCICIOS PROPUESTOS.....	209
PRUEBAS AÑOS ANTERIORES.....	211
PRUEBA 1	211
PRUEBA 2	233
PRUEBA 3	242
PRUEBA 4	259
BIBLIOGRAFÍA GENERAL	268
SÍMBOLOS UTILIZADOS	269

PRESENTACIÓN DEL DOSSIER

Este Dossier presenta el curso completo de Introducción al Algebra que se dicta en el primer año de las carreras de Ingenierías de la Universidad de Tarapacá. Creemos que este material de apoyo a la docencia es importante tanto por la gran cantidad de alumnos que pueda hacer uso de él, como para facilitar la coordinación de los académicos que dictan la asignatura en los diferentes grupos.

El objetivo de realizar este Dossier es el de reforzar a los alumnos de la Asignatura Introducción al Algebra de Ingeniería, y a otros que eventualmente pudieran recurrir a ellos, de modo de fortalecer los contenidos del área de Algebra necesarios como conducta de entrada en las diferentes asignaturas de sus carreras y les permita enfrentar con mejores elementos de juicio las dificultades que pudieran presentarse en el desarrollo de su currículum como estudiantes.

Otro de los objetivos es facilitar la Coordinación de la asignatura, el avance de los contenidos y profundidad de ellos entre los Académicos que dictan la asignatura

El Dossier Introducción al Algebra tiene la ventaja de concentrar en un solo ejemplar todos los aspectos que contempla el desarrollo del programa de la asignatura citada, repartidos en 6 Unidades: Conjuntos Numéricos, Expresiones Algebraicas, Ecuaciones de Primer grado con una incógnita, Ecuaciones Lineales, Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita y Logaritmos. Otra ventaja es la inclusión de pruebas resueltas, realizadas en la asignatura durante los últimos cinco años.

Finalmente, nos sentiremos honradas de recibir cualquier sugerencia que signifique mejorar este dossier, comprometiéndonos a efectuar las actualizaciones pertinentes y adecuar este texto en beneficio de nuestros estudiantes.



UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE ASIGNATURA

IDENTIFICACIÓN	
ASIGNATURA	: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA
Nº HORAS SEMANALES	: DIEZ (6,2,0)
PRE-REQUISITO	: ADMISIÓN
CARRERA	: ESCUELAS DE INGENIERÍAS
SEMESTRE CURRICULAR	: PRIMER SEMESTRE
SEMESTRE ACADÉMICO	: 2014
OBJETIVOS GENERALES	
Capacitar al alumno para:	
• Desarrollar un razonamiento lógico que le permita enfrentar problemas de la vida real. • Utilizar el lenguaje matemático con su rigurosidad lógica, para caracterizar situaciones problemáticas. • Reconocer y aplicar correctamente los elementos de la aritmética y de la operatoria algebraica, necesarios como conducta de entrada en las diferentes asignaturas de la carrera.	
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	
Capacitar al alumno para:	
• Reconocer los diferentes conjuntos numéricos y sus propiedades algebraicas. • Manejar operaciones en los conjuntos numéricos N, Z, Q y R. • Utilizar operatoria del álgebra elemental. • Plantear y resolver problemas en que se aplique los conceptos y operatoria aritmética y algebraica. • Resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2-ecuaciones con 2-incógnitas e interpretar geométricamente sus soluciones.	

- Resolver ecuaciones de segundo grado.
- Operar en el conjunto de polinomios reales ($R[x]$).

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

HABILIDADES:

- Capacidad de análisis, síntesis y evaluación.
- Capacidad de aplicar en forma eficiente las propiedades matemáticas relativas a la asignatura.
- Capacidad de identificar y resolver problemas.
- Capacidad de trabajar en equipo.
- Capacidad de expresar las ideas escritas o habladas en forma clara y precisa.

VALORES Y ACTITUDES:

- Responsabilidad ante sus compromisos académicos.
- Confianza en sí mismos.
- Perseverancia y honestidad en su quehacer.

CONTENIDOS PROGRAMÁTICOS

UNIDADES:

I.- CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Los números naturales (N):

- 1.1 Propiedades Algebraicas.
- 1.2 Divisor y múltiplo de un número natural.
- 1.3 Número primo, número compuesto y números primos entre sí.
- 1.4 Número par e impar.
- 1.5 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

2. Los números enteros (Z):

- 2.1 Propiedades Algebraicas.

3. Los números racionales (Q):

- 3.1 Definición y propiedades algebraicas.
- 3.2 Amplificación y simplificación de fracciones.
- 3.3 Decimal finito y decimal infinito periódico y semiperiódico.
- 3.4 Conversión de estos decimales a fracción.

4. Los números irracionales (I):

- 4.1 Características y propiedades.

5. Los números reales ($R = Q \cup I$):

- 5.1 Propiedades Algebraicas

5.2 Operatoria en $\mathbb{R}$.

5.2.1 Adición y multiplicación.

5.2.2 Potencias de exponentes enteros. Propiedades. Notación científica.

5.2.3 Radicación. Operaciones con raíces.

5.2.4 Racionalización. Tipos de racionalización.

5.2.5 Operaciones combinadas.

5.3 Valor absoluto de un número real y sus propiedades.

II.- EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Definición de expresión algebraica y términos semejantes.

2. Reducción de términos semejantes. Evaluación de expresiones algebraicas.

3. Polinomios. Definición.

4. Adición y multiplicación de expresiones algebraicas, productos notables.

5. División de expresiones algebraicas.

5.1. División de polinomios de una variable. Algoritmo de la división. División sintética.

5.2. Cuocientes notables.

6. Factorización: factores y divisores de un polinomio.

III.- ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

1. Resolución de ecuaciones de primer grado.

2. Ecuaciones con paréntesis y ecuaciones fraccionarias.

3. Problemas de planteo que se resuelven con ecuación de primer grado.

IV.- ECUACIONES LINEALES

1. Ecuaciones lineales con dos o más incógnitas y su interpretación geométrica.

2. Sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica.

3. Métodos de resolución: igualación, sustitución y reducción.

4. Clasificación de los sistemas lineales: compatibles e incompatibles.

5. Problemas que involucran ecuaciones lineales.

V.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

1. Forma general de la ecuación de segundo grado.

2. Métodos de resolución. Por factorización, por completación de cuadrados y por fórmula.

3. Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado.

4. Discriminante.

5. Algunas ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales.

VI.- LOGARITMOS. - Definición. - Propiedades. Cambio de base. - Ecuaciones logarítmicas y exponenciales. - Algunas ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales que involucren logaritmos, exponenciales y radicales.	
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	
- Exposición de contenidos. - Resolución de guías de ejercicios. - Diálogo y análisis reflexivo de los contenidos. - Trabajo grupal en talleres. - Una sesión a la semana de tutoría.	
EVALUACIÓN	
Pruebas. Controles Prueba optativa	
BIBLIOGRAFÍA	
<u>Básica:</u> - PRADO & OTROS. Precálculo, enfoque de resolución de problemas. Pearson. México, 2006 - STEWART, J . Precálculo: matemática para el cálculo. Thomson internacional. México, 2001. - SWOKOWSKI, EARL W. Algebra y trigonometría con geometría analítica. México Cengage Learning, 2002.	
<u>Recomendable:</u> - CISTERNAS M. & MEDINA M. Tópicos de cálculo: Números Reales, Funciones de una.... Apuntes Universidad de Tarapacá, 2000 - LEHMANN CHARLES M. Álgebra. Limusa, México, 1981 - MILLER, HEEREN & HORNSBY. Matemática: Razonamiento y aplicaciones. Pearson. Octava Edición México, 1999. - TAYLOR & WADE. Matemática Básica. Limusa, México, 1967.	
DIRECCIÓN UNIDAD ACADÉMICA	DIRECCIÓN DE DOCENCIA

UNIDAD I CONJUNTOS NUMÉRICOS

La Unidad de conjuntos numéricos considera seis secciones fundamentales, de modo de capacitar al alumno para que: reconozca los diferentes conjuntos numéricos y sus propiedades algebraicas, reconozca y utilice correctamente las operaciones aritméticas en los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

En esta Unidad se presentan, en forma gradual, los conjuntos numéricos desde los números Naturales hasta los números Reales. Así como también los conceptos básicos relacionados con conjunto numéricos, sus características, operaciones, propiedades, subconjuntos notables.

Se indican en cada sección definiciones, ejemplos, ejercicios desarrollados y/o propuestos, con el objeto que el alumno desarrolle la capacidad de expresar las ideas escritas en forma clara y precisa. Finaliza la unidad con ejercicios propuestos con su respectiva respuesta.

Las secciones donde se desarrollan los contenidos de esta unidad son:

1. El conjunto de los números naturales($\mathbb{N}$)
2. El conjunto de los números cardinales ($\mathbb{N}_0$)
3. El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$).
4. El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)
5. El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$)
6. El conjunto de los números Reales ($\mathbb{R}$)

1.1. El conjunto de los números naturales($\mathbb{N}$)

Este Conjunto está formado por el conjunto de números que utilizamos para contar. El conjunto de los números naturales es denotado por $\mathbb{N}$.

Geométricamente, su primer elemento, llamado unidad, se representa en la recta por un segmento con cierta unidad de medida, y se simboliza por el 1.



Se generan otros números agregando cada vez una unidad de medida



Es decir,

$$1+1=2$$

$$1+1+1=3$$

$$1+1+1+1=4$$

:

1 es el primer elemento del conjunto de los números naturales.

En general,

Si n es natural entonces $(n+1)$ es natural y se llama Sucesor de n .

Todos los números naturales, excepto el 1, tienen un antecesor. El antecesor de un natural n se expresa como $(n-1)$.

Así,

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) tiene la característica de tener infinitos elementos y es un conjunto ordenado, es decir, es posible determinar entre dos elementos cual es menor entre ellos.

1.1.1. Operaciones y propiedades en $\mathbb{N}$

En $\mathbb{N}$, se definen las operaciones de adición y multiplicación

Adición de números naturales

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: a + b \in \mathbb{N}$$

Los términos a y b se llaman **sumandos** y, $a + b$ se llama **suma**.

Ejemplo

$$\text{Sean } 3, 7 \in \mathbb{N} \text{ entonces } 3 + 7 = 10 \in \mathbb{N}$$

Donde 3 y 7 son los sumandos y 10 es la suma.

- **Propiedades de la adición en $\mathbb{N}$:**

1. Clausura (o Cerradura): $\forall a, b \in \mathbb{N}: (a + b) \in \mathbb{N}$

2. Conmutatividad: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a + b = b + a$

3. Asociatividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a + (b + c) = (a + b) + c$

Multiplicación de números naturales

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: a \cdot b \in \mathbb{N}$$

Los términos a y b se llaman **factores** y, $a \cdot b$ se llama **producto**.

Ejemplo

Sean $3, 7 \in \mathbb{N}$ entonces $3 \cdot 7 = 21$

Donde 3 y 7 son los factores y 21 es el producto.

• Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{N}$:

1. Clausura (o Cerradura): $\forall a, b \in \mathbb{N}: (a \cdot b) \in \mathbb{N}$
2. Conmutatividad: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a \cdot b = b \cdot a$
3. Asociatividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Existencia de elemento neutro multiplicativo: $\forall a \in \mathbb{N}, \exists! 1 \in \mathbb{N}: a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$,

En $\mathbb{N}$ se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

5. Distributividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:
i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributividad a Izquierda)

Ejemplo

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

$$2 \cdot 8 = 6 + 10$$

$$16 = 16$$

- ii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Distributividad a Derecha)

Ejemplo

$$(3 + 5) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2$$

$$8 \cdot 2 = 6 + 10$$

$$16 = 16$$

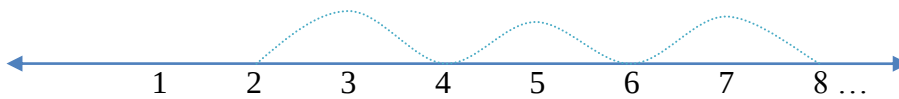
1.1.2. Algunos conceptos en $\mathbb{N}$

- **Conjunto de los números pares.**

Todo $n \in \mathbb{N}$ que es múltiplo de 2, se llama número par. Es decir, n es par $\Leftrightarrow n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Luego

$$\text{Números pares} = \{n = 2k / k \in \mathbb{N}\}$$

Para cada valor de $k \in \mathbb{N}$, se tiene $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$



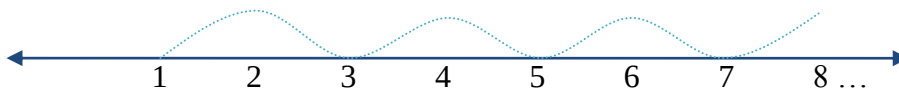
Nota: los pares consecutivos están separados por dos unidades.

- **Conjunto de los números impares.**

Todo $n \in \mathbb{N}$ que se expresa como $n = 2k - 1 / k \in \mathbb{N}$, se llama número impar, es decir, n es impar $\Leftrightarrow n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Luego

$$\text{Números impares} = \{n = 2k - 1 / k \in \mathbb{N}\}$$

Para cada valor de $k \in \mathbb{N}$, se tiene $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$



Nota: los impares consecutivos están separados por dos unidades.

Observación

Los elementos consecutivos de estos conjuntos se expresan de la siguiente forma.

1. *Naturales consecutivos:* n y $(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

2 y 3; 5 y 6; 11 y 12; 100 y 101, son números consecutivos.

2. *Números naturales Pares consecutivos:* $2n$ y $(2n + 2)$ o $2n$ y $2(n + 1)$,
 $n \in \mathbb{N}$

4 y 6; 12 y 14; 38 y 40, son pares consecutivos.

3. *Números naturales Impares consecutivos:* $(2n - 1)$ y $(2n + 1)$ o $(2n - 1)$
y $2(n + 1) - 1$. $n \in \mathbb{N}$.

5 y 7; 13 y 15; 71 y 73, son impares consecutivos.

Ejemplo

1. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, demostrar que si a es un número par y b es un número impar, entonces el número ab es par.

Solución:

Se sabe que a es número par, entonces $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, y b es un número impar, entonces $b = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\text{Luego } a \cdot b &= 2n \cdot (2k - 1), \quad n, k \in \mathbb{N} \\ &= 4nk - 2n \\ &= 2(2nk - n), \quad \text{si } 2nk - n = r \in \mathbb{N}, \text{ entonces} \\ &= 2r.\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $a \cdot b$ es un número par.

2. Sea $a \in \mathbb{N}$ un número par. Demostrar que $a^2 + 3a - 2$ es un número par.

Solución:

Se sabe que a es número par, entonces $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, luego reemplazando en $a^2 + 3a - 2$, se tiene

$$\begin{aligned}a^2 + 3a - 2 &= (2n)^2 + 3(2n) - 2 \\ &= 4n^2 + 6n - 2 \\ &= 2 \cdot (2n^2 + 3n - 1), \quad \text{si } 2n^2 + 3n - 1 = t \in \mathbb{N}, \text{ entonces} \\ &= 2t.\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $a^2 + 3a - 2$ es par.

• Divisor y múltiplo de un número natural

Si $b, c \in \mathbb{N}$, b es **divisor** de c si y sólo si existe $a \in \mathbb{N}$ tal que: $c = ab$.

En otras palabras, si $a, b, c \in \mathbb{N}$ tal que $c = ab$, entonces “ a ” y “ b ” se llaman **factores** o **divisores** de “ c ” y “ c ” es **múltiplo** de a y **múltiplo** de b .

Observación

Diremos que b divide a c , denotado por b/c si y sólo si existe un $a \in \mathbb{N}$ tal $c = ab$

Ejemplo

1. $15 = 3 \cdot 5$, 15 es múltiplo de 3 y de 5.

3 es *factor de* 15, es decir, 3 divide a 15 $\left(\frac{3}{15} \right)$

5 es *factor de* 15, es decir, 5 divide a 15 $\left(\frac{5}{15} \right)$

2. Determinar el conjunto de todos los divisores naturales del número 72.

Expresamos en factores el número 72:

$$72 = 1 \cdot 72$$

$$72 = 2 \cdot 36$$

$$72 = 3 \cdot 24$$

$$72 = 4 \cdot 18$$

$$72 = 6 \cdot 12$$

$$72 = 8 \cdot 9$$

Luego, el conjunto de todos los divisores naturales de 72 es:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

3. Escribir los divisores comunes de 24, 18 y 32.

Divisores de 24: **1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.**

Divisores de 18: **1, 2, 3, 6, 9, 18.**

Divisores de 32: **1, 2, 4, 8, 16, 32.**

Luego los divisores comunes son: 1 y 2.

- **Número primo, número compuesto.**

Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, se dice que “ p ” es un **número primo** si los únicos divisores de p son p y 1.

Si “ p ” no es un número primo, entonces “ p ” es un **número compuesto**.

Nota:

- Todo número compuesto se puede descomponer en factores primos, es decir, puede ser expresado como producto de números primos.
- Esta descomposición en factores primos es única, salvo el orden de los factores.

Ejemplo

$17 = 17 \cdot 1 \Rightarrow 17$ es un número primo.

$15 = 5 \cdot 3 \Rightarrow 15$ es un número compuesto.

Criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo que permite hallar todos los **números primos** menores que un número natural dado.

La Criba de Eratóstenes consiste en eliminar los números que no sean primos y que por tanto sean múltiplos de algún número.

Si quieres obtener números primos, que se encuentren entre 1 y 100 en la siguiente tabla, sigue los pasos indicados:

- Tacha el número 1, ya que por definición, no es primo ni compuesto.
- Encierra el número 2 y tacha sus múltiplos o sea, el 4, el 6, el 8, etc.
- Encierra el número siguiente, que aún no se elimina, o sea el 3, y tacha sus múltiplos.
- Encierra el número siguiente, que aún no se elimina, o sea el 5, y tacha sus múltiplos.
- Repite el paso anterior, hasta terminar con todos los números.

El proceso termina cuando el cuadrado del mayor número confirmado como primo es mayor que el número final de la lista.

Los números encerrados son los números primos.

Los restantes corresponden a los números compuestos, con excepción del 1.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ejercicio

Escribir todos los factores primos de 42.

Se descompone en forma sucesiva

$$42 = 2 \cdot 21$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, \text{ hasta obtener sólo factores primos.}$$

• Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo **mcm** de dos o más números naturales es el menor natural que es el múltiplo de todos ellos.

Para determinar el **mcm** de un conjunto de números naturales descomponemos los números en sus factores primos. Se eligen todos los factores distintos elevados a la mayor potencia. El **mcm** es el producto de estos factores.

Ejemplo

Calcular el **mcm** de 2, 9, 7, 21 y 3.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 2 \\ 9 = 3^2 \\ 7 = 7 \\ 21 = 3 \cdot 7 \\ 3 = 3 \end{array} \right\} \text{ entonces } \mathbf{mcm} (2, 9, 7, 21, 3) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126.$$

Ejemplo

Determinar el **mcm** de 24, 16 y 34.

Se descompone en factores primos los números dados.

$$\left. \begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 16 = 2^4 \\ 34 = 2 \cdot 17 \end{array} \right\} \text{ entonces } \mathbf{mcm}(24,16,34) = 2^4 \cdot 3 \cdot 17 = 816.$$

- **Máximo común divisor**

El máximo común divisor *MCD* de dos o más números naturales es el mayor natural que es divisor de todos ellos.

Para determinar el *MCD* de un conjunto de números naturales descomponemos los números en sus factores primos, se eligen **los factores comunes** con la **menor potencia**. El *MCD* es el producto de estos factores.

Ejemplo

Calcular el *MCD* de 15, 6, y 9.

$$\left. \begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 9 = 3 \cdot 3 \end{array} \right\} \text{ entonces } \mathbf{MCD}(15, 6, 9) = 3.$$

Calcular el *MCD* de 36, 54, y 24.

$$\left. \begin{array}{l} 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 54 = 2 \cdot 3^3 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array} \right\} \text{ entonces } \mathbf{MCD}(36, 54, 24) = 2 \cdot 3 = 6.$$

- **Números primos entre sí.**

Dos números naturales son **números primos entre sí** (o **primos relativos**), si, no tienen ningún factor primo en común, es decir, si no tienen otro divisor común más que 1.

Ejemplo

Sean los números naturales: 15 y 14. Si los expresamos en factores primos, tenemos: $15 = 3 \cdot 5$ y $14 = 2 \cdot 7$

Se observa que no hay factores primos comunes. Por lo tanto los números 15 y 14 son primos entre sí.

Nota: Dos números naturales son primos entre sí, si el MCD entre ellos es 1.

Ejemplo

Los números 21 y 26 son primos entre si ya que no tiene divisores primos comunes, en efecto

$$21 = 3 \cdot 7 \quad \text{y} \quad 26 = 2 \cdot 13$$

Luego $MCD\{21,26\} = 1$

Observación

- a) El mcm de dos números primos, es igual a su producto.

$$mcm\{7,17\} = 7 \cdot 17 = 119$$

- b) El mcm de dos números, tales que uno de ellos es un factor del otro, es igual al mayor de ellos.

$$mcm\{5,65\} = 65$$

- c) El MCD de dos números, tales que son primos entre sí, es igual a 1.

$$MCD\{3,35\} = 1$$

- d) El MCD de dos números, tales que uno de ellos es un factor del otro, es igual al menor de ellos.

$$MCD\{3,21\} = 3$$

- e) El producto de dos números es igual al producto de su mcm y su MCD .

Sean números 12 y 66 entonces

$$mcm\{12,66\} = 132 \quad \text{y} \quad MCD\{12,66\} = 6$$

Luego $12 \cdot 66 = 792$ y $mcm \cdot MCD = 132 \cdot 6 = 792$

Ejercicios

1. Un carpintero quiere cortar una plancha de madera de 256 $cm.$ de largo y 96 $cm.$ de ancho, sin que sobre ningún pedazo, en cuadrados del mayor tamaño posible.

¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
 ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

Solución:

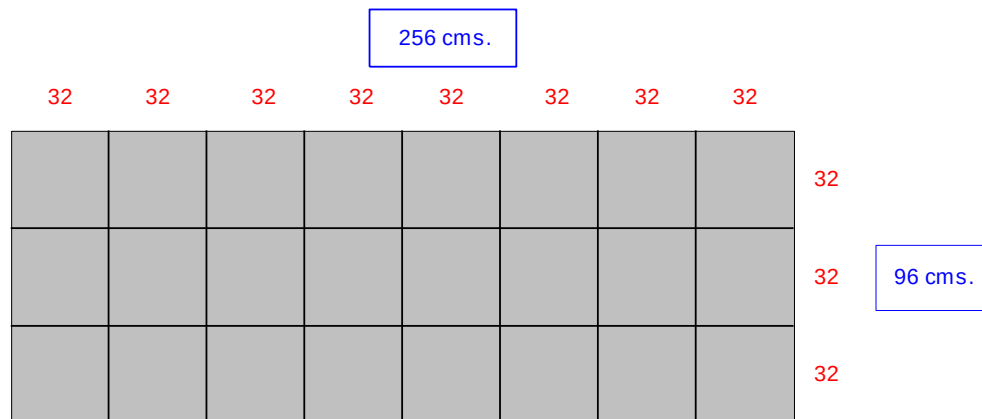
Se descomponen en factores primos

$$\left. \begin{array}{l} 96 = 3 \cdot 2^5 \\ 256 = 2^8 \end{array} \right\} \text{ luego el MCD } (256, 96) = 2^5 = 32$$

El Largo se puede dividir en 8 partes de 32 cm cada uno y el ancho se puede dividir en 3 partes de 32 cm cada uno.

La longitud del lado de cada cuadrado es 32 cm.

Se obtienen 24 cuadrados de la plancha de madera.



2. Un viajero va a Iquique cada 18 días, otro cada 15 días y un tercero lo hace cada 8 días. Al 19 de Agosto de 2014 han coincidido en Iquique los 3 viajeros.
 ¿En cuántos días, como mínimo, volverán a coincidir en Iquique?
 ¿Cuál será el día donde se vuelvan a encontrar?

Solución

Se descomponen en factores primos.

$$\left. \begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 8 = 2^3 \end{array} \right\} \text{ luego el } mcm(18, 15, 8) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Los viajeros volverán a coincidir en 360 días.

Se encontrarán el 14 de Agosto del 2015.

Observación

En $\mathbb{N}$ no siempre es posible resolver la ecuación $a + x = a$. Esta ecuación solo tiene solución para $x = 0$, pero $0 \notin \mathbb{N}$.

De ahí la necesidad de ampliar el ámbito numérico a $\mathbb{N}_0$

1.2. El conjunto de los números cardinales ($\mathbb{N}_0$)

Los **números cardinales** indican el **número de elementos** que tiene un conjunto. Un conjunto puede tener una cantidad finita o infinita de elementos.

Ejemplo

El cardinal de $A = \{a, b\}$, es 2

El cardinal de $B = \{4, 5, 6\}$, es 3

El cardinal de $C = \{ \}$, es 0

El conjunto de **todos** los números cardinales se expresa como:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Observación

1. Todo número natural es cardinal, es decir, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$.
2. $\mathbb{N}_0$ con la Adición cumple las propiedades de clausura, conmutativa y asociativa ($\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$).
Además $\mathbb{N}_0$ cumple la propiedad de **Existencia de elemento Neutro aditivo**:

$$\forall a \in \mathbb{N}_0, \exists! 0 \in \mathbb{N}_0 : a + 0 = a = 0 + a$$

(0 es el elemento neutro aditivo).

Observación

- En $\mathbb{N}_0$ sólo es posible resolver la ecuación $a + x = b$, con $a, b \in \mathbb{N}$ si y sólo si $b \geq a$.

Es decir, Si $b > a$, la ecuación $ax + b = 0$, tiene solución en $\mathbb{N}$.
Por ejemplo $2 + x = 7$, $x = 5 \in \mathbb{N}$

Si $b = a$, la ecuación $ax + a = 0$, tiene solución en $\mathbb{N}_0$.
 Por ejemplo $3 + x = 3$, $x = 0 \in \mathbb{N}_0$

- Si $b < a$, por ejemplo $6 + x = 2$, la ecuación no tiene solución en $\mathbb{N}_0$.

Luego ampliamos el ámbito numérico a $\mathbb{Z}$, donde la ecuación $a + x = b$, con $a, b \in \mathbb{N}$ siempre tiene solución.

1.3. El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$).

El conjunto de los números enteros queda definido por

$$\mathbb{Z} = \{x / a + x = b, \forall a, b \in \mathbb{N}\}$$

Así, expresado el conjunto por extensión queda como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\text{opuestos de } \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

En $\mathbb{Z}$ se tienen los siguientes subconjuntos notables:

Enteros positivos

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Enteros negativos

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots - 4, -3, -2, -1\}$$

Enteros no negativos

$$\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

Enteros no positivos

$$\mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Así,
$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Nota:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$
2. $0 \notin \mathbb{Z}^-, 0 \notin \mathbb{Z}^+$

1.3.1. Operaciones y propiedades en $\mathbb{Z}$

En el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) se define las operaciones de:

Adición $\forall a, b \in \mathbb{Z}: (a + b) \in \mathbb{Z}$

Multipliación $\forall a, b \in \mathbb{Z}: (a \cdot b) \in \mathbb{Z}$

Regla de los signos para la adición en $\mathbb{Z}$

- Si los números tienen el mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le coloca el signo común:
$$3 + 5 = 8$$
$$(-3) + (-5) = -8$$
- Si los números son de distinto signo, se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y al resultado se le coloca el signo del número con mayor valor absoluto:

$$-3 + 5 = 2$$
$$3 + (-5) = -2$$

Regla de los signos para la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

+	por	+	=	+
-	por	-	=	+
+	por	-	=	-
-	por	+	=	-

Propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{Z}$.

1. **Clausura** (o Cerradura): si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$(a + b) \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad (a \cdot b) \in \mathbb{Z}$$

2. **Conmutatividad:** $\forall a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a + b = b + a \quad \wedge \quad a \cdot b = b \cdot a$$

3. **Asociatividad:** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \wedge \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

4. **Distributividad:** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{Distributividad a Izquierda})$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{Distributividad a Derecha})$$

5. **Existencia de elemento Neutro aditivo:** $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! 0 \in \mathbb{Z}$:
 $a + 0 = 0 = 0 + a$ (0 es el elemento neutro aditivo).
6. **Existencia de elemento Inverso aditivo:** $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! (-a) \in \mathbb{Z}$:
 $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ ($-a$ es el elemento inverso aditivo de a).
7. **Existencia de elemento Neutro multiplicativo:** $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! 1 \in \mathbb{Z}$:
 $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ (1 es el elemento neutro multiplicativo).
8. **Propiedad del cero:** $\forall a \in \mathbb{Z}$:
 $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

Observación

1. En $\mathbb{Z}$ siempre es posible resolver la ecuación $a + x = b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.
 La solución, para x , es $x = b + (-a)$

 Notación: $b - a = b + (-a)$, operación llamada **sustracción**.
 Es decir, la diferencia entre dos enteros, se puede expresar como la suma del primer entero y el inverso aditivo del otro.
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a - b = c, \quad c \in \mathbb{Z}$. donde a se llama **minuendo**, b se llama **sustraendo** y c resta o **diferencia**.

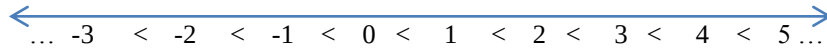
Observación

En $\mathbb{Z}$ también son válidas las siguientes definiciones dadas para los números naturales.

1. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $c = ab$, entonces **a y b** se llaman factores o divisores de **c** y **c** se llama múltiplo de **a** y múltiplo de **b** .
2. Un número $n \in \mathbb{Z}$, es par si $n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$.
3. Un número $n \in \mathbb{Z}$, es impar si $n = 2k + 1$ o $n = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$.
4. Un entero p es **primo**, si siendo distinto de cero y distinto de ± 1 , solamente admite como divisores a ± 1 y $\pm p$.

5. Todo número natural es entero. Es decir $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

6. Orden en $\mathbb{Z}$



Todo número negativo es menor que cualquier número positivo.

Ejercicios

1. Determinar por extensión el conjunto de todos los divisores enteros del número 64.

Solución

$$64 = 1 \cdot 64 = (-1) \cdot (-64)$$

$$64 = 2 \cdot 32 = (-2) \cdot (-32)$$

$$64 = 4 \cdot 16 = (-4) \cdot (-16)$$

$$64 = 8 \cdot 8 = (-8) \cdot (-8)$$

Luego, dos divisores enteros de 64 son

$$\{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8, -16, 16, -32, 32, -64, 64\}$$

2. Demostrar que en $\mathbb{Z}$, el producto de números pares es par, y que el producto de números impares es impar.

Solución

Sean a y b números pares, entonces

$$a = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$b = 2q, \quad q \in \mathbb{Z}$$

$$a \cdot b = (2p) \cdot (2q)$$

$$= 4pq$$

$$= 2 \cdot (2pq), \quad 2pq \in \mathbb{Z} \quad \text{por clausura}$$

$$= 2r \quad \text{con} \quad r = 2pq.$$

Luego, $a \cdot b$ es par en $\mathbb{Z}$.

Ejercicios

1. Demostrar que el producto de números enteros impares es impar.

2. Sean a y b números enteros impares.

Demostrar que $(a + 5)^3 \cdot (b + 3)^3 + 8$, es un número par.

¿En $\mathbb{Z}$, es posible resolver siempre la ecuación $bx = a$ con $a, b \in \mathbb{Z}$?

1.4. El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

En el conjunto de los Números Enteros no siempre es posible resolver ecuaciones de la forma $bx = a$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Veamos } 4x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 3, \quad 3 \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -14 \quad \Rightarrow \quad x = -7, \quad (-7) \in \mathbb{Z}$$

$$5x = 19 \quad \Rightarrow \quad \text{no existe } x \in \mathbb{Z} \text{ que satisfaga la ecuación.}$$

Por lo tanto, la ecuación $bx = a$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, tiene solución en $\mathbb{Z}$ si y sólo si a es múltiplo de b o b es divisor de a .

Luego, si a no es múltiplo de b , la ecuación no tiene solución en $\mathbb{Z}$.

Para solucionar esta dificultad, se hace necesario ampliar el conjunto de los enteros, al conjunto de los Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Este conjunto está formado por todos los números que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$ siendo a y b números enteros y $b \neq 0$.

Así,

$$\mathbb{Q} = \{x / bx = a, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{x / x = \frac{a}{b}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\right\}$$

Luego, algunos racionales: $-\frac{4}{1}$; $-\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{27}{3}$; $\frac{102}{8}$; $5\frac{2}{3}$, etc.

Observaciones

1. Subconjuntos notables en $\mathbb{Q}$.

$$\text{Racionales Positivos:} \quad \mathbb{Q}^+ = \left\{\dots; \frac{1}{2}; 1; \frac{4}{3}; 2; \frac{11}{5}; 3; \dots\right\}$$

$$\text{Racionales Negativos:} \quad \mathbb{Q}^- = \left\{\dots; -2; -\frac{5}{2}; -1; -\frac{1}{3}; \dots\right\}$$

$$\text{Racionales no negativos:} \quad \mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$$

$$\text{Racionales no positivos:} \quad \mathbb{Q}_0^- = \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$

2. Todo $m \in \mathbb{Z}$ se puede expresar como $\frac{m}{1}$, luego $m \in \mathbb{Q}$ y por lo tanto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

3. Partes de una fracción $\frac{a}{b} = \frac{\text{NUMERADOR}}{\text{DENOMINADOR}}$
4. Aquella fracción cuyo numerador es mayor a su denominador, se denomina **fracción impropia**.
5. Todo **número Mixto** está formado por una **parte entera** y una **fracción**.

Un número Mixto se expresa como suma de la parte entera y la fracción:

$$6\frac{3}{7} = 6 + \frac{3}{7} = \frac{45}{7}$$

Toda fracción impropia se expresa como número mixto y viceversa, ejemplo:

$$\frac{8}{3} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2\frac{2}{3} \in \mathbb{Q},$$

6. Formas de escribir un número racional:

Forma de Fracción: $\frac{a}{b}$

Forma de número Decimal: efectuando la división $a:b$

$$\frac{3}{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3:5 = 0,6 \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{8}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 8:3 = 2,66666 \dots = 2,\overline{6} \in \mathbb{Q}$$

7. Existen números que no pueden escribirse de la forma $\frac{a}{b}$.

1.4.1. Transformación de un número racional

- a) Toda fracción puede transformarse en número decimal dividiendo el numerador por el denominador.

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} \Rightarrow 3:5 = 0,6 \\ \frac{7}{4} \Rightarrow 7:4 = 1,75 \end{array} \right\} \text{Decimal finito}$$

- Decimal finito: tiene una cantidad finita de cifras después de la coma

$$\frac{4}{9} \Rightarrow 4:9 = 0,44444 \dots = 0,\overline{4} \quad \text{Decimal infinito periódico.}$$

- Decimal infinito periódico: el período aparece después de la coma.

- $$\frac{59}{18} \Rightarrow 59:18 = 3,2777 \dots = 3,2\bar{7} \quad \text{Decimal infinito semiperiódico.}$$
- Decimal infinito semiperiódico: tiene decimales que anteceden al período

Observación

De una fracción se obtiene un decimal finito o un decimal infinito periódico o semiperiódico

- b) Todo decimal finito o decimal infinito periódico o semiperiódico puede expresarse como fracción.

Ejemplo

1. Convertir decimal finito a fracción:

$$\left. \begin{aligned} 4,5 &= 4\frac{5}{10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} \\ 0,24 &= \frac{24}{100} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} \end{aligned} \right\}$$

2. Convertir decimal infinito periódico a fracción:

Se procede de la siguiente forma:

Sea $x = 0,3\bar{3}$ decimal infinito periódico

$10x = 3,3\bar{3}$, amplificamos por 10 la igualdad,

La resta entre ambas expresiones es:

$$10x = 3,3\bar{3}$$

$$\underline{x = 0,3\bar{3}}$$

$$9x = 3$$

Despejando y simplificando se tiene $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Por lo tanto, $0,3\bar{3} = \frac{1}{3}$

3. Convertir decimal infinito semiperiódico a fracción:

Se procede de la siguiente forma:

Sea $x = 2,13\overline{02}$ decimal infinito semiperiódico
 $10000x = 21302,\overline{02}$, amplifcamos por 10000 la igualdad, hasta cubrir el periodo.
 $100x = 213,\overline{02}$, amplifcamos por 100 la igualdad, para cubrir hasta antes del periodo.

La resta entre ambas expresiones es:

$$\begin{array}{r} 10000x = 21302,\overline{02} \\ 100x = 213,\overline{02} \\ \hline 9900x = 21089 \\ x = \frac{21089}{9900} \end{array}$$

Por lo tanto, $2,13\overline{02} = \frac{21089}{9900}$

Ejercicios

1. Transformar los siguientes decimales a fracciones:

$0,\overline{5}$; $3,\overline{7}$; $22,\overline{36}$; $0,31\overline{4}$; $4,32\overline{1}$.

2. Determinar el valor de la siguiente expresión:

$$A = (0,0875) \left(\frac{720}{7} \right) (0,4\overline{5}) - 2.1$$

3. Determinar el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{3\frac{1}{4} + 0.\overline{6}}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}} + \frac{3}{5}$$

1.4.2. Igualdad de números racionales

Definición

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Observación

Esta igualdad en $\mathbb{Q}$, introduce el concepto de **fracciones equivalentes**.

Ejemplos

$\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$ representan al mismo número racional ya que

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{24} \Leftrightarrow 5 \cdot 24 = 8 \cdot 15$$

$$120 = 120$$

Es decir, $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$ son fracciones equivalentes

1.4.3. Amplificación y simplificación de fracciones

Amplificación de fracciones: amplificar una fracción es un multiplicar tanto su numerador como su denominador por un mismo número distinto de cero. Es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0$$

$$\text{Así } \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24} \quad \therefore \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}.$$

También se puede efectuar otro proceso para transformar $\frac{15}{24}$ en fracción equivalente a $\frac{5}{8}$. Este proceso es la simplificación

Simplificación de fracciones: simplificar una fracción es dividir tanto su numerador como su denominador por un mismo número distinto de cero, que sea factor común de ambos. Es decir:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0$$

$$\text{Del ejemplo anterior tenemos que } \frac{15}{24} = \frac{15:3}{24:3} = \frac{5}{8} \quad \therefore \quad \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

Observación

- Una fracción se dice que es **irreducible** si está completamente simplificada.
- Toda fracción irreducible está formada por números primos entre sí.

Ejemplos

$$1. \quad \frac{4}{3} = \frac{8}{6}; \quad \frac{7}{5} = \frac{-21}{-15} = \frac{21}{15} \quad \text{Amplificación}$$

$$2. \quad \frac{28}{30} = \frac{14}{15}; \quad -\frac{27}{81} = -\frac{9}{27} \quad \text{Simplificación}$$

3. De las fracciones simplificadas anteriores, se tiene que $\frac{14}{15}$ es irreducible pues, 14 y 15 *son primos entre sí*, pero $-\frac{9}{27}$ no es irreducible ya que 9 y 27 *no son primos entre sí*, lo que implica que se puede seguir simplificando.

1.4.4. Relación de orden en $\mathbb{Q}$

Definición

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d \leq b \cdot c$

Ejemplo

Ordene de menor a mayor los siguientes números racionales: $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{8}$ y $\frac{29}{60}$

Se compara entre dos de ellos

$$\text{i)} \quad \frac{3}{5} \text{ y } \frac{6}{8} \Rightarrow 3 \cdot 8 < 5 \cdot 6 \quad \therefore \frac{3}{5} < \frac{6}{8}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{6}{8} \text{ y } \frac{29}{60} \Rightarrow 6 \cdot 60 > 8 \cdot 29 \quad \therefore \frac{6}{8} > \frac{29}{60}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{3}{5} \text{ y } \frac{29}{60} \Rightarrow 3 \cdot 60 > 5 \cdot 29 \quad \therefore \frac{3}{5} > \frac{29}{60}$$

Concluyendo, se tiene $\frac{29}{60} < \frac{3}{5} < \frac{6}{8}$

Otra forma para ordenar números racionales:

Se amplifican todas las fracciones igualando los denominadores con el m.c.m de ellos.

- Se calcula $m.c.m \{5, 8, 60\} = 120$
- Se amplifica cada fracción, hasta obtener fracciones con denominador 120

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 24}{5 \cdot 24} = \frac{72}{120}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 15}{8 \cdot 15} = \frac{90}{120}$$

$$\frac{29}{60} = \frac{29 \cdot 2}{60 \cdot 2} = \frac{58}{120}$$

- Se comparan los numeradores y se concluye el orden entre ellos

$$\frac{58}{120} < \frac{72}{120} < \frac{90}{120} \quad \therefore \quad \frac{29}{60} < \frac{3}{5} < \frac{6}{8}$$

Ejercicios

Ordenar en forma ascendente los siguientes números:

1. $\frac{2}{3}; \frac{5}{8}; \frac{7}{12}$

2. $\frac{9}{14}; \frac{13}{21}; \frac{23}{35}$

3. $0.2875; \frac{49}{500}; \frac{9}{8}(0.6\bar{5}); \frac{276}{960}$

4. $\frac{3}{8}; \frac{5}{12}; \frac{11}{30}$

1.4.5. Operaciones en $\mathbb{Q}$

En $\mathbb{Q}$ se definen dos operaciones adición y multiplicación

I. Adición de fracciones

1. Adición de Fracciones Homogéneas:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Ejemplos

- $\frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$
- $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = 2$
- $\frac{12}{7} + \frac{-4}{7} = \frac{12+(-4)}{7} = \frac{8}{7}$

2. Adición de Fracciones Heterogéneas:

Para sumar este tipo de fracciones se reduce todas a fracciones equivalentes y que tengan un denominador común igual al mcm de los denominadores.

Ejemplo

- $$\begin{aligned} \frac{7}{5} + \frac{2}{3} &= \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} \\ &= \frac{21}{15} + \frac{10}{15} \\ &= \frac{31}{15}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{5}{12} + \frac{5}{3} &= \frac{5}{12} + \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{20}{12} \\ &= \frac{25}{12}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{1}{8} + \frac{-5}{7} &= \frac{1 \cdot 7}{8 \cdot 7} + \frac{-5 \cdot 8}{7 \cdot 8} \\ &= \frac{7 + (-40)}{56} \\ &= \frac{-33}{56}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{-3}{11} + \frac{-5}{2} &= \frac{(-3) \cdot 2 + 11 \cdot (-5)}{22} \\ &= \frac{(-6) + (-55)}{22} \\ &= \frac{-61}{22} \\ &= -2\frac{17}{22}\end{aligned}$$

Observación

$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ con b y d primos entre sí, se tiene $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

En efecto, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

Ejercicios

Realice las operaciones: 1) $\frac{7}{12} - \frac{8}{12}$ 2) $\frac{4}{5} - \frac{3}{10} + \frac{3}{7}$

II. Multiplicación de fracciones

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Antes de multiplicar numerador con numerador y denominador con denominador, simplificar cuando sea posible.

Ejemplo

Multiplique los siguientes números racionales

- $$\frac{6}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}$$

$$\bullet \quad \frac{13}{12} \cdot \frac{8}{26} = \frac{13 \cdot 8}{12 \cdot 26} = \frac{13 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13} = \frac{1}{3}$$

1.4.6. Propiedades de las operaciones en $\mathbb{Q}$

1. **Clausura** (o Cerradura): si a y b son números racionales, entonces:

$$(a + b) \in \mathbb{Q} \quad \wedge \quad (a \cdot b) \in \mathbb{Q}$$

2. **Conmutatividad**: para a y b , números racionales, se cumple:

$$a + b = b + a \quad \wedge \quad a \cdot b = b \cdot a$$

3. **Asociatividad**: para a , b y c números racionales, se cumple:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \wedge \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

4. **Distributividad**: para a , b y c números racionales, se cumple:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{Distributividad a Izquierda})$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{Distributividad a Derecha})$$

5. **Existencia de elemento Neutro aditivo**: $\forall a \in \mathbb{Q}, \exists! 0 \in \mathbb{Q}$:

$$a + 0 = a = 0 + a \quad (0 \text{ es el neutro aditivo}).$$

6. **Existencia de elemento Neutro multiplicativo**: $\forall a \in \mathbb{Q}, \exists! 1 \in \mathbb{Q}$

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \quad (1 \text{ es el neutro multiplicativo}).$$

7. **Existencia de elemento Inverso aditivo**: $\forall a \in \mathbb{Q}, \exists! (-a) \in \mathbb{Q}$:

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a \quad (-a \text{ es el inverso aditivo de } a).$$

8. **Existencia de elemento Inverso multiplicativo**:

$$\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, \exists! a^{-1} \in \mathbb{Q}:$$

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a \quad (a^{-1} \text{ es el inverso multiplicativo de } a).$$

$$\text{Notación } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Observación

1. Sustracción en $\mathbb{Q}$: $\forall a, b \in \mathbb{Q}: a - b = a + (-b)$

2. $\forall a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0 \quad \exists! b^{-1} \in \mathbb{Q} / a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$$\text{De donde se tiene } \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, \quad a : b = a \cdot b^{-1}$$

3. División en $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Ejemplo

Divida los números racionales

$$\bullet \quad \frac{14}{5} : \frac{7}{3} = \frac{14}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{14 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{5}$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{16}{24} : \frac{8}{15} = \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{8} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{5}{4}$$

Ejercicio

Reducir la siguiente expresión:

$$E = \frac{\frac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} + \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}}{\frac{4 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{5 - \frac{1}{5}}{24}}$$

1.4.7. Potencias de base racional y exponente entero

La expresión x^n se llama **potencia enésima de x** y es igual a un producto de n factores iguales a x .

Es decir, $x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdots x$ (n factores x)

Donde x se llama **base** y n se llama exponente de la **potencia**.

$$Potencia = (base)^{exponente}$$

La potencia de una base con exponente par, siempre es positiva; pero la potencia de una base con exponente impar, depende del signo de la base:

$$[+]^{par} = + \qquad \qquad \qquad [+]^{impar} = +$$

$$[-]^{par} = + \qquad \qquad \qquad [-]^{impar} = -$$

■ Leyes que rigen a las potencias

- 1 Multiplicación de potencias de igual base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- 2 División de potencias de igual base $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- 3 Potencia de potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- 4 Potencia de un producto $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- 5 Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- 6 Exponente negativo $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
Con $n \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$
- 7 Potencia negativa de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

Observación: $\frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n}$
- 8 Exponente cero $a^0 = 1$, con $a \neq 0$

Ejemplos

1. $2^{m+3} \cdot 2^{m+4} \cdot 2^{4-2m} = 2^{m+3+m+4+4-2m} = 2^{11} = 2048$
2. $2^{4^0} + 5^{7^0} - 8^{9^0} = 2 + 5 - 8 = -1$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = (2)^2 + (3)^3 + (5)^4 = 656$

$$4. \frac{21^6 \cdot 35^3 \cdot 80^3}{15^4 \cdot 14^9 \cdot 30^2} = \frac{3^6 \cdot 7^6 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 5^3 \cdot (2^4)^3}{3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^9 \cdot 7^9 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^9}{2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^9} = 2$$

$$5. \frac{(-2)^3(-3)^3+5^4-6^3-5(10)^2}{-27\left(\frac{-2}{3}\right)^3-49(-7)^{-2}+5^0} = \frac{6^3+5^4-6^3-5 \cdot 5^2 \cdot 2^2}{-3^3 \frac{(-2)^3}{3^3} - 7^2 \cdot \frac{1}{7^2} + 1}$$

$$= \frac{5^4-5^3 \cdot 4}{-(-2)^3-1+1} = \frac{5^3(5-4)}{2^3} = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$$

$$6. \left(\frac{12^3 \cdot 98^2 \cdot 75^3}{80 \cdot 45^3 \cdot 490^2}\right)^3 = \frac{12^9 \cdot 98^6 \cdot 75^9}{80^3 \cdot 45^9 \cdot 490^6} = \frac{3^9 \cdot 4^9 \cdot 2^6 \cdot 49^6 \cdot 3^9 \cdot 25^9}{16^3 \cdot 5^3 \cdot 5^9 \cdot 9^9 \cdot 49^6 \cdot 2^6 \cdot 5^6} = \frac{9^9 \cdot 2^{18} \cdot 2^6 \cdot 49^6 \cdot 5^{18}}{2^{12} \cdot 2^6 \cdot 5^{18} \cdot 9^9}$$

■ Potencias de base 10

$10^0 = 1$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$
$10^1 = 10$	
$10^2 = 100$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$
$10^3 = 1000$	
$10^4 = 10000$	$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$
$\vdots$	$\vdots$

Observación

1. El exponente del 10 coincide con la cantidad de ceros que tiene el número.
2. El número que es menor que 1, tiene exponente negativo.

1.4.8. Notación científica

La Notación Científica nos ayuda a poder expresar de forma más sencilla aquellas cantidades numéricas que son demasiado grandes o por el contrario, demasiado pequeñas.

Al escribir un número en notación científica, usaremos una **potencia de 10** que multiplica a un **número** siempre entre 1 y 10. O sea, el número sólo podrá tener **una** cifra delante de la coma decimal.

Un número en notación científica es de la forma

$$N = p \cdot 10^k \quad \text{dónde} \quad 1 \leq p < 10, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por ejemplo $3,86 \cdot 10^5$ es un número en notación científica

El número 3,86 es mayor que uno y menor que diez y está multiplicado por una potencia de 10, es decir,

$$3,86 \text{ (número)} , 10^5 \text{ (potencia de 10)}$$

$$1 \leq 3,86 < 10$$

Ejemplos

Los siguientes números no están expresados en notación científica

- 1.- $38,6 \cdot 10^6$ el número 38,6 tiene dos cifras antes de la coma decimal.
- 2.- $0,386 \cdot 10^6$ delante de la coma decimal hay un cero, y debe tener una cifra distinta de cero.

Ejercicio

Expresa en notación científica

- 1.- 430000000

$$430000000 = 4,3 \cdot 10^8$$

- 2.- 9563000

$$9563000 = 9,563 \cdot 10^6$$

- 3.- 2555

$$2555 = 2,555 \cdot 10^3$$

- 4.- 0,000025

$$0,000025 = 2,5 \cdot 10^{-5}$$

- 5.- 0,00916

$$0,00916 = 9,16 \cdot 10^{-3}$$

6.- $0,00000003$

$$0,00000003 = 3 \cdot 10^{-8}$$

Observación

Desplazamiento de la coma:

1. Si se **multiplica** por diez un número decimal, la coma se desplaza un lugar hacia la **derecha**. Si se **multiplica** por cien, se desplaza dos lugares, etc.

$$25,115 \cdot 10 = 251,15$$

$$25,115 \cdot 100 = 2511,5$$

$$25,115 \cdot 10000 = 251150$$

2. Si se **divide** entre 10, la coma se desplaza un lugar hacia la **izquierda**, si se divide entre 100, dos lugares, etc.

$$25,115 : 10 = 2,5115$$

$$25,115 : 100 = 0,25115$$

$$25,115 : 10000 = 0,00251150$$

En un número en notación científica no es necesario multiplicar o dividir por diez para desplazar la coma, ya que esa multiplicación se puede obtener a partir del exponente de la potencia de 10.

Ejemplos

En los números dados en notación científica, cambie el exponente de la potencia de 10.

1.- $7,56 \cdot 10^5$

$$(7,56 \cdot 10) \cdot 10^4 = 75,6 \cdot 10^4$$

$$(7,56 : 10) \cdot 10^6 = 0,756 \cdot 10^6$$

2.- $4,33 \cdot 10^{-5}$

$$(4,33 \cdot 10) \cdot 10^{-6} = 43,3 \cdot 10^{-6}$$

$$(4,33 : 10) \cdot 10^{-4} = 0,433 \cdot 10^{-4}$$

Observación

1. Para mover la coma hacia la derecha, el exponente del diez debe disminuir:

$$7,56 \cdot 10^5 = 75,6 \cdot 10^4$$

$$4,33 \cdot 10^{-5} = 43,3 \cdot 10^{-6}$$

2. Para desplazar la coma hacia la izquierda, el exponente del diez debe aumentar:

$$7,56 \cdot 10^5 = 0,756 \cdot 10^6$$

$$4,33 \cdot 10^{-5} = 0,433 \cdot 10^{-4}$$

■ Operatoria en notación científica

Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir números expresados en notación científica.

Adición y sustracción

Para poder sumar dos números en notación científica ambos deben tener el mismo exponente en la potencia de 10:

- Si las potencias de 10 son iguales como factor común, entonces se reducen como términos semejantes.
- Si las potencias de 10 tienen distintos exponentes, entonces primero se igualan los exponentes y luego se procede como en el caso anterior.

Ejercicios

Realice las operaciones que se indican

$$1.- \quad 1,9 \cdot 10^4 + 9,9 \cdot 10^4 = \mathbf{11,8 \cdot 10^4}$$

$$2.- \quad 6,5 \cdot 10^{-3} + 3,1 \cdot 10^{-3} = \mathbf{9,6 \cdot 10^{-3}}$$

$$3.- \quad 3,5 \cdot 10^4 + 7,2 \cdot 10^5 = 3,5 \cdot 10^4 + 72 \cdot 10^4 = \mathbf{75,5 \cdot 10^4}$$

$$4.- \quad 3,8 \cdot 10^{-5} - 1,9 \cdot 10^{-6} = 3,8 \cdot 10^{-5} - 1,9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5}$$

$$= 3,8 \cdot 10^{-5} - 0,19 \cdot 10^{-5} = \mathbf{3,61 \cdot 10^{-5}}.$$

$$3,8 \cdot 10^{-5} - 1,9 \cdot 10^{-6} = 3,8 \cdot 10 \cdot 10^{-6} - 1,9 \cdot 10^{-6}$$

$$= 38 \cdot 10^{-6} - 1,9 \cdot 10^{-6} = \mathbf{36,1 \cdot 10^{-6} = 3,61 \cdot 10^{-5}}$$

$$5.- \quad 4,28 \cdot 10^{-4} - 1,35 \cdot 10^{-3} = 4,28 \cdot 10^{-4} - 1,35 \cdot 10 \cdot 10^{-4}$$

$$= 4,28 \cdot 10^{-4} - 13,5 \cdot 10^{-4} = \mathbf{-9,22 \cdot 10^{-4}}$$

Multiplicación y división

Mientras que para sumar y restar números en notación científica se precisa que tengan el mismo exponente, que además no se alterará por la adición o la sustracción, en la multiplicación y la división los exponentes pueden ser distintos y, además, el resultado tendrá un exponente afectado por la operación.

Para multiplicar dos números en notación científica, primero se reagrupan los factores, los números y las potencias, luego se multiplican los números y se suman los exponentes.

Ejemplo

Multiplique los números en notación científica

$$3,5 \cdot 10^7 \text{ y } 2,9 \cdot 10^6$$

Se reagrupan los números y las potencias

$$(3,5 \cdot 10^7) \cdot (2,9 \cdot 10^6) = (3,5 \cdot 2,9) \cdot (10^7 \cdot 10^6)$$

Se multiplican los números y se suman los exponentes

$$(3,5 \cdot 2,9) \cdot (10^7 \cdot 10^6) = 10,15 \cdot 10^{13}$$

$$\text{Luego} \quad (3,5 \cdot 10^7) \cdot (2,9 \cdot 10^6) = 10,15 \cdot 10^{13}$$

Para dividir, recordemos que una división puede expresarse en forma de fracción:

$$(6 \cdot 10^9) : (4 \cdot 10^5) = \frac{(6 \cdot 10^9)}{(4 \cdot 10^5)}$$

Se reagrupan los números y las potencias

$$\frac{(6 \cdot 10^9)}{(4 \cdot 10^5)} = \frac{6}{4} \cdot \frac{10^9}{10^5}$$

Se dividen los números y se restan los exponentes

$$\frac{6}{4} \cdot \frac{10^9}{10^5} = \frac{3}{2} \cdot 10^4 = 1,5 \cdot 10^4$$

Ejemplos

Realice las operaciones que se indican

$$1.- \quad 6 \cdot 10^3 : 8 \cdot 10^{-3} = 0,75 \cdot 10^{3-(-3)} = 0,75 \cdot 10^6$$

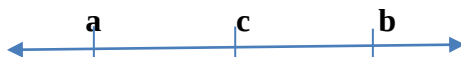
$$2.- \quad (8 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^5) = 4 \cdot 10^{(-7)-5} = 4 \cdot 10^{-12}$$

$$3.- \quad 4,9 \cdot 10^{-3} : 1,4 \cdot 10^{-6} = \frac{4,9 \cdot 10^{-3}}{1,4 \cdot 10^{-6}} = \frac{49 \cdot 10^{-4}}{14 \cdot 10^{-7}} = \frac{49}{14} \cdot 10^{-4+7} = 3,5 \cdot 10^3$$

1.4.9. Otras características de los números racionales

- Es ordenado: Dado dos números racionales siempre es posible establecer cuál es el mayor.
- Es numerable o contable: se podría hacer una lista ordenada de todos los números racionales, es decir, se puede establecer una correspondencia biunívoca con los números naturales.
- Es denso: siempre se encontrará un número racional entre dos racionales dados.

$$a, b \in \mathbb{Q}, \exists c \in \mathbb{Q} : a < c < b \quad \text{con } c = \frac{a+b}{2}$$



1.5. El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$)

Recordando que los números racionales son de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros y

$b \neq 0$. Se pueden expresar como números decimales, entonces

$$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Decimales finitos} \\ \text{Decimales infinitos} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{infinitos periódicos} \\ \text{infinitos semiperiódicos} \end{array} \right.$$

El conjunto de los números Irracionales está formado por todos los que **no** son de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros y $b \neq 0$. Por lo tanto todo número irracional es un número *decimal infinito no periódico*.

Así, $\mathbb{I} = \{x/x \text{ es un número decimal infinito no periódico}\}$

Algunos irracionales son $\dots \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, 3 + \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots$

Observación

1. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos disjuntos, es decir, no tienen elementos comunes: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$,
2. La suma, el producto y el cociente de dos números irracionales no necesariamente es irracional, puede ser un número racional.

Ejemplo

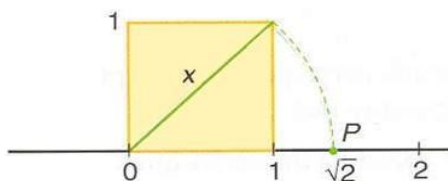
1. $(2 + \sqrt{3}) \in \mathbb{I}$ y $(2 - \sqrt{3}) \in \mathbb{I}$ sin embargo $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4 \in \mathbb{N}$.
2. $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ sin embargo $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \in \mathbb{Z}$.
3. $\sqrt{80} \in \mathbb{I}$ y $\sqrt{45} \in \mathbb{I}$ sin embargo $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{45}} = \frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$.

Los números irracionales en la recta numérica

A cada número racional le corresponde un punto en la recta pero en realidad éstos no completan la recta, también la constituyen los irracionales. En general, representar un número con infinitas cifras decimales no periódicas es imposible y por lo tanto nos tendríamos que conformar con una aproximación. De todas maneras, hay métodos geométricos que permiten representar algunos números irracionales en la recta numérica.

Veamos cómo se puede representar, por ejemplo, $\sqrt{2}$. Hay que tener claro que $\sqrt{2}=1,414\dots$, es decir, $1 < \sqrt{2} < 2$.

Observa el cuadrado del dibujo, si aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar su diagonal obtendremos esto

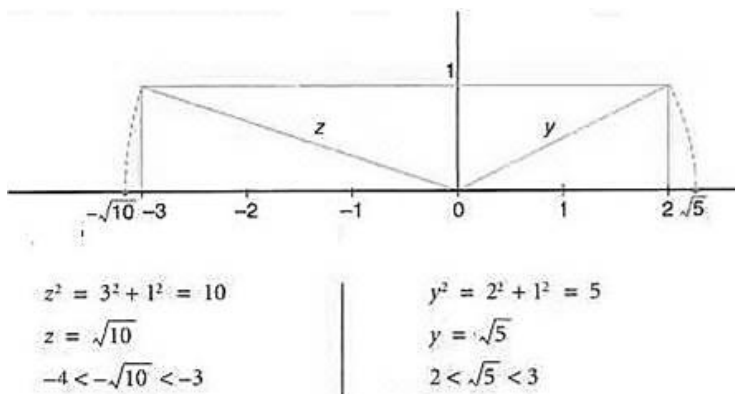


Con la ayuda de un compás podemos representar exactamente $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

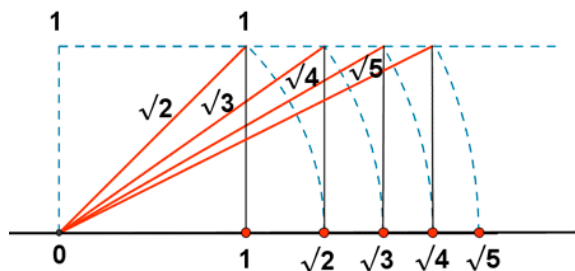
Sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional, por lo tanto, el punto P de la recta no puede estar ocupado por ningún otro número irracional.

Ejemplos

1. En esta recta representamos los números irracionales $-\sqrt{10}$ y $\sqrt{5}$



2. En esta recta se observa la ubicación exacta de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ y $\sqrt{5}$



1.6. El conjunto de los números Reales ($\mathbb{R}$)

El conjunto de los números reales está formado por los números racionales y los irracionales, es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Luego, $\mathbb{R}$ está formado por todos los decimales

$$\mathbb{R} = \begin{cases} \mathbb{Q} = \begin{cases} \text{Decimales finitos} \\ \text{Decimales infinitos} \end{cases} \begin{cases} \text{infinitos periódicos} \\ \text{infinitos semiperiódicos} \end{cases} \\ \mathbb{I} = \{ \text{Decimales infinitos no periódicos} \end{cases}$$

Observación

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.6.1. Subconjuntos notables en $\mathbb{R}$

$$\text{Reales positivos} \quad \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\text{Reales negativos} \quad \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$$\text{Reales no negativos} \quad \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$\text{Reales no positivos} \quad \mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

1.6.2. Operatoria y propiedades en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R}$ se definen las operaciones de adición y multiplicación, las cuales verifican las siguientes propiedades:

1. **Clausura** (o Cerradura): si a y $b \in \mathbb{R}$ entonces:

$$(a + b) \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad (a \cdot b) \in \mathbb{R}$$

2. **Conmutatividad**: $\forall a, b \in \mathbb{R} :$

$$a + b = b + a \quad \wedge \quad a \cdot b = b \cdot a$$

3. **Asociatividad**: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} :$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \wedge \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

4. **Distributividad:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} :$

i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributividad a Izquierda)

ii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Distributividad a Derecha)

5. **Neutro aditivo:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists! 0 \in \mathbb{R} :$

$$a + 0 = a = 0 + a \quad (0 \text{ es el elemento neutro aditivo}).$$

6. **Inverso aditivo:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists! (-a) \in \mathbb{R} :$

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a \quad (-a \text{ es el inverso aditivo de } a).$$

7. **Neutro multiplicativo:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists! 1 \in \mathbb{R} :$

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \quad (1 \text{ es el elemento neutro multiplicativo}).$$

8. **Inverso multiplicativo:** $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists! a^{-1} \in \mathbb{R} :$

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a \quad (a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ es el inverso multiplicativo de } a).$$

1.6.3. Orden en $\mathbb{R}$

■ Axiomas de relación de orden

Los axiomas de orden para $\mathbb{R}$ se fundamentan en la existencia de un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado conjunto de los números reales positivos que satisface lo siguiente:

Axioma 1. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$ entonces $(x + y) \in \mathbb{R}^+$ y $(x \cdot y) \in \mathbb{R}^+$

Axioma 2. Ley de tricotomía

$\forall x \in \mathbb{R}$, una y sólo una de las proposiciones es verdadera.

i) $x \in \mathbb{R}^+$

ii) $x = 0$

iii) $(-x) \in \mathbb{R}^+$

■ Relación de orden en $\mathbb{R}$

Sean x e $y \in \mathbb{R}$, diremos que **x es menor que y** , y lo denotaremos por $x < y$ si y sólo si $(y - x) \in \mathbb{R}^+$.

En otras palabras, $x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}^+$

Esta relación de orden permite definir lo siguiente:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

- y es mayor que x , $y > x \Leftrightarrow x < y$
- x es menor o igual que y , $x \leq y \Leftrightarrow (x < y \text{ ó } x = y)$
- y es mayor o igual que x , $y \geq x \Leftrightarrow x \leq y$

Observación

1. Todo real positivo se puede expresar como $x > 0$,
 $x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x > 0$
2. Si $x < 0$, diremos que x es un número negativo, $x \in \mathbb{R}^-$

■ Propiedades que se deducen de los axiomas de orden:

1. $0 \notin \mathbb{R}^+$ y $0 \notin \mathbb{R}^-$
2. Propiedad de tricotomía:
Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple:
 $a < b$ ó $a = b$, ó $a > b$.
3. Ley transitiva:
Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
4. $\forall c \in \mathbb{R}$, Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
5. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
6. Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$
7. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
8. Si $a < b$ entonces $-a > -b$
9. $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0)]$
10. $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b > 0)]$

11. Si $a < c$ y $b < d$ entonces $a + b < c + d$

12. Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$

13. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

14. Si $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow [(a \geq 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a \leq 0 \text{ y } b < 0)]$

15. Si $\frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow [(a \geq 0 \text{ y } b < 0) \text{ ó } (a \leq 0 \text{ y } b > 0)]$

Demostración de algunas propiedades

Propiedad 3. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

Por definición de relación **menor que**, se tiene que

Si $a < b$ entonces $(b - a) > 0$

Si $b < c$ entonces $(c - b) > 0$

Por axioma 1, se tiene que la **suma de positivos es positivo**

$$(b - a) + (c - b) > 0$$

$$b - a + c - b > 0$$

$$c - a > 0, \text{ por lo tanto } a < c.$$

Propiedad 4. $\forall c \in \mathbb{R}$, Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ entonces $(b - a) > 0$

$$(b - a) + 0 > 0$$

$$(b - a) + (c - c) > 0$$

$$(b + c) - (a + c) > 0 \quad \text{por lo tanto } a + c < b + c.$$

Propiedad 5. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Por definición de relación **menor que**, se tiene que

Si $a < b$ entonces $(b - a) > 0$

$$\text{y} \quad c > 0$$

Por axioma 1, se tiene que el **producto de positivos es positivo**

$$(b - a) \cdot c > 0$$

$$bc - ac > 0 \quad \text{por lo tanto} \quad ac < bc$$

Propiedad 7. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Por definición de relación **menor que**, se tiene que

$$\text{Si } a < b \quad \text{entonces} \quad (b - a) > 0$$

$$\text{Como } c < 0 \quad \text{entonces} \quad -c > 0$$

Por axioma 1, se tiene que el **producto de positivos es positivo**

$$(b - a) \cdot (-c) > 0$$

$$ac - bc > 0 \quad \text{por lo tanto} \quad bc < ac$$

Ejemplos

Propiedad 13. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$$\text{- Sean } a = 3, \quad b = 7, \quad 3 < 7 \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{7}$$

$$\text{- Sean } a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{8}{9}, \quad \frac{2}{3} < \frac{8}{9} \quad \text{entonces} \quad \frac{3}{2} > \frac{9}{8}$$

Propiedad 9. Si $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0)]$

$$561 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 33 \cdot 17 > 0 & \Leftrightarrow (33 > 0 \text{ y } 17 > 0) \\ (-33)(-17) > 0 & \Leftrightarrow (-33 < 0 \text{ y } -17 < 0) \end{cases}$$

■ Otras características de $\mathbb{R}$

1. $\mathbb{R}$ Es denso: siempre se encontrará un número real entre dos reales dados.
2. $\mathbb{R}$ ya no es numerable: no se puede establecer una correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$.

3. Es un conjunto completo: A cada punto de la recta numérica le corresponde un número real, y cada número real se puede representar en la recta numérica.

Luego, “ $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo”.

1.6.4. Valor absoluto de un número real

Para cada número real x se define su valor absoluto y se denota $|x|$ de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

1. Si $x = 4$, entonces $|4| = 4$, ya que $4 \geq 0$
2. Si $x = -2,5$ entonces $|-2,5| = -(-2,5) = 2,5$ ya que $-2,5 < 0$
3. Si $x = \sqrt{2}$, entonces $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, ya que $\sqrt{2} \geq 0$
4. Si $x = \sqrt{5} - 5$, como $\sqrt{5} \approx 2,2$ entonces $x = 2,2 - 5 = -2,8 < 0$

Otra forma,

$$\text{Si } x = \sqrt{5} - 5 = \frac{(\sqrt{5}-5)(\sqrt{5}+5)}{(\sqrt{5}+5)} = \frac{5-25}{\sqrt{5}+5} = \frac{-20}{\sqrt{5}+5} < 0$$

$$\text{Luego } |\sqrt{5} - 5| = -(\sqrt{5} - 5) = 5 - \sqrt{5}$$

■ Propiedades del valor absoluto

Sean x e y números reales cualesquiera, entonces se cumplen las siguientes propiedades

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| \geq x$
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|x| = |-x|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$

6. $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x|^2 = x^2$
7. $y > 0 \Rightarrow (|x| = y \Leftrightarrow \{x = y \text{ o } x = -y\})$
8. $y > 0 \Rightarrow (|x| \leq y \Leftrightarrow [-y \leq x \leq y])$
9. $y \in \mathbb{R} \Rightarrow (|x| \geq y \Leftrightarrow \{x \geq y \text{ o } x \leq -y\})$
10. $|xy| = |x| \cdot |y|$
11. $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$, $\forall x \neq 0$
12. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, $\forall y \neq 0$
13. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
14. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Ejemplos

Propiedad 2. $|x| \geq x$

Si $x = -21$ entonces $|-21| \geq -21$

$$21 \geq -21$$

Si $x = \frac{23}{3} - 7$ entonces $\left| \frac{23}{3} - 7 \right| \geq \frac{23}{3} - 7$

$$x = \frac{23}{3} - 7 = \frac{23-21}{3} = \frac{2}{3} > 0 \text{ entonces } \left| \frac{23}{3} - 7 \right| = \left| \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$$

Propiedad 5. $-|x| \leq x \leq |x|$

Si $x = 2$: $-|2| \leq 2 \leq |2|$

$$-2 \leq 2 \leq 2$$

Si $x = -4$: $-|-4| \leq -4 \leq |-4|$

$$-4 \leq -4 \leq 4$$

Propiedad 9. $y \in \mathbb{R} \Rightarrow (|x| \geq y \Leftrightarrow \{x \geq y \text{ o } x \leq -y\})$

$$(|x| \geq 3 \Leftrightarrow \{x \geq 3 \text{ o } x \leq -3\})$$



1.6.5. Raíz n -ésima de un número real

Sea n un número entero positivo. La raíz n -ésima de un número real a , es cualquier número real b que elevado a la n -ésima potencia da como resultado el número real a .

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Donde n es el índice radical, a es la cantidad subradical y el símbolo $\sqrt{}$ se llama raíz o radical.

Ejemplo

1. $\sqrt[4]{16} = 2 \Leftrightarrow 2^4 = 16$, donde **4** es el índice radical y **16** es la cantidad subradical.
2. $\sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$, donde **3** es índice radical y **-27** es la cantidad subradical.
3. $\sqrt{49} = 7 \Leftrightarrow 7^2 = 49$, donde **2** es el índice radical y **49** es la cantidad subradical.
4. $\sqrt[5]{243} = 3 \Leftrightarrow 3^5 = 243$, donde **5** es índice radical y **243** es la cantidad subradical.

■ Regla de los signos:

$$\sqrt[n]{+} = +$$

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

$$\sqrt[n]{+} = +$$

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

$$\sqrt[n]{-} \text{ no existe en } \mathbb{R}$$

$$\sqrt[6]{-1} \notin \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{-} = -$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Observación

1. Si $b^n = a$, entonces la raíz n -ésima principal de a es:
 - La raíz positiva de a , si $a > 0$
 - La raíz negativa de a , si $a < 0$ y n impar
2. $\sqrt[1]{x} = x$ ya que $x^1 = x$

3. $\sqrt[n]{0} = 0$ ya que $0^n = 0$

4. En general se tiene $(\sqrt[n]{a})^n = a$

■ **Propiedades**

1. Raíz de una potencia: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

a) $\sqrt[5]{4^{10}} = 4^{\frac{10}{5}} = 4^2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{48}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{48}{4}}} = \sqrt[3]{3^{12}} = 3^4$

c) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$

2. Raíz de un producto: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

a) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{25}} = \sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{2^{25}} = 3^2 \cdot 2^5$

b) $\sqrt[7]{12} \cdot \sqrt[7]{2} = \sqrt[7]{12 \cdot 2} = \sqrt[7]{24}$

3. Raíz de un cociente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

a) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{2}{5}$

b) $\sqrt[5]{\frac{3^{20}}{2^{35}}} = \frac{\sqrt[5]{3^{20}}}{\sqrt[5]{2^{35}}} = \frac{3^4}{2^7}$

4. Ingresar un factor a un radical : $a^p \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^p)^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{pn} b}$

Caso especial: $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

a) $4^5 \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{(4^5)^3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{4^{15} 3^2}$

b) $2^2 \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{(2^2)^5 \cdot 9} = \sqrt[5]{2^{10} 9}$

c) $3 \cdot \sqrt[7]{12} = \sqrt[7]{3^7 \cdot 12}$

5. Raíz de una raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$$\text{En efecto, } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\text{Además } a^{\frac{1}{nm}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\text{a) } \sqrt[5]{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[15]{6}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[15]{6}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{48}}} = \sqrt[12]{3^{48}} = \sqrt[3]{3^{12}} = 3^4,$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{48}}} = \sqrt[12]{3^{48}} = [\sqrt[12]{(3^4)^{12}}]^{12} = 3^4$$

Nota: Estas propiedades son válidas para raíces de números negativos siempre que n y m sean impares.

■ Clasificación de los radicales

1. Radicales Homogéneos: son aquellos radicales que tienen el mismo índice.
2. Radicales Heterogéneos: son dos o más radicales con distintos índices.
3. Semejantes: son dos o más radicales que tienen iguales índices y la misma expresión subradical, sólo se diferencian por los coeficientes.

Ejemplos

$$1. \quad \left. \begin{array}{ll} 2\sqrt[3]{7x}, & 5\sqrt[3]{3x} \\ 5a^2\sqrt{7xy}, & 4b\sqrt{z^2} \\ 2a\sqrt{b}, & 7b^2\sqrt{ac} \end{array} \right\} \quad \text{homogéneos}$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{lll} 5x\sqrt[7]{6a^2}, & 3b\sqrt[3]{4}, & \sqrt[5]{3y^4} \\ 2a\sqrt{5}, & 7\sqrt[3]{b^2}, & \sqrt[5]{2b} \end{array} \right\} \quad \text{heterogéneos}$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{lll} 2a\sqrt[3]{2x}, & -3b\sqrt[3]{2x}, & 5p\sqrt[3]{2x} \\ 3t^2\sqrt[3]{6x^3}, & q^3\sqrt[3]{6x^3}, & -\frac{1}{6}r\sqrt[3]{6x^3} \\ \sqrt{3} & 5\sqrt{3}, & -13\sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ semejantes}$$

■ Conversión de radicales a un índice común

Para convertir dos o más radicales a un índice común, se considera como índice común el *m.c.m* de todos los índices, y cada cantidad subradical es afectada por el exponente que resulta de dividir el índice común por el índice de cada radical.

Se tiene que $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$, $a > 0$

En efecto, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{m}} = a^{\frac{m}{nm}} = \sqrt[nm]{a^m}$

Ejemplos

Reducir a un índice común las raíces:

$$1. \quad \sqrt[3]{2} \text{ y } \sqrt{3} \quad m.c.m\{2, 3\} = 6$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3}{3} = \sqrt[6]{27}$$

$$2. \quad \sqrt[4]{2^5} \text{ y } \sqrt[15]{2^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array} \right\} m.c.m\{4, 15\} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$\sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4 \cdot 15]{(2^5)^{15}} = \sqrt[60]{2^{75}}$$

$$\sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15 \cdot 4]{(2^3)^4} = \sqrt[60]{2^{12}}$$

Ejercicios

Reducir a índice común:

1. $\sqrt{x^5}, \sqrt[4]{y^3}, \sqrt[6]{z^7}$
2. $\sqrt[4]{5x}, \sqrt[5]{3y^3}, \sqrt[10]{9az^2}$

■ Operaciones con raíces

Adición y sustracción de raíces

Solamente se puede sumar y/o restar radicales semejantes, aplicando la propiedad distributiva en sentido inverso:

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} + c\sqrt{x} = (a + b + c)\sqrt{x}$$

En algunos casos es necesario descomponer en factores la cantidad subradical, de modo de sacar factores fuera del radical, para obtener radicales semejantes.

Ejemplos

1. $3\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + \sqrt{7} = (3 - 8 + 1)\sqrt{7}$
 $= -4\sqrt{7}$
2. $4\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24} = 11\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{8 \cdot 3}$
 $= 11\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3}$
 $= 9\sqrt[3]{3}$
3. $\sqrt{12x} + \sqrt{27x} - \sqrt{48x} = \sqrt{2^2 3x} + \sqrt{3^2 3x} - \sqrt{2^4 3x}$
 $= 2\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x}$
 $= \sqrt{3x}$

Ejercicios

Efectuar las operaciones que se indican:

1. $\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{98}$
2. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250}$
3. $\frac{1}{6}\sqrt{72} - \frac{2}{3}\sqrt{108} + \frac{1}{2}\sqrt{32} - \frac{1}{4}\sqrt{48}$
4. $\sqrt{3} + \sqrt{242} + \sqrt{75} - \sqrt{192} - \sqrt{507}$

$$5. \sqrt{1\frac{1}{3}} + 5\sqrt{5\frac{1}{3}} - 3\sqrt{8\frac{1}{3}}$$

Multiplicación de Raíces

Se presentan los siguientes casos:

Multiplicación de radicales homogéneos

Para multiplicar dos o más radicales homogéneos se multiplican entre sí sus coeficientes y luego sus cantidades subradicales, es decir:

$$a^n\sqrt[n]{b} \cdot c^n\sqrt[n]{d} = (a \cdot c)^n\sqrt[n]{b \cdot d}$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} 1. \quad -2\sqrt{x} \cdot 7\sqrt{x^4} &= -14\sqrt{x \cdot x^4} \\ &= -14\sqrt{x^5} \\ &= -14\sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot x} \\ &= -14x^2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{3}{7}a^3\sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{9}a^2\sqrt[3]{2} &= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot a^3\sqrt[3]{6} \\ &= \frac{2}{21}a^3\sqrt[3]{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} &= \sqrt[3]{(7 + \sqrt{22})(7 - \sqrt{22})} \\ &= \sqrt[3]{49 - 22} \\ &= \sqrt[3]{27} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicios

Efectuar la multiplicación de los siguientes radicales:

$$1. \quad 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{7}$$

$$2. \quad \frac{4}{5}a^3\sqrt[3]{8} \cdot \frac{3}{8}a^2\sqrt[3]{2}$$

Multiplicación de radicales heterogéneos

Para multiplicar dos o más radicales heterogéneos, se les reduce al índice común y a continuación se efectúa la multiplicación con los radicales homogéneos.

$$\text{Es decir, } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n}$$

Nota: Las operaciones con radicales pueden efectuarse utilizando las propiedades de las potencias, según propiedad 1: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Ejemplos

1. Multiplicar $\sqrt{5}$ por $\sqrt[3]{2}$

El $m.c.m\{2, 3\} = 6$ y reduciendo al índice común, se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} &= \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} \\ &= \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} \\ &= \sqrt[6]{125 \cdot 4} \\ &= \sqrt[6]{500}\end{aligned}$$

2. Multiplicar $5a^2\sqrt[9]{a^3}$ por $3a^{12}\sqrt{a}$

El $m.c.m\{9, 12\} = 36$ y reduciendo al índice común, se tiene

$$\begin{aligned}5a^2\sqrt[9]{a^3} &= 5a^2\sqrt[36]{(a^3)^4} \\ &= 5a^2\sqrt[36]{a^{12}}\end{aligned}$$

$$3a^{12}\sqrt{a} = 3a\sqrt[36]{a^3}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(5a^2\sqrt[9]{a^3}) \cdot (3a^{12}\sqrt{a}) &= (5a^2\sqrt[36]{a^{12}}) \cdot (3a\sqrt[36]{a^3}) \\ &= 15a^3\sqrt[36]{a^{15}} \\ &= 15a^3\sqrt[12]{a^5}\end{aligned}$$

Ejercicios

Multiplica los siguientes radicales:

$$1. \frac{7}{6} \sqrt{\frac{18}{7}} \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^{-1}}$$

$$2. 13 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{2}$$

$$3. \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{18}{24} \sqrt[4]{\frac{y}{x^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^4}{y^3}}$$

Multiplicación de suma de radicales

Al realizar esta operación se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición con radicales, se presentan los casos siguientes:

$$1. a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$2. (a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} 1. \sqrt{6}(\sqrt{24} + \sqrt{8}) &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{24} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \\ &= \sqrt{144} + \sqrt{48} = 12 + \sqrt{16 \cdot 3} = 12 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{15})(3 - 2\sqrt{6} + \sqrt{15}) &= \\ &= 15 - 10\sqrt{6} + 5\sqrt{15} + 6\sqrt{10} - 4\sqrt{60} + 2\sqrt{150} + 3\sqrt{15} - 2\sqrt{90} + 15 \\ &= 30 - 10\sqrt{6} + 8\sqrt{15} + 6\sqrt{10} - 4\sqrt{4 \cdot 15} + 2\sqrt{25 \cdot 6} - 2\sqrt{9 \cdot 10} \\ &= 30 - 10\sqrt{6} + 8\sqrt{15} + 6\sqrt{10} - 8\sqrt{15} + 10\sqrt{6} - 6\sqrt{10} \\ &= 30. \end{aligned}$$

División de radicales

Se procede en forma análoga a lo indicado para la multiplicación. Para dividir radicales homogéneos, se dividen entre sí sus coeficientes y subradicales.

Ejemplo

$$1. \frac{3\sqrt[5]{768}}{9\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{9} \cdot \sqrt[5]{\frac{768}{32}} = \frac{1}{3} \sqrt[5]{24}$$

$$\begin{aligned} 2. (9\sqrt[3]{24} + 6\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{192} + 12\sqrt[3]{375}) : 3\sqrt[3]{3} &= \frac{9\sqrt[3]{24}}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{6\sqrt[3]{81}}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{3\sqrt[3]{192}}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{12\sqrt[3]{375}}{3\sqrt[3]{3}} \\ &= 3\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{64} + 4\sqrt[3]{125} \\ &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 4 + 4 \cdot 5 \\ &= 6 + 6 - 4 + 20 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Observación

Si los radicales que han de dividirse no fueran homogéneos, se les convierte a índice común y a continuación se efectúa la división indicada.

Ejemplo

Efectúa la operación

$$1. \sqrt{3} : \sqrt[3]{3}$$

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt{3} : \sqrt[3]{3} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3^2}} \\ &= \sqrt[6]{3} \end{aligned}$$

$$2. 12\sqrt{5} : 3\sqrt[3]{5}$$

Solución

$$\begin{aligned} 12\sqrt{5} : 3\sqrt[3]{5} &= (12 \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{5^3}) : (3 \cdot \sqrt[3 \cdot 2]{5^2}) \\ &= \frac{12}{3} \cdot \sqrt[6]{\frac{5^3}{5^2}} \\ &= 4 \sqrt[6]{5} \end{aligned}$$

■ Racionalización de fracciones irracionales

La fracción irracional es aquella que tiene en el denominador uno o más radicales. Por

ejemplo: $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt[3]{5}}{2-\sqrt[4]{3}}$, etc.

Racionalizar una fracción es transformarla en otra equivalente, eliminando los radicales del denominador.

Factor racionalizante (F.R.)

Es una expresión irracional que multiplicada por el numerador y denominador de una fracción, permite que uno de estos (en este caso el denominador) se transforme en una expresión racional.

Casos que se presentan:

1. Cuando el denominador es un solo término $\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$

En este caso el factor racionalizante (F.R.) estará expresado por otro radical de igual índice, pero con una cantidad subradical tal que el producto de ambas cantidades subradicales sea una potencia de exponente igual al índice de la raíz.

Es decir, se amplifica por $\sqrt[n]{x}$, siendo x una expresión tal que $x \cdot a^p = a^n$.
Luego $x = a^{n-p}$

Siendo el factor racionalizante (F. R.): $\sqrt[n]{a^{n-p}}$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^{n-p}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{a}$$

Ejemplo

Racionalice las siguientes expresiones irracionales:

$$1. \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2. \quad \frac{7}{\sqrt[4]{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}} = 7 \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}$$

$$3. \quad \frac{9}{\sqrt[7]{27}} = \frac{9 \cdot \sqrt[7]{3^4}}{\sqrt[7]{3^3} \cdot \sqrt[7]{3^4}} = \frac{9 \sqrt[7]{3^4}}{3} = 3 \sqrt[7]{3^4}$$

2. Cuando el denominador tiene dos o más términos: En este caso se presentan cuatro tipos de expresiones:

$$\text{a) } \frac{k}{a \pm \sqrt{b}} \quad \text{b) } \frac{k}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \quad \text{c) } \frac{k}{a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}} \quad \text{d) } \frac{k}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}}, k \text{ constante}$$

En cada uno de estos tipos de expresiones el factor racionalizante (F.R.) será el conjugado del denominador, es decir:

Si la expresión es $a + \sqrt{b}$ su conjugado será: $a - \sqrt{b}$.

Si la expresión es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ su conjugado será: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ejemplo

Racionalice las siguientes expresiones irracionales:

$$1. \frac{5 - \sqrt{24} + \sqrt{3\frac{1}{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\frac{16}{5}}}{\sqrt{5}} &= \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{125 \cdot 5}}{5} + \frac{\sqrt{16}}{5} \\ &= \sqrt{5} - \frac{\sqrt{625}}{5} + \frac{4}{5} \\ &= \sqrt{5} - 5 + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$2. \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2 - 3} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1} \\ &= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$3. \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

Solución

1° En el denominador se asocian las dos primeras raíces en un paréntesis

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - \sqrt{3}$$

2° Se determina el conjugado del denominador

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}$$

3° Se amplifica la fracción irracional por el conjugado del denominador, teniendo presente que el primer término está compuesto de dos sumandos (los que se encuentran entre paréntesis).

$$4^{\circ} \quad \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - \sqrt{3}] \cdot [(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]} = \frac{2[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - 3} =$$

5° Se desarrolla el cuadrado del primer término del denominador:

$$\frac{2[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - 3} = \frac{2[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{2 + 2\sqrt{10} + 5 - 3} = \frac{2[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{4 + 2\sqrt{10}} =$$

6° Se factoriza, se simplifica y se obtiene:

$$\frac{2[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{2(2 + \sqrt{10})} = \frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{(2 + \sqrt{10})} =$$

7° Se amplifica, nuevamente, por el conjugado del denominador

$$\begin{aligned} \frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}]}{(2 + \sqrt{10})} &= \frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}] \cdot (2 - \sqrt{10})}{(2 + \sqrt{10}) \cdot (2 - \sqrt{10})} \\ &= \frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}] \cdot (2 - \sqrt{10})}{4 - 10} \\ &= \frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}] \cdot (2 - \sqrt{10})}{-6} \\ &= - \frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}] \cdot (2 - \sqrt{10})}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}} = - \frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{3}] \cdot (2 - \sqrt{10})}{6} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30}}{6}$$

Ejercicios

$$1. \quad \frac{3 - \sqrt{27} + \sqrt{8\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$2. \frac{6}{2+\sqrt{2}}$$

$$3. \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$4. \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}$$

$$5. \frac{4}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

1.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Indicar la propiedad, de las operaciones de los números reales, que hace verdadera la siguiente igualdad:

a) $10 + (-3) = (-3) + 10$

b) $11 \cdot (5 + \sqrt{81}) = 55 + 11\sqrt{81}$

c) $\frac{12}{15} \cdot \frac{15}{12} = 1$

d) $\frac{5}{2} + \left(\frac{-5}{2}\right) = 0$

e) $-\sqrt{\frac{2}{3}} + 0 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

f) $35 \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot 3\right) = \left(35 \cdot \frac{-1}{2}\right) \cdot 3$

Resp.: a) *conmutatividad* b) *Distributividad*
c) *Existencia elemento inverso multiplicativo*
d) *Existencia elemento inverso aditivo*
e) *Existencia elemento neutro aditivo*
f) *Asociatividad*

2. Calcular:

$$(-36) \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot (-6 - 1) \cdot \frac{1}{6} \qquad \text{Resp.: } -\frac{31}{2}$$

3. Simplifique y exprese el resultado en forma decimal:

$$\frac{\left(\frac{1}{4} - 3\right)}{-1 - \frac{\frac{1-1}{-4}-8}{5}} \qquad \text{Resp.: } \frac{484}{191}$$

4. Convierta los siguientes números decimales a fracción:

a) $0,6\overline{12}$ Resp.: $\frac{101}{165}$

b) $1,\overline{18}$ Resp.: $\frac{13}{11}$

5. Calcule el valor de:

a) $\left[1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$ Resp.: $\frac{121}{64}$

b) $\left\{\left[\left(3\frac{4}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^0\right\}^{-3}$ Resp.: 1

6. Determine el valor de: $x^2 \cdot 2^y \cdot 3^x \cdot y^3$, sabiendo que $x = 1$, $y = -2$. Resp.: $-\frac{2}{3}$

7. Encuentre el valor de:

$$\left[\left(\left(\frac{1}{8} \right)^{-1/3} + \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right)^{-1/2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{13} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{13} + \left(\frac{1}{6} \right)^{-58} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{71} \cdot (-1)^{131} + \frac{31}{2} \right]^{-0,75}$$

Resp.: $\frac{1}{8}$

8. Efectúe las siguientes operaciones

$$0,4 \cdot 4^{-1} + 0,3 \cdot 3^{-2} + 0,1 \cdot 10^{-3}$$

Resp.: $\frac{4003}{3000} = 1,334\bar{3}$

9. Señale a qué conjunto pertenecen las siguientes raíces:

($\mathbb{R}$: N^{os} reales; $\mathbb{C}$: N^{os} complejos)

a) $\sqrt[3]{2}$ *Resp.: $\mathbb{R}$*

b) $\sqrt[3]{-2}$ *Resp.: $\mathbb{R}$*

c) $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ *Resp.: $\mathbb{R}$*

d) $\sqrt[4]{-\frac{1}{3}}$ *Resp.: $\mathbb{C}$*

e) $\sqrt{2} + \sqrt{-3}$ *Resp.: $\mathbb{C}$*

f) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-3}$ *Resp.: $\mathbb{R}$*

10. Reduzca términos semejantes

a) $a\sqrt{b} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{a^2b} - \sqrt[4]{a^4b^2}$ *Resp.: 0*

b) $3\sqrt{7} + 2\sqrt{28} - 6\sqrt{63}$ *Resp.: $\sqrt{7}$*

11. Efectúe las siguientes operaciones:

$$(3\sqrt{6} + 5\sqrt{8} - 2\sqrt{2}):4\sqrt{2}$$

Resp.: $\frac{3}{4}\sqrt{3} + 2$

12. Exprese en forma de una sola raíz.

a) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{15}} : \sqrt[12]{\sqrt{5}}$ *Resp.: $\sqrt[24]{3}$*

b) $3\sqrt{3\sqrt{3}}$ *Resp.: $3\sqrt[4]{27}$*

13. Racionalice las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ *Resp.: $2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}$*

b) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{8}}$ *Resp.: $-\frac{1}{5}(\sqrt{7} + \sqrt{2})$*

14. Realice las siguientes operaciones y simplifique al máximo

a) $\frac{2}{5}\sqrt{24} + \sqrt[3]{8^4} - \sqrt{96} + \sqrt[7]{-128} + \frac{2}{5}\sqrt{150} - \sqrt[5]{243}$ *Resp.: $11 - \frac{6}{5}\sqrt{6}$*

b) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[5]{2}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt[5]{2})$ *Resp.: $2 + \sqrt[6]{32} + \sqrt[15]{256} - \sqrt[5]{4}$*

15. Utilizando propiedades de las raíces, simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{11\sqrt{5}}} \cdot \left(\frac{121}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{-(7 \cdot 2 - 5^2)}{\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{\frac{11}{3^2 - 2^2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4^2 - 5}}} \quad \text{Resp.: } \sqrt{5}$$

16. Los siguientes números están escritos en notación científica. Escríbalos en notación estándar (normal).

a) $7,65 \cdot 10^5$ b) $6,8 \cdot 10^3$ c) $9,3 \cdot 10^7$

d) $5 \cdot 10^4$ e) $2,5 \cdot 10^{-1}$ f) $7,2 \cdot 10^{-2}$

g) $4,7 \cdot 10^{-5}$ h) $2,61 \cdot 10^{-6}$

Resp.: a) 765.000 b) 6.800 c) 93.000.000 d) 50.000
e) 0,25 f) 0,072 g) 0,000047 h) 0,00000261

17. Escriba los siguientes números en notación científica

a) 93.000.000 b) 68.000 c) 160.723,4

d) 7.281,3 e) 0,08 f) 0,7

Resp.: a) $9,3 \cdot 10^7$ b) $6,8 \cdot 10^4$ c) $1,607234 \cdot 10^5$
d) $7,2813 \cdot 10^3$ e) $8 \cdot 10^{-2}$ f) $7 \cdot 10^{-1}$

18. Usando la calculadora científica, realice las siguientes operaciones y exprese el resultado en notación científica

a) $9.800.000 \cdot 4.500.000$ b) $2.540.000 \cdot 1.900.000$

c) $8.100.000 \cdot 6.500.000$ d) $5.260.420 \cdot 2.682.521$

e) $2 : 5.687.945.122$ f) $6 : 6.897.254.211$

Resp.: a) $4,41 \cdot 10^{13}$ b) $4,826 \cdot 10^{12}$ c) $5,265 \cdot 10^{13}$
d) $1,41118712 \cdot 10^{13}$ e) $3,516 \cdot 10^{-10}$ f) $8,6991 \cdot 10^{-10}$

19. Realice las siguientes operaciones y exprese el resultado en notación científica

$$a) (2,52 \cdot 10^{-2}) : (4,2 \cdot 10^{-3})$$

$$b) (4,1 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 10^3)$$

$$c) (6 \cdot 10^4) \cdot (2,2 \cdot 10^3)$$

$$d) (3,2 \cdot 10^{-2}) : (0,16 \cdot 10^4)$$

Resp.:

$$a) 6 \cdot 10^0$$

$$b) 8,2 \cdot 10^5$$

$$c) 1,32 \cdot 10^8$$

$$d) 2 \cdot 10^{-5}$$

20. Expresar en notación científica y calcular:

$$\frac{60000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72000000 \cdot 0,0002^5}$$

$$\text{Resp.: } 1,5 \cdot 10^2 = 150$$

21. Complete lo siguiente, justificando claramente:

a) La suma de $0,1\overline{7} + 0,1\overline{2}$ es: _____

b) La fracción $\frac{-11}{13}$ es equivalente a: _____

c) Los números primos que son divisores de 3146 son: _____

d) El *mcm* entre 3, 7, 9, 14 y 21 es: _____

e) El *MCD* entre 123 y 6 es: _____

f) R es denso porque _____

Resp.:

$$a) 0,2\overline{93}$$

$$b) -\frac{22}{26}, -\frac{33}{39}, \dots$$

$$c) 2, 11, 13$$

$$d) 126$$

$$e) 3$$

f) hay infinitos reales entre dos números reales.

22. Complete las siguientes proposiciones colocando la relación que corresponda: $<, \leq, >, \geq, =$. Justifique su respuesta

$$a) \text{ si } n \geq 0 \text{ entonces } 2n \text{ _____ } -7n$$

$$b) \text{ si } a > 0 \text{ entonces } \frac{-2}{a} \text{ _____ } \frac{3}{2a}$$

$$c) \text{ si } x < 0 \text{ entonces } 2x \text{ _____ } 3x$$

$$d) \text{ si } y \leq 0 \text{ entonces } -2y \text{ _____ } -5y$$

Resp.:

$$a) >$$

$$b) <$$

$$c) >$$

$$d) \leq$$

23. Si m es par y n es impar, ¿qué puede decir de $(m+n)$ y de $(m \cdot n)$?

Resp.:

$(m+n)$ es impar,

$(m \cdot n)$ es par

UNIDAD II EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La Unidad de Expresiones algebraicas considera seis secciones fundamentales, de modo de capacitar al alumno para que reconozca y aplique correctamente la operatoria algebraica, necesaria como conducta de entrada en las diferentes asignaturas de su carrera.

Se indican en cada una de ellas, definiciones, ejemplos, ejercicios desarrollados y/o propuestos con el objeto que el alumno desarrolle la capacidad de expresar las ideas escritas en forma clara y precisa.

Las secciones donde se desarrollan los contenidos de esta unidad son:

1. Expresiones algebraicas y términos semejantes.
2. Polinomios.
3. Operaciones con expresiones algebraicas.
4. Factorización.
5. Expresiones racionales y su operatoria algebraica.
6. Operatoria algebraica con radicales.

2.1. Expresiones algebraicas y términos semejantes

Una **Expresión Algebraica** es una combinación de números y letras que representan números reales unidos entre sí por las operaciones fundamentales de la aritmética (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación) o una combinación de ellas.

Ejemplos

1) $2a\sqrt{x} - 5x + 3x^2a$

2) $\frac{2}{3}x^2 + x^{-1}$

3) $4ab^2 - 3a^2b$

4) $1 + x^3 + x^2 + x^5$

5) $\frac{5x^3}{y^2} + \frac{2x}{y^3} + x^2y^{-2}$

Para las expresiones algebraicas son válidos todos los axiomas y propiedades de los números reales.

Cada parte de una expresión algebraica separada por la adición o sustracción, es un *término* de la expresión.

Observaciones

- a) Cada Término puede constar de un **factor numérico** llamado coeficiente y de **factores literales**.

Ejemplo

El término $3a^3x^2$ tiene como factor numérico a 3 y como factores literales a a^3x^2 .

- b) Si el término tiene el factor numérico 1, no lo escribimos.

Ejemplo

En lugar de $1 \cdot ax^2$ escribimos ax^2 .

- **Evaluación de expresiones algebraicas**

Evaluar una expresión algebraica es determinar su valor, para valores dados de los factores literales. Para obtener el valor numérico se reemplaza cada variable por el número dado.

Ejemplo

1. Evaluar la expresión: $4xy^2 - 3x^2y$, si $x = -2$, $y = 1$.
Así: $4xy^2 - 3x^2y = 4(-2)(1) - 3(4)(1) = -8 - 12 = -20$.
Luego, el valor de la expresión $4xy^2 - 3x^2y$, para $x = -2$, $y = 1$ es -20.
2. El volumen de un cilindro está dado por la fórmula $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura del cilindro.
Determine el volumen del cilindro si el radio de la base es 6cm y la altura es 2cm.
Para obtener el volumen V sustituimos r por 6 y h por 2 en la fórmula $V = \pi r^2 h$.
Así: $V = \pi \cdot (6)^2 \cdot 2 = 72\pi \text{ cm}^3$.

- **Términos semejantes**

Se llaman **términos semejantes** a los términos que tienen los mismos factores literales.

Ejemplos

1. Son semejantes: $2a^3b^2$ y $\sqrt{3}b^2a^3$; $5a^{-1}bz$ y $27a^{-1}bz$.
2. No son semejantes pq y p^2q .

Para **reducir términos semejantes** se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.

Ejemplo

$$4xy^2 - 13xy^2 + 25y^2x = (4 - 13 + 25)xy^2 = 16xy^2$$

- **Tipos de expresiones algebraicas.**

Una expresión algebraica en la que se han reducido todos los términos semejantes, toma distintos nombres de acuerdo al número de términos.

Una expresión algebraica se llama:

1. **Monomio** si tiene un término.

Ejemplo: $2x, \sqrt{3}b^2$ y $\frac{2}{3}x^2z$.

2. **Binomio** si tiene dos términos.

Ejemplo: $2x + 3y, \sqrt{3}b^2 - 7a$.

3. **Trinomio** si tiene tres términos.

Ejemplo: $2a - 3b + 5d, 3x + 2y - 5z$.

4. **Multinomio** si tiene cuatro o más términos.

Ejemplo: $a + b - c + d, 1 + 3x - 5x^2 + 7x^3 + x^4$

2.2. Polinomios

Se denomina **Polinomio real de una variable real, de grado n** , a la expresión algebraica que tiene la siguiente representación:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

$$\text{Con } a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_0.$$

Donde x es la **variable**, los $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son los **coeficientes**, y pertenecen a $\mathbb{R}$; a_n es el **coeficiente principal**; a_0 es el **término independiente** y el **grado del polinomio** (n) es el mayor exponente de la variable.

Ejemplos

1. $T(x) = 2 + 3x$, es un polinomio de grado 1.
2. $R(x) = 0,4 - 5x^2 + x^3$ y $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 7x + 2$, son polinomios de grado 3.
3. $Q(x) = 3 + x^2 + x^5$, es un polinomio de grado 5.

4. $S(x) = -2$, es un polinomio de grado cero. Polinomio constante.
5. $H(x) = 0$, polinomio nulo, no tiene grado.

Observaciones

1) No son polinomios, por ejemplo:

- a) $\frac{5}{x^2} + 2x + x^{-3}$
- b) $\sqrt[3]{x} - x^{2/5} + 3x^2$

2) Existen polinomios en más variables, por ejemplo:

- a) $P(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5$. Polinomio en 2 variables, de grado 2.
- b) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 7$. Polinomio en 3 variables, de grado 2.
- c) $R(x, y, z) = xz + 2yz - 1$. Polinomio en 3 variables, de grado 2.
- d) $S(x, y) = 3x^2y^5 + 4xy^3 - 7x^3y^2$. Polinomio en 2 variables, de grado 7 en x e y.

Nota: El grado de un polinomio en determinadas variables es el de su término (o términos) de más alto grado en esas variables.

Así el polinomio $S(x, y)$ es un polinomio de tercer grado en “x”, de quinto grado en “y”, de séptimo grado en “x e y” puesto que el término de mayor grado es $3x^2y^5$.

2.3. Operaciones con expresiones algebraicas

2.3.1. Adición y Sustracción: Para sumar o restar expresiones algebraicas, se suman o se restan términos semejantes. En éste tipo de operaciones se utilizan los llamados signos de colección o de agrupación. Los signos de colección más utilizados son: los paréntesis, los corchetes, las llaves y las barras.

Ejemplos

1. $a + (b - c) = a + b - c$
2. $a - (b + c) = a - b - c$
3. $-[a - b - \{a - b - a - (-a - b - a)\}] - b = a$

Ejercicios

$$1. \frac{1}{4}[c - 4(b - c) - 2b] - 1\frac{1}{2}\{0,5\left(b - \frac{c}{3}\right) - \frac{2}{3}\left[2c - 0,75\left(b - \frac{4c}{5}\right)\right]\} =$$

2. Sean los polinomios: $A: 3x^4 - 5x^2 + x - 1$,
 $B: 2x^4 + x^3 - 2x + 3$, $C: 4x^3 - x^2 + 7$, $D: 3x^2 - 4x + 2$,

$$E: x^4 - 2x^3 + 5x, \quad F: -x^3 - 9x, \quad G: -x^4 - x^2 + 3x - 9.$$

$$\text{Calcular: } M = A - \{B + C - [D - E - (F + G)]\} - x^3.$$

2.3.2. Multiplicación algebraica: Es la operación que consiste en obtener una expresión llamado producto, conocidas otras dos, denominadas multiplicando y multiplicador.

Se estudia a continuación la multiplicación de expresiones algebraicas, para lo cual lo dividimos en tres situaciones:

- **Multiplicación de monomios:**

En este caso, se multiplican los coeficientes y a continuación las partes literales aplicando las leyes de los exponentes.

Ejemplos

$$1) (2a)(-5bc) = (2 \cdot -5)(abc) = -10abc$$

$$2) (-5x^2y^3z^4)(3x^4y^7z^8) = -15x^6y^{10}z^{12}$$

$$3) (-4a^2b^{-5}c^{-2/3})(-7a^{-2}b^7c^2) = 28b^2c^{4/3}$$

- **Multiplicación de un monomio por un multinomio:**

En este caso, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del multinomio y luego se procede como en la situación anterior.

Ejemplos

$$1) a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

$$2) 5x^4y^6(7x^2y - 2x^4y^9 + 3x^5y^3z^8) = 35x^6y^7 - 10x^8y^{15} + 15x^9y^9z^8$$

- **Multiplicación de multinomios:**

Se multiplica cada término del primer factor por el segundo factor, utilizando la propiedad distributiva.

$$(a + b + c) \cdot (d + e - f + g)$$

$$= a \cdot (d + e - f + g) + b(d + e - f + g) + c(d + e - f + g)$$

Ejemplo

$$(5x^2 - 3x + 2x^4 + 6)(3x^2 - 4x + 2) =$$

$$= 5x^2(3x^2 - 4x + 2) - 3x(3x^2 - 4x + 2) + 2x^4(3x^2 - 4x + 2)$$

$$+ 6(3x^2 - 4x + 2)$$

$$= 5x^2 \cdot 3x^2 - 5x^2 \cdot 4x + 5x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 3x^2 + 3x \cdot 4x - 3x \cdot 2 + 2x^4$$

$$\cdot 3x^2 - 2x^4 \cdot 4x + 2x^4 \cdot 2 + 6 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 4x + 6 \cdot 2$$

$$\begin{aligned}
&= 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 - 9x^3 + 12x^2 - 6x + 6x^6 - 8x^5 + 4x^4 + 18x^2 \\
&\quad - 24x + 12 \\
&= 6x^6 - 8x^5 + 19x^4 - 29x^3 + 40x^2 - 30x + 12
\end{aligned}$$

• Productos Notables

Los **Productos Notables** son ciertas formas de multiplicación de expresiones algebraicas cuyo producto se obtiene directamente, previa inspección de las expresiones. También reciben el nombre de **identidades algebraicas**.

Los productos notables más usuales son:

1. Producto de una suma por su diferencia.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Ejemplos

- $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = x^2 - 5$
- $(2x^2 + 5y^3)(2x^2 - 5y^3) = (2x^2)^2 - (5y^3)^2 = 4x^4 - 25y^6$

2. Cuadrado de un binomio.

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

Ejemplos

- $(a + \sqrt{2}b)^2 = a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2$
- $(x^3 - 3y^4)^2 = (x^3)^2 - 2(x^3)(3y^4) + (3y^4)^2 = x^6 - 6x^3y^4 + 9y^8$

3. Cuadrado de un trinomio.

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

Ejemplos

- $$\begin{aligned}
(a + 3b - 5c)^2 &= [a + 3b + (-5c)]^2 = \\
&= a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 2(3ab - 5ac - 15bc) \\
&= a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 6ab - 10ac - 30bc
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
(a + 2b + 4c)^2 &= a^2 + (2b)^2 + (4c)^2 + 2[a \cdot (2b) + a \cdot (4c) + (2b) \cdot (4c)] = \\
&= a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 4ab + 8ac + 16bc
\end{aligned}$$

4. Cubo de un binomio.

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

Ejemplos

- $$\begin{aligned} 1. \quad (2x + 3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 = \\ &= 8x^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) + 27y^3 = \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2. \quad (a^3 - 3b^2)^3 &= (a^3)^3 - 3(a^3)^2 \cdot (3b^2) + 3(a^3) \cdot (3b^2)^2 - (3b^2)^3 = \\ &= a^9 - 9a^6b^2 + 27a^3b^4 - 27b^6 \end{aligned}$$

5. Producto de un binomio por un trinomio que da una suma o diferencia de cubos.

$$\begin{aligned} (x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x^3 + y^3 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= x^3 - y^3 \end{aligned}$$

Ejemplos

- $$(a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^2) = (a^2)^3 + (3b)^3 = a^6 + 27b^3$$
- $$(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = x^3 - 8y^3$$

6. Productos de dos binomios con un término común

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplos

- $$(x + 3)(x + 8) = x^2 + (3 + 8)x + 3 \cdot 8 = x^2 + 11x + 24$$
- $$(x - 7)(x + 9) = x^2 + (-7 + 9)x + (-7) \cdot (9) = x^2 + 2x - 63$$

Ejercicio resuelto

Determinar el valor de $E = (x^2 + \sqrt{3} - 1)(x^2 - \sqrt{3} + 1)(x^4 - 2\sqrt{3} - 4) - x^8 + 8x^4$, aplicando productos notables.

Solución:

Efectuando por partes:

$$\begin{aligned} (x^2 + \sqrt{3} - 1)(x^2 - \sqrt{3} + 1) &= [x^2 + (\sqrt{3} - 1)][x^2 - (\sqrt{3} - 1)] \\ &= x^4 - (\sqrt{3} - 1)^2 \\ &= x^4 - (3 - 2\sqrt{3} + 1) \\ &= x^4 - 4 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$= [(x^4 - 4) + 2\sqrt{3}]$$

Luego:

$$\begin{aligned} (x^2 + \sqrt{3} - 1)(x^2 - \sqrt{3} + 1)[(x^4 - 4) - 2\sqrt{3}] &= \\ &= [(x^4 - 4) + 2\sqrt{3}][(x^4 - 4) - 2\sqrt{3}] \\ &= (x^4 - 4)^2 - (2\sqrt{3})^2 \\ &= (x^8 - 8x^4 + 16) - 12 = x^8 - 8x^4 + 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo en el ejercicio:

$$E = x^8 - 8x^4 + 4 - x^8 + 8x^4 = 4$$

Ejercicio

Multiplique:

1. $(u + 2)(u - 2)(u^2 + 4)(u^4 + 16)$
2. $(e^y + 1)(e^y - 1)(e^{2y} + 1)(e^{4y} + 1)(e^{8y} + 1)$
3. $(3x + 2y)^2(3x - 2y)^2$
4. $(a + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a^2 + b^2)(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^4 + b^4) + b^8$

2.3.3. División de expresiones algebraicas.

- **División de monomios:** Para dividir dos monomios, multiplicamos el monomio dividendo por el inverso multiplicativo del monomio divisor.

$$\text{Ejemplo: } (3x^2y) : (5xy^2) = (3x^2y) \bullet \frac{1}{5xy^2} = \frac{3x}{5y},$$

- **División de un multinomio por un monomio:** Para dividir un multinomio por un monomio dividimos cada término del multinomio por el monomio.

$$\text{Ejemplo: } (x^2y^3 - 2xy^2 + x^2y) : (xy^2) = \frac{x^2y^3}{xy^2} - \frac{2xy^2}{xy^2} + \frac{x^2y}{xy^2} = xy - 2 + \frac{x}{y}$$

- **División de polinomios en una variable:** El procedimiento es el mismo que utilizamos para dividir dos números enteros.

Para realizar la división entre dos polinomios se procede en la forma siguiente:

1º Se ordenan los polinomios según potencias descendentes de la variable.

2° Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor. El resultado es el primer término del cociente.

3° Se multiplica el divisor por el primer término del cociente. Se obtiene un polinomio.

4° Este polinomio se resta del dividendo, obteniendo otro polinomio denominado resto.

5° Para determinar el segundo término del cociente se repite el mismo procedimiento anterior, teniendo ahora como dividendo el resto.

6° Se sigue la división hasta obtener un resto que sea cero o de grado inferior al grado del divisor.

7° Si el resto o residuo es cero, se dice que la división es exacta.

Ejemplo Se quiere dividir $(2x^3 + 10 + 10x^5 + 6x) : (2 + x^2)$

1° Se ordenan los polinomios según potencias descendentes de la variable.	$(10x^5 + 2x^3 + 6x + 10) : (x^2 + 2)$
2° Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor. El resultado es el primer término del cociente.	$(10x^5 + 2x^3 + 6x + 10) : (x^2 + 2) = 10x^3$
3° Se multiplica el divisor por el primer término del cociente. Se obtiene un polinomio. Este polinomio se resta del dividendo, obteniendo otro polinomio denominado resto.	$ \begin{array}{r} (10x^5 + 2x^3 + 6x + 10) : (x^2 + 2) = 10x^3 \\ \underline{-(10x^5 + 20x^3)} \\ -18x^3 + 6x + 10 \end{array} $
4° Para determinar el segundo término del cociente se repite el mismo procedimiento anterior, teniendo ahora como dividendo el resto obtenido.	$ \begin{array}{r} (10x^5 + 2x^3 + 6x + 10) : (x^2 + 2) = 10x^3 - 18x \\ \underline{-(10x^5 + 20x^3)} \\ -18x^3 + 6x + 10 \\ \underline{-(-18x^3 - 36x)} \end{array} $

	$42x+10$
5° Se sigue la división hasta obtener un resto que sea cero o de grado inferior al grado del divisor.	Cociente: $10x^3-18x$ Resto: $42x+10$ Grado(resto) < Grado(divisor)

Importante

La división está bien realizada si se cumple lo siguiente:

$$\text{Dividendo} = (\text{divisor}) \bullet (\text{cuociente}) + \text{resto}$$

$$\text{Grado(resto)} < \text{Grado(divisor)}.$$

Ejemplo

Apliquemos lo anterior para dividir los polinomios $(-2x-21+3x^2)$ por $(x-3)$.

Solución: Para resolver el ejercicio ordenamos los polinomios, y luego tenemos:

$$\begin{array}{r}
(3x^2 - 2x - 21) : (x - 3) = 3x + 7 \\
- \quad (3x^2 - 9x) \\
\hline
7x - 21 \\
- \quad (7x - 21) \\
\hline
0
\end{array}$$

La división es exacta, el resto es cero y el cuociente es $(3x+7)$.

$$\text{Luego: } \frac{3x^2 - 2x - 21}{x-3} = 3x + 7, \text{ o equivalentemente:}$$

$$(3x^2 - 2x - 21) = (3x+7)(x-3)$$

Ejercicio

Siguiendo el procedimiento anterior divida $(15y^3 + 7 - 19y^2)$ por $(3y^2 - 2 - 5y)$.
Indique cociente y resto.

Algoritmo de la división

Sean, $P(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y $D(x)$ un polinomio de grado m , con $1 \leq m \leq n$. Entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ que cumplen la propiedad:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \text{ donde } \text{grado}(R(x)) < \text{grado}(D(x))$$

Observación

1. Si $p(x)$ es el dividendo, $d(x)$ es el divisor, $q(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el resto, entonces podemos escribir:

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}, \quad \text{si multiplicamos por } d(x) \text{ obtenemos:}$$

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$$

2. Si $r(x) = 0$, entonces $p(x) = q(x) \cdot d(x)$.

Esto ocurre cuando $q(x)$ y $d(x)$ son **factores o divisores** del polinomio $p(x)$.

O bien, decimos que: $p(x)$ es divisible por $q(x)$ y por $d(x)$.

Ejercicios

1. Divida:

- a) $(-24x^3y^2z^6) : (-6x^4z^2)$
- b) $(3x^3 - 6x^2 + 72x) : 6x^2$
- c) $(2ab^4 - 3a^3 + 5b^3) : 7b^2a^5$
- d) $(m^3 - 5m + 6) : (m - 2)$
- e) $(6x^5 - 13x^3 + 5x + 3 - 4x^2 + 3x^4) : (3x^3 - 2x - 1)$
- f) $(3a^3 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}) : (3a + 1)$
- g) $(x^{n+1} + x^n) : (x^n - 2)$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

2. Obtenga el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

- a) $(6x^2 - 4x^3 - 3x^2 - 1) \div (x^2 + 2x - 1)$
- b) $(x^4 + 1) \div (x^2 + x + 1)$
- c) $(4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 10x) \div (2x + 3)$

- d) $(x + 2x^3 + x^5 + 2x^2 + x^4) \div (x^4 + 2)$
- e) $(2x^5 - x^4 + 3x^2 + 5) \div (3x^2 - 1 + 2x)$
- f) $(x^4 - x^3 + x + 3) \div (x - 2)$
- f) $(3x^4 - 5x + 2) \div (x + 2)$
- g) $(3x^5 - 10x^2 + 12x - x^3 + 15) \div (x - 3)$
- h) $(27x^4 - 6x^2 + x + 15) \div (3x - 1)$

- **División Sintética**

Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, un polinomio de grado n , polinomio dividendo y $D(x) = x - a$ un polinomio de grado 1, polinomio divisor. Por el algoritmo de la división $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$, donde $Q(x)$ es el polinomio cociente de grado $(n - 1)$ y $R(x)$ es el resto.

Para determinar el resto y los coeficientes de $Q(x)$, podemos utilizar el método de la **división sintética**, también llamada **regla de Ruffini** que consiste en:

1. Ordenar $P(x)$ en potencias decrecientes de x , completando todos los términos faltantes con ceros como coeficientes.
2. Escribir en una línea horizontal **todos** los coeficientes de $P(x)$. Ubicar "**a**" al lado derecho de la primera fila.
3. Bajar el coeficiente principal **a_n** a la posición de una tercera línea horizontal, (**b_n**).
 Multiplicar **a_n** por **a** y colocar el producto sobre una segunda línea horizontal bajo el segundo coeficiente **a_{n-1}** .
 Sumar a_{n-1} y el producto $a_n \cdot a$, colocando esa suma (**b_{n-1}**) en la tercera línea.
4. Multiplicar **b_{n-1}** por **a** y colocar el producto en la segunda línea debajo de **a_{n-2}** . Sumar a_{n-2} y el producto $b_{n-1} \cdot a$, colocando dicha suma (**b_{n-2}**) en la tercera línea.
5. Continuar de esta manera hasta que el producto de **b_1** y **a** esté colocado en la segunda línea, abajo de **a_0** .
 Cuando a_0 y el producto $b_1 \cdot a$ se suman, el resultado es el residuo **R**; este se coloca en la tercera línea y el proceso se detiene.

Así obtenemos:

$$R(x) = b_0, \text{ y}$$

$$Q(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots + b_nx^{n-1} \text{ un polinomio de grado } (n - 1).$$

Ejemplos

1. Determinar el cociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ cuando $p(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$ es dividido por $(x - 2)$.

Solución: Aquí, $p(x) = x^4 + 2x^3 + 0 \cdot x^2 - 6x + 1$ y ordenamos el trabajo como se indica:

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & 0 & -6 & 1 & \boxed{2} \\ & 2 & 8 & 16 & 20 & \\ \hline 1 & 4 & 8 & 10 & 21 & \end{array}$$

Por lo tanto, el cociente es: $q(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 10$ y el resto es: $r(x) = 21$

2. Usar división sintética para determinar el cociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ en la división $(6x^4 - x^3 - 42x^2 + 50 + 15x) : (x - 2)$

Solución: Ordenemos el polinomio $p(x)$ en potencias decrecientes de x , $(6x^4 - x^3 - 42x^2 + 15x + 50) : (x - 2)$ y efectuemos la división utilizando Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{rrrrrr} 6 & -1 & -42 & 15 & 50 & \boxed{2} \\ & 12 & 22 & -40 & -50 & \\ \hline 6 & 11 & -20 & -25 & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, $r(x) = 0$ y $q(x) = 6x^3 + 11x^2 - 20x - 25$

3. Usar división sintética para determinar el cociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ en la división $(8x^2 + 4x^3 + 8x + x^4 + 3) : (x + 1)$

Solución:

a) Ordenamos los polinomios

$$(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 3) : (x + 1)$$

Nota: En este caso el divisor es $x + 1 = x - (-1) \therefore a = -1$

b) Utilizamos división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 8 & 8 & 3 \\ & -1 & -3 & -5 & -3 & \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore r(x) = 0 \quad y \quad q(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3.$$

4. $(2x^2 - 3x - 9) : (x - 3)$

2	-3	-9	3
	6	9	
2	3	0	

$$r(x) = 0, \quad q(x) = 2x + 3$$

5. $(5x^3 - 14x + 3) : (x - 2)$

5	0	-14	3	2
↓	10	20	12	
5	10	6	15	

$$r(x) = 15,$$

$$q(x) = 5x^2 + 10x + 6$$

6. $(x^3 - 27) : (x + 3)$

1	0	0	-27	-3
	-3	9	-27	
1	-3	9	-54	

$$r(x) = -54$$

$$q(x) = x^2 - 3x + 9$$

7. $30x^2 + 53x + 21 : 5x + 3 =$

Determine cociente y resto de la división anterior, usando división sintética.

30	53	21	-3/5
	-18	-21	
30	35	0	·1/5

$$r(x) = 0$$

$$q(x) = \frac{1}{5}(30x + 35) = 6x + 7$$

O bien:

$$\begin{aligned} \text{i. } 30x^2 + 53x + 21 &= \left(x - \frac{-3}{5}\right)(30x + 35) \\ &= \left(x + \frac{3}{5}\right) \cdot 5(6x + 7) \\ &= \left(\frac{5x + 3}{5}\right) \cdot 5(6x + 7) = \\ 30x^2 + 53x + 21 &= (5x + 3)(6x + 7) \quad \text{Factores del polinomio} \end{aligned}$$

$$\therefore q(x) = 6x + 7$$

ii. Otra forma:

$$\begin{aligned} \frac{30x^2 + 53x + 21}{5x + 3} &= \frac{\left(x + \frac{3}{5}\right)(30x + 35)}{5x + 3} \\ &= \frac{\left(x + \frac{3}{5}\right)5(6x + 7)}{5\left(x + \frac{3}{5}\right)} \\ &= 6x + 7 \end{aligned}$$

$$\text{Así: } 30x^2 + 53x + 21 = (5x + 3)(6x + 7)$$

8) Determine cuociente y resto de $(5x^3 - 14x + 3) : \underbrace{(x - 2)} =$

Solución.

Podemos proceder de 2 maneras:

a) Ordenamos los polinomios y utilizamos el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 14x + 3 : \underbrace{x - 2}_{d(x)} = \underbrace{5x^2 + 10x + 6}_{q(x)} \\ \underline{-5x^3 + 10x^2} \\ 10x^2 - 14x + 3 \\ \underline{-10x^2 + 20x} \\ 6x + 3 \\ \underline{-6x + 12} \\ \hline \end{array}$$

$$15 \rightarrow r(x)$$

$$\therefore \frac{5x^3 - 14x + 3}{x - 2} = (5x^2 + 10x + 6) + \frac{15}{x - 2}$$

b) El proceso de división puede simplificarse cuando el divisor es de la forma $(x - a)$, utilizando Regla de Ruffini:

x^3	x^2	x	$ind.$	"a"
5	0	-14	3	2
	10	20	12	
5	10	6	15	
x^2	x	$ind.$	$resto$	

En ambos casos se tiene: $Q(x) = \underline{5x^2 + 10x + 6}$, $R(x) = 15$

Observación

Si $p(x) : (x-a) = q(x)$, entonces $p(x) = (x-a) \cdot q(x) + r(x)$

$$r(x)$$

Luego: $p(a) = (a-a) \cdot q(x) + r(x)$

$$p(a) = 0 + r(x)$$

$p(a) = r(x)$, donde "**a**" es la raíz de $x - a = 0$, $x = a$.

Teorema del Resto: El resto de dividir un polinomio **$p(x)$** por **$(x-a)$** es **$p(a)$** .

En nuestro ejercicio: $r(x) = p(2) = 5(2)^3 - 14(2) + 3 = 5 \cdot 8 - 14 \cdot 2 + 3 =$

$$= 40 - 28 + 3 = 15$$

$$\therefore r(x) = 15$$

Ejercicios

Utilizando división sintética, determine el cociente y el resto de:

1) $(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x + 3)$

2) $(3x^4 - 7x - 20) : (x - 2)$

3) $2x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 6$ dividido por a) $x - 4$ b) $x + 3$

$$4) (30x^2 + 53x + 21):(5x + 3)$$

2.3.4. Cuocientes notables.

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a & , \quad \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \\ 2) \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2 & , \quad \frac{x^3 + a^3}{x + a} = x^2 - ax + a^2 \end{array}$$

Observación:

- 1) $x^2 - a^2$ es divisible por $(x - a)$ y por $(x + a)$
- 2) $x^3 - a^3$ es divisible sólo por $(x - a)$
- 3) $x^3 + a^3$ es divisible sólo por $(x + a)$
- 4) $x^2 + a^2$ no es divisible por $(x + a)$ ni por $(x - a)$

Otros cuocientes importantes

A) De la forma: $\frac{x^n - a^n}{x - a}$, $n \in \mathbb{N}$

Su forma es:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

El resultado tiene “ n ” términos y el mayor exponente de x es un grado menor que el del dividendo, las potencias de x decrecen y las de a crecen.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ 2) \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 \\ 3) \frac{x^4 - 1}{x - 1} = x^3 + x^2 + x + 1 \\ 4) \frac{x^4 - 16}{x - 2} = x^3 + x^2 \cdot 2 + x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \\ 5) \frac{27x^3 - 8y^3}{3x - 2y} = \frac{(3x)^3 - (2y)^3}{3x - 2y} = (3x)^2 + (3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 + 6xy + 4y^2 \end{array}$$

B) De la forma: $\frac{x^n - a^n}{x + a}$, $n \in \mathbb{N}$

$p(x) = x^n - a^n$ es divisible por $(x + a)$ sólo si “ n ” es par; en los demás casos no es divisible por $(x + a)$.

Si n es par, se tiene que: $\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-1}$

Ejemplos:

$$1) \frac{x^4 - a^4}{x + a} = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$$

$$2) \frac{16a^4 - b^4}{2a + b} = \frac{(2a)^4 - (b)^4}{(2a) + b} = (2a)^3 - b(2a)^2 + b^2(2a) - b^3 \\ = 8a^3 - 4a^2b + 2ab^2 - b^3$$

C) De la forma: $\frac{x^n + a^n}{x - a}$, $n \in \mathbb{N}$

$p(x) = x^n + a^n$ nunca es divisible por $(x - a)$.

Ejemplos:

$$1) \frac{x^2 + 1}{x - 1} \quad ; \quad \text{¡nunca!}$$

1	0	1	1
	1	1	
1	1	2	$\rightarrow r(x) = 2 \neq 0$

$$2) \frac{x^3 + 27}{x - 3}$$

1	0	0	27	3
	3	9	27	
1	3	9	54	$\rightarrow r(x) = 54 \neq 0$

D) De la forma: $\frac{x^n + a^n}{x + a}$, $n \in \mathbb{N}$

$p(x) = x^n + a^n$ es divisible por $(x + a)$ sólo si " n " es impar.

Luego, se tiene:

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{8x^3 + 125y^3}{2x + 5y} = \frac{(2x)^3 + (5y)^3}{(2x) + (5y)} = (2x)^2 - (5y)(2x) + (5y)^2 = 4x^2 - 10xy + 25y^2$$

2.4. Factorización

Factorizar una expresión algebraica es descomponerla en factores.

2.4.1. Métodos elementales y directos para factorización

- **Factor común:** $ac + af = a(c + f)$

Donde a es una expresión algebraica que puede ser monomio, binomio o multinomio.

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $4x^4 + 5x^2 = x^2(4x^2 + 5)$
2. $x^3(x + y) + 5xy(x + y) = (x + y)(x^3 + 5xy) = x(x + y)(x^2 + 5y)$
3. $m^3n^4 + m^3n^3 + m^3n^2 + m^3n = m^3n(n^3 + n^2 + n + 1) = m^3n(n + 1)(n^2 + 1)$

- **Diferencia de cuadrados:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Luego, la diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma de las bases por su diferencia.

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $m^2 - 4n^2 = (m - 2n)(m + 2n)$
2. $36a^2 - 49b^2 = (6a - 7b)(6a + 7b)$
3. $25x^4 - 16y^6 = (5x^2 + 4y^3)(5x^2 - 4y^3)$

- **Trinomio cuadrado perfecto:**

Un trinomio es el desarrollo del cuadrado de un binomio, si hay dos términos que son cuadrados perfectos del mismo signo y el tercer término es el doble producto de las bases de los términos.

$$\text{Así} \quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$
2. $4a^2 - 20x + 25 = (2a - 5)^2$
3. $9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$

- **Otros trinomios:**

i) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

ii) $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$, o $ax^2 + mx + n$.

Se reduce a un polinomio de la forma $x^2 + px + q$ haciendo

$ax^2 + bx + c = \frac{a}{a}(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{a}(a^2x^2 + b(ax) + ac)$ que se factoriza como i).

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $x^2 + 4x - 21$.

$$\text{Desarrollo: } x^2 + 4x - 21 = x^2 + (7 - 3)x + 7 \cdot (-3) = (x + 7)(x - 3)$$

2. $6x^2 + 11x + 3$.

Desarrollo:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 11x + 3 &= \frac{6}{6}(6x^2 + 11x + 3) = \frac{1}{6}[(6x)^2 + 11(6x) + 6 \cdot 3] \\ &= \frac{1}{6}[(6x)^2 + 11(6x) + 18] = \frac{1}{6}[(6x) + 9][(6x) + 2] \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3(2x + 3) \cdot 2(3x + 1) \end{aligned}$$

Finalmente se tiene la factorización:

$$6x^2 + 11x + 3 = (3x + 1)(2x + 3)$$

3. $2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$

$$\begin{aligned}\text{Desarrollo: } 2x^2 + x - 3 &= \frac{2}{2}(2x^2 + x - 3) = \frac{1}{2}[(2x)^2 + (2x) - 2 \cdot 3] \\ &= \frac{1}{2}[(2x)^2 + (2x) - 6] = \frac{1}{2}[(2x) + 3][(2x) - 2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2x + 3) \cdot 2(x - 1)\end{aligned}$$

Finalmente, $2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$

Ejercicio

Factorizar la expresión: $15x^2 + 19x - 10$

- **Suma y diferencia de cubos:**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $m^3 - 125 = (m - 5)(m^2 + 5m + 25)$

2. $8a^3 + 27 = (2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$

3. $a^3 + 8b^3 = (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$

- **Suma y resta de términos (Completación de cuadrados):**

A veces es útil sumar y restar un mismo término con el objeto de convertir la expresión, que se desea factorizar, en otra equivalente en la cual aparezca un trinomio que es cuadrado perfecto.

Ejemplos

$$\begin{aligned}1) \quad a^4 + 4 &= (a^2)^2 + 2^2, \text{ sumando y restando } 4a^2. \\ &= (a^2)^2 + 2^2 + 4a^2 - 4a^2 \\ &= (a^2 + 2)^2 - 4a^2, \text{ diferencia de cuadrados} \\ &= (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)\end{aligned}$$

2) $36z^4 + 15z^2 + 4 =$

Para hacer el cuadrado perfecto $(6z^2 + 2)^2$ necesitamos tener $24z^2$ en la expresión dada, para ello se debe sumar y restar $9z^2$, ya que $24z^2 - 15z^2 = 9z^2$

$$\begin{aligned}\therefore 36z^4 + 15z^2 + 4 &= (6z^2)^2 + 2^2 + 15z^2 + 9z^2 - 9z^2 \\ &= (36z^4 + 24z^2 + 4) - 9z^2 \\ &= (6z^2 + 2)^2 - (3z)^2 \\ &= (6z^2 + 2 + 3z)(6z^2 + 2 - 3z)\end{aligned}$$

- **Agrupación de términos o Combinación de los métodos anteriores.**

Se buscan factores comunes que pueden ser monomios, binomios o multinomios. En caso de no haber algún factor común, se agrupa convenientemente tratando de que aparezca algún factor común y luego se factoriza aplicando los métodos anteriores, según corresponda a la expresión.

Ejemplos

1. Factorizar la expresión:

$$a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$$

Desarrollo:

Vemos que no existe factor común alguno a simple vista, entonces tendremos que agrupar convenientemente:

$$\begin{aligned}\underbrace{a^2x - 2a^2y} - \underbrace{ax^2 + 2axy} + \underbrace{x^3 - 2x^2y} &\Rightarrow \\ a^2(x - 2y) - ax(x - 2y) + x^2(x - 2y) &\Rightarrow \\ (x - 2y)(a^2 - ax + x^2).\end{aligned}$$

Luego,

$$a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y = (x - 2y)(a^2 - ax + x^2).$$

2. Factorizar la expresión:

$$x^4 - xy^3 - x^3y + y^4.$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned}x^4 - xy^3 - x^3y + y^4 &= (x^4 - xy^3) - (x^3y - y^4) \\ &= x(x^3 - y^3) - y(x^3 - y^3) \\ &= (x - y)(x^3 - y^3)\end{aligned}$$

$$= (x - y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$$

Luego,

$$x^4 - xy^3 - x^3y + y^4 = (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$$

3. Factorizar la expresión: $2a^4 + 2a + a^3 + 1 + a^5 + a^2 =$

Desarrollo:

$$2a^4 + 2a + a^3 + 1 + a^5 + a^2 =$$

$$= 2a(a^3 + 1) + (a^3 + 1) + a^2(a^3 + 1)$$

$$= (a^3 + 1)(2a + 1 + a^2)$$

$$= (a + 1)(a^2 - a + 1)(a + 1)^2$$

4. Factorizar la expresión:

$$x^7 + 27x^4 - x^3 - 27$$

Desarrollo:

$$x^7 + 27x^4 - x^3 - 27 = x^4(x^3 + 27) - (x^3 + 27)$$

$$= (x^3 + 27)(x^4 - 1)$$

$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Ejercicio

Factorizar la expresión: $x^8y - 64x^2y^7$

Observación

Existen expresiones algebraicas que no se pueden factorizar en $\mathbb{R}$ y sin embargo son factorizables en $\mathbb{C}$.

Luego, siempre es necesario **especificar** con respecto a qué conjunto se desea factorizar.

Ejemplo

1) $a^2 + b^2$ no es factorizable en $\mathbb{R}$, pero en $\mathbb{C}$ si lo es.

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= a^2 + (i^2)(-b^2) \\
 &= a^2 - b^2 i^2 \\
 &= (a + bi)(a - bi)
 \end{aligned}$$

2) Factorizar $x^4 - y^4$ en $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
 x^4 - y^4 &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\
 &= (x - y)(x + y)(x - yi)(x + yi)
 \end{aligned}$$

2.4.2. Factores y divisores de un polinomio

Si un polinomio $p(x)$ se puede expresar como el producto de los polinomios $q(x)$ y $s(x)$, entonces $q(x)$ y $s(x)$ se llaman factores o divisores de $p(x)$.

Si $p(x) = q(x) \cdot s(x)$ entonces $\begin{cases} q(x) \text{ es factor o divisor de } p(x) \\ s(x) \text{ es factor o divisor de } p(x) \end{cases}$

Observación

1. **Factorizar** un polinomio es descomponerlo en factores que a su vez sean polinomios.

Por lo tanto, **no es factorizar polinomios** el descomponer el polinomio en producto de expresiones algebraicas que no sean polinomios.

Ejemplos

i. $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

En este caso, $x - 1$ está expresado como producto de expresiones algebraicas que no son polinomios.

Por lo tanto, el producto $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$ no es una factorización del polinomio $x - 1$.

ii. $x^2 + 2 = \frac{1}{x}(x^3 + 2x)$

En este caso, el polinomio $x^2 + 2$ está expresado como producto de expresiones algebraicas pero, no está factorizado ya que la expresión $\frac{1}{x} = x^{-1}$ no es un polinomio.

2. El problema de factorizar un polinomio cualquiera puede resultar muy complicado y equivale a encontrar las raíces del polinomio, lo que no siempre se consigue de manera elemental.

Raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros

Consideremos el polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

Si un número racional $r = \frac{p}{q}$, está escrito en su mínima expresión y r es una raíz de

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, entonces p es un factor (divisor) de a_0 y q es un factor (divisor) de a_n .

Observación: Si en $p(x)$ se tiene que $a_n = 1$, entonces todas las raíces racionales serán números enteros.

Ejemplos

- 1) Encuentre las raíces de $p(x) = 5x^6 - 4x^5 - 41x^4 + 32x^3 + 43x^2 - 28x - 7$, posteriormente efectúe la factorización del polinomio en $\mathbb{Q}$.

Desarrollo:

En este polinomio $n = 6$, de modo que $a_n = a_6 = 5$ y $a_0 = -7$

Los factores de a_0 son: $\pm 1, \pm 7$ y los factores de a_n son: $\pm 1, \pm 5$

$\therefore$ Cualquier raíz racional debe estar entre las siguientes combinaciones:

$$r = \frac{p}{q} \rightarrow \begin{array}{l} \text{factor de } a_0 \\ \text{factor de } a_n \end{array} : \pm \frac{1}{1}, \pm \frac{1}{5}, \pm 7, \pm \frac{7}{5}$$

Se usará división sintética para determinar las raíces.

5	-4	-41	32	43	-28	-7	-1
	-5	9	32	-64	21	7	
5	-9	-32	64	-21	-7	0	$\rightarrow r(x) = 0$

$\therefore r_1 = -1$ es una raíz

Así, $p(x) = (x + 1)(5x^5 - 9x^4 - 32x^3 + 64x^2 - 21x - 7)$

Luego, se determinan las posibles raíces del polinomio

$$p_1(x) = (5x^5 - 9x^4 - 32x^3 + 64x^2 - 21x - 7)$$

Como $a_n = a_5 = 5$ y $a_0 = -7$, las posibles raíces son las enunciadas al comienzo del ejemplo.

5	-9	-32	64	-21	-7	1
	5	-4	-36	28	7	
5	-4	-36	28	7	0	$\rightarrow r(x) = 0$

$\therefore r = 1$ es una raíz

$$\text{Así, } p(x) = (x + 1)(x - 1)(5x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 28x + 7)$$

A continuación, se determinan las posibles raíces del polinomio

$$p_2(x) = (5x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 28x + 7)$$

Como $a_n = a_4 = 5$ y $a_0 = 7$, las posibles raíces son las enunciadas al comienzo del ejemplo.

5	-4	-36	28	7	1
	5	1	-35	-7	
5	1	-35	-7	0	$\rightarrow r(x) = 0$

$\therefore r = 1$ es otra raíz

$$\text{Así, } p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 1)(5x^3 + x^2 - 35x - 7)$$

Las posibles raíces para el polinomio $p_3(x) = (5x^3 + x^2 - 35x - 7)$ son:

$$r = \frac{\pm 1, \pm 7}{\pm 1, \pm 5} \quad \therefore \pm 1, \pm \frac{1}{5}, \pm 7, \pm \frac{7}{5}$$

5	1	-35	-7	$-\frac{1}{5}$
	-1	0	7	
5	0	-35	0	$\rightarrow r(x) = 0$

$\therefore r = -\frac{1}{5}$ es raíz de $p(x)$

$$\therefore p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 1)\left(x + \frac{1}{5}\right)(5x^2 - 35)$$

$$5x^2 = 35 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \text{ raíces irracionales}$$

La factorización en $\mathbb{Q}$ es: $p(x) = 5(x + 1)(x - 1)^2\left(x + \frac{1}{5}\right)(x^2 - 7)$

Las raíces son: $r = 1$, de multiplicidad 2; $r = -1$, $r = -\frac{1}{5}$ de multiplicidad 1.

2) Determine las raíces de: $x^3 - 3x - 2 = 0$

$$\therefore p(x) = x^3 - 3x - 2 \Rightarrow \text{posibles raíces: } r = \pm \frac{1}{1}, \pm \frac{2}{1}, \text{ ya que } \begin{matrix} a_0 = -2 \\ a_3 = 1 \end{matrix}$$

1	0	-3	-2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	-4	$\rightarrow r(x) = -4$

$\therefore x = 1$ no es raíz

1	0	-3	-2	-1
	-1	1	2	
1	-1	-2	0	$\rightarrow r(x) = 0$

$\therefore x = -1$ es una raíz

1	-1	-2	2
	2	2	
1	1	0	$\rightarrow r(x) = 0$

$\therefore x = 2$ es una raíz

$$\therefore p(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x + 1)$$

Las raíces son: $r = 2$ de multiplicidad 1 y $r = -1$ de multiplicidad 2.

3) ¿Cómo determinar las raíces racionales del polinomio

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10?$$

En el polinomio dado $p(x)$, observamos que $a_n = a_4 = 1$ y $a_0 = 10$

Las posibles raíces del polinomio son: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Puesto que

$$r = \frac{p}{q} \rightarrow \begin{matrix} \text{factor de } a_0 \\ \text{factor de } a_4 \end{matrix}$$

Así: $r = -1$ es una raíz

1	1	1	11	10	-1
	-1	0	-1	-10	
1	0	1	10	0	

$\Rightarrow (x + 1)$ es un factor y una raíz es $r = -1$

$$\therefore p(x) = (x + 1)(x^3 + x + 10)$$

Compruebe que: $r = -2$ es otra raíz y luego factorice

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10 \text{ en } \mathbb{Q}.$$

Ejercicios

Factorizar en $\mathbb{Q}$:

$$1) p(x) = 6x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 12x$$

Desarrollo:

$$p(x) = x(6x^3 + 8x^2 - 9x - 12) = x(3x + 4)(2x^2 - 3)$$

$$p_1(x) = 6x^3 + 8x^2 - 9x - 12$$

$$r = \frac{p}{q} = \left\{ \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6} \right\}$$

Posibles raíces racionales:

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 6, \pm 12 \right\}$$

6	8	-9	-12	$\frac{4}{3}$
	8	$\frac{64}{3}$	$\frac{148}{9}$	$r(x) \neq 0$
6	16	$\frac{37}{3}$	$\frac{30}{9}$	

$\therefore \frac{4}{3}$ no es raíz

6	8	-9	-12	$-\frac{4}{3}$
	-8	0	12	$r(x) = 0$
6	0	-9	0	

$\therefore -\frac{4}{3}$ es raíz

$$p(x) = x(6x^3 + 8x^2 - 9x - 12)$$

$$= x \left(x + \frac{4}{3} \right) (6x^2 - 9) = 6x \left(x + \frac{4}{3} \right) \left(x^2 - \frac{3}{2} \right)$$

$$= 6x \left(x + \frac{4}{3} \right) \left(x^2 - \frac{3}{2} \right)$$

$$\therefore \text{Factorización en } \mathbb{Q}: p(x) = 6x \left(x + \frac{4}{3} \right) \left(x^2 - \frac{3}{2} \right)$$

$$\therefore p_2(x) = x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \text{las raíces son irracionales}$$

$$x^2 - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \text{Factorización en } \mathbb{R}: \quad p(x) = 6x \left(x + \frac{4}{3}\right) \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$2) \quad p(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2.$$

Desarrollo:

$$r = \pm \frac{\text{Divisor de } -2}{\text{Divisor de } 6} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} D(-2) = \pm 1, \pm 2 \\ D(6) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \end{array}$$

$$\therefore \text{Posibles raíces del polinomio son: } r = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3} \right\}$$

$$\text{Verifique que las raíces son: } r = -1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$\therefore p(x) = (x + 1)2 \left(x + \frac{1}{2}\right) 3 \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Finalmente: } p(x) = 6(x + 1) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right), \text{ o lo que es lo mismo}$$

$$p(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x - 2)$$

2.5. Expresiones racionales

Una expresión racional es un cociente de expresiones algebraicas.

Son expresiones racionales, por ejemplo, las siguientes:

$$\frac{a+b}{2a-b}, \quad \frac{3x^2y + 5y^2 + 2x}{3x^2 + y}, \quad \frac{2}{a^2 + b^2}$$

Una expresión racional puede evaluarse sólo para aquellos valores de las variables para las cuales el denominador no se anula.

$$\text{Por ejemplo, evaluar la expresión: } \frac{7a^4 - 3a^2}{a^3 + 1}, \text{ para } a = -2$$

Solución:

$$\frac{7(-2)^4 - 3(-2)^2}{(-2)^3 + 1} = \frac{7(16) - 3(4)}{-8 + 1} = \frac{112 - 12}{-7} = -\frac{100}{7}$$

La expresión racional no está definida para aquellos valores de las variables en las que el denominador se anula.

Por ejemplo, determinar para que valores de t la expresión racional $\frac{4t^2+5t-8}{t^2-4t-6}$ no está definida.

Solución:

Como una expresión racional no está definida cuando su denominador es cero, se tiene que resolver la ecuación: $t^2 - 4t - 60 = 0$

Luego, se tiene:

$$t^2 - 4t - 60 = 0$$

$$(t + 6)(t - 10) = 0$$

$$t + 6 = 0 \quad \vee \quad t - 10 = 0$$

$$t = -6 \quad \vee \quad t = 10$$

Finalmente se obtiene que la expresión racional $\frac{4t^2+5t-8}{t^2-4t-60}$ no está definida para $t = -6$ y $t = 10$.

Ejercicios

- I. Evalúe, en el caso de ser posible las siguientes expresiones racionales en el valor propuesto.

$$1) \frac{8a^2 - 20}{2a^2 - 6a + 8}, \quad a = -\frac{7}{2}$$

$$2) \frac{6b + 11}{b^2 + 5b - 50}, \quad b = -3$$

$$3) \frac{6x^2 - 5x + 14}{2x^2 - 3x - 20}, \quad x = -\frac{5}{2}$$

$$4) \frac{y^2 + 2y + 1}{y^2 - 25}, \quad y = -10$$

- II. Determine para qué valores no está definida la expresión dada:

$$1) \frac{5x^2 + 13x - 6}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 25)}$$

$$2) \frac{2a^4 + 8a^2 - 10}{a^5 - 16a}$$

$$3) \frac{(t-4)(2t+3)}{2t^3 - t^2 - 15t}$$

$$4) \frac{10z^2 + 28z - 78}{4z^6 - 25z^4 + 36z^2}$$

▪ Simplificación de expresiones racionales

Al igual que en los números racionales, una expresión racional se puede simplificar y escribir en su mínima expresión.

Se dirá que una expresión racional está simplificada si el máximo común divisor entre el numerador y denominador es 1. En otras palabras, la fracción es irreducible o está reducida a su mínima expresión cuando los términos de la fracción son primos entre sí.

Ejemplos

Simplifique las siguientes expresiones;

$$1) \frac{a-3}{5a-15}$$

Solución:

$$\frac{a-3}{5a-15} = \frac{a-3}{5(a-3)} = \frac{1}{5}$$

Hemos cancelado el factor $(a-3)$, luego las dos expresiones tiene el mismo valor para cualquier $a \neq 3$

$$2) \frac{2x^3 - 6x^2 - 36x}{x^2 - 13x + 42}$$

Solución:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 36x}{x^2 - 13x + 42} = \frac{2x(x^2 - 3x - 18)}{(x-6)(x-7)} = \frac{2x(x-6)(x+3)}{(x-6)(x-7)} = \frac{2x(x+3)}{x-7} \quad \forall x \neq 6, \text{ y no}$$

está definida para $x = 7$.

$$3) \frac{a^3 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2}$$

Solución:

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a - b} \quad \forall a \neq b$$

Se observa que la expresión original y la simplificada no están definidas para $a = b$.

Ejercicio

En las expresiones fraccionarias que se indican a continuación, determine las restricciones necesarias para que sean equivalentes.

$$1) \frac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4} = \frac{3}{8a^2xy}$$

$$2) \frac{21a^8b^{10}c^{12}}{63a^4bc^2} = \frac{21a^4a^4b^9b^1c^2c^{10}}{21 \cdot 3a^4bc^2} = \frac{a^4b^9c^{10}}{3}$$

$$3) \frac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3} = \frac{3a^4}{4m^7n^3}$$

$$4) \frac{15a^{12}b^{15}c^{20}}{75a^{11}b^{18}c^{22}} = \frac{a}{5b^3c^2}$$

$$5) \frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^3 - 8b^3} = \frac{(a - 2b)^2}{(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)} = \frac{(a - 2b)}{(a^2 + 2ab + 4b^2)}$$

$$6) \frac{x^3 + 4x^2 - 21x}{x^3 - 9x} = \frac{x(x^2 + 4x - 21)}{x(x^2 - 9)} = \frac{(x - 3)(x + 7)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x + 7}{x + 3}$$

$$7) \frac{a^2 - a - 20}{a^2 - 7a + 10} = \frac{(a - 5)(a + 4)}{(a - 2)(a - 5)} = \frac{(a + 4)}{(a - 2)}$$

$$8) \frac{6x^2 + 5x - 6}{15x^2 - 7x - 2} = \frac{(3x - 2)(2x + 3)}{(3x - 2)(5x + 1)} = \frac{2x + 3}{5x + 1}$$

Las expresiones racionales se suman, restan, multiplican y dividen de la misma manera que los números racionales.

- **Adición y sustracción de expresiones racionales.**

Se presentan dos casos:

a) Cuando las expresiones tienen el mismo denominador.

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{B}$ son expresiones racionales donde $B \neq 0$, entonces:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$$

Es decir, se suman y/o restan los numeradores y se conserva el denominador común.

Ejemplos

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{5a^2 - 15}{6a + 10} + \frac{4a^2 - 10}{6a + 10} &= \frac{5a^2 - 15 + 4a^2 - 10}{6a + 10} \\ &= \frac{9a^2 - 25}{6a + 10} = \frac{(3a)^2 - 5^2}{2(3a + 5)} = \frac{(3a + 5)(3a - 5)}{2(3a + 5)} \\ &= \frac{3a - 5}{2}, a \neq -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{7b - 4}{2b - 8} - \frac{2b^2 - 5b}{8 - 2b} &= \frac{7b - 4}{2b - 8} - \frac{2b^2 - 5b}{-(2b - 8)} = \frac{7b - 4}{2b - 8} + \frac{2b^2 - 5b}{2b - 8} \\ &= \frac{2b^2 + 2b - 4}{2b - 8} = \frac{2(b^2 + b - 2)}{2(b - 4)} = \frac{(b + 2)(b - 1)}{b - 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{3c^2 - 5c - 2}{c^2 - 4c - 21} - \frac{2c^2 + 5c + 7}{c^2 - 4c - 21} &= \frac{(3c^2 - 5c - 2) - (2c^2 + 5c + 7)}{c^2 - 4c - 21} \\ &= \frac{3c^2 - 5c - 2 - 2c^2 - 5c - 7}{c^2 - 4c - 21} = \frac{c^2 - 10c - 9}{c^2 - 4c - 21} \end{aligned}$$

b) Cuando las expresiones tienen distinto denominador.

En este caso debemos buscar el mínimo común múltiplo entre los denominadores dados, luego amplificar cada expresión racional de modo que tengan el denominador común para efectuar la adición y/o sustracción.

Ejemplos

$$1) \frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$$

Solución: El m.c.m. entre $(a-1)$ y $(a+1)$ es $(a-1)(a+1)$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} &= \frac{(a+1)(a+1)}{(a-1)(a+1)} - \frac{(a-1)(a-1)}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+1)} - \frac{(a-1)^2}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{(a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 2a + 1)}{a^2 - 1} = \frac{4a}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

$$2) \frac{z+3}{z^2+3z+2} - \frac{z-1}{z^2+z-2}$$

Solución:

i) El m.c.m. entre $\left. \begin{array}{l} z^2 + 3z + 2 = (z+1)(z+2) \\ z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1) \end{array} \right\}$ es $(z-1)(z+1)(z+2)$

ii) Podemos proceder en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{z+3}{z^2+3z+2} - \frac{z-1}{z^2+z-2} &= \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} - \frac{z-1}{(z+2)(z-1)} \\ &= \frac{(z+3)(z-1) - (z-1)(z+1)}{(z-1)(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{(z-1)[(z+3) - (z+1)]}{(z-1)(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{[(z+3) - (z+1)]}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{(z+1)(z+2)}, \forall z \neq 1 \end{aligned}$$

Observación

Si factorizamos y simplificamos las expresiones, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{z+3}{z^2+3z+2} - \frac{z-1}{z^2+z-2} &= \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} - \frac{z-1}{(z+2)(z-1)} \\ &= \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} - \frac{1}{(z+2)}, \quad \forall z \neq 1 \\ &= \frac{(z+3)-(z+1)}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{(z+1)(z+2)}, \quad \forall z \neq 1\end{aligned}$$

$$3) \quad \frac{1}{2a^2+11a-6} - \frac{3}{4a^2+14a-30}$$

Solución:

i) Factorizamos los denominadores;

$$\begin{aligned}\text{➤ } 2a^2 + 11a - 6 &= \frac{(2a)^2 + 11(2a) - 12}{2} \\ &= \frac{(2a+12)(2a-1)}{2} = \frac{2(a+6)(2a-1)}{2} = (a+6)(2a-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{➤ } 4a^2 + 14a - 30 &= (2a)^2 + 7(2a) - 30 = (2a-3)(2a+10) \\ &= 2(2a-3)(a+5)\end{aligned}$$

ii) Determinamos el m.c.m. entre los denominadores.

∴ m.c.m. es el producto de todos los factores, es decir:

$$2(a+6)(2a-1)(2a-3)(a+5) = (2a^2+11a-6)(4a^2+14a-30)$$

iii) Restamos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a^2+11a-6} - \frac{3}{4a^2+14a-30} &= \frac{1}{(a+6)(2a-1)} - \frac{3}{2(2a-3)(a+5)} \\ &= \frac{4a^2+14a-30-3(2a^2+11a-6)}{(2a^2+11a-6)(4a^2+14a-30)} \\ &= \frac{4a^2+14a-30-6a^2-33a+18}{(2a^2+11a-6)(4a^2+14a-30)}\end{aligned}$$

$$= \frac{-2a^2 - 19a - 12}{(2a^2 + 11a - 6)(4a^2 + 14a - 30)}$$

$$4) \quad \frac{a}{a^2+a-20} + \frac{3-a}{a^2-6a+8} - \frac{1}{a^2+8a+15}$$

➤ Factorizamos y determinamos m.c.m. entre los denominadores:

$$a^2 + a - 20 = (a + 5)(a - 4)$$

$$a^2 - 6a + 8 = (a - 4)(a - 2)$$

$$a^2 + 8a + 15 = (a + 3)(a + 5)$$

$$\therefore \text{m.c.m. } (a + 5)(a - 4)(a - 2)(a + 3)$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \frac{a}{a^2+a-20} + \frac{3-a}{a^2-6a+8} - \frac{1}{a^2+8a+15} &= \\ &= \frac{a(a-2)(a+3) - (a-3)(a+5)(a+3) - (a-4)(a-2)}{(a+5)(a-4)(a-2)(a+3)} \\ &= \frac{a(a^2+a-6) - (a^2-9)(a+5) - (a^2-6a+8)}{(a+5)(a-4)(a-2)(a+3)} \\ &= \frac{a^3 + a^2 - 6a - a^3 - 5a^2 + 9a + 45 - a^2 + 6a - 8}{(a+5)(a-4)(a-2)(a+3)} \\ &= \frac{9a - 5a^2 + 37}{(a+5)(a-4)(a-2)(a+3)} \end{aligned}$$

- **Multiplicación de expresiones racionales.**

Las expresiones racionales se multiplican de la misma forma que los números racionales y antes de efectuar la multiplicación, si es posible, conviene simplificar.

Es decir, si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son expresiones racionales, donde $B \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Ejemplos

$$1) \frac{22a^5b^4}{8c^9} \cdot \frac{14cb^6}{11a^2} = \frac{22 \cdot 14 \cdot a^5b^4 \cdot cb^6}{8 \cdot 11c^9 \cdot a^2} = \frac{7a^3b^{10}}{2c^8}$$

$$2) \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 6x + 8} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x-4)(x-2)} \cdot \frac{(x-5)(x-2)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 6x + 8} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9} = \frac{x-5}{x+3} \quad ; (x \neq -3, x \neq 2, x \neq 4)$$

Nota: Para simplificar, antes de multiplicar, debemos factorizar las expresiones dadas.

$$3) \frac{2t^2 - 3t - 2}{3t^2 - 7t + 2} \cdot \frac{3t^2 - 19t + 6}{2t^2 - 11t - 6} = \frac{(2t+1)(t-2)}{(t-2)(3t-1)} \cdot \frac{(t-6)(3t-1)}{(t-6)(2t+1)}$$
$$= \frac{2t+1}{3t-1} \cdot \frac{3t-1}{2t+1} = \frac{(2t+1)(3t-1)}{(3t-1)(2t+1)} = 1$$

Observación

A continuación se detallan las factorizaciones, de las expresiones algebraicas.

$$i) 2t^2 - 3t - 2 = \frac{(2t)^2 - 3(2t) - 4}{2} = \frac{(2t-4)(2t+1)}{2} = \frac{2(2t+1)(t-2)}{2} = (2t+1)(t-2)$$

$$ii) 3t^2 - 7t + 2 = \frac{(3t)^2 - 7(3t) + 6}{3} = \frac{(3t-6)(3t-1)}{3} = \frac{3(t-2)(3t-1)}{3} = (t-2)(3t-1)$$

$$iii) 3t^2 - 19t + 6 = \frac{(3t)^2 - 19(3t) + 18}{3} = \frac{(3t-18)(3t-1)}{3} = \frac{3(t-6)(2t+1)}{3}$$
$$= (t-6)(3t-1)$$

$$iv) 2t^2 - 11t - 6 = \frac{(2t)^2 - 11(2t) - 12}{2} = \frac{(2t-12)(2t+1)}{2} = \frac{2(t-6)(2t+1)}{2}$$
$$= (t-6)(2t+1)$$

$$4) \left(\frac{6a^2b}{7c^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{7c^4}{9ab^2}\right)^2 = \frac{(6a^2b)^4}{(7c^3)^4} \cdot \frac{(7c^4)^2}{(9ab^2)^2} = \frac{6^4a^8b^4}{7^4c^{12}} \cdot \frac{7^2c^8}{9^2a^2b^4}$$
$$= \frac{6^4 \cdot 7^2 a^8 b^4 c^8}{7^4 \cdot 9^2 a^2 b^4 c^{12}} = \frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot a^8 b^4 c^8}{(3^2)^2 \cdot 7^4 a^2 b^4 c^{12}}$$

$$= \frac{2^4 a^6}{7^2 c^4} = \frac{16a^6}{49c^4}$$

$$\begin{aligned} 5) \left(\frac{2a^2+2a-40}{2a^2-28a+80} \right)^3 \cdot \left(\frac{a^2-5a-50}{a^2+10a+25} \right)^4 &= \\ &= \left(\frac{2(a-4)(a+5)}{2(a-4)(a-10)} \right)^3 \cdot \left(\frac{(a-10)(a+5)}{(a+5)^2} \right)^4 \\ &= \left(\frac{a+5}{a-10} \right)^3 \cdot \left(\frac{a-10}{a+5} \right)^4 = \frac{(a+5)^3}{(a-10)^3} \cdot \frac{(a-10)^4}{(a+5)^4} \\ &= \frac{a-10}{a+5} \end{aligned}$$

- **División de expresiones racionales:**

Procedemos del mismo modo que en $\mathbb{Q}$. Es decir, si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son expresiones racionales con $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, entonces:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Ejemplos

$$1) \frac{15a-15}{9a} : \frac{a-1}{15a} = \frac{15(a-1)}{9a} \cdot \frac{15a}{a-1} = \frac{25}{1} = 25$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{b^4-16}{(b-2)^2} : \frac{b^2+2b}{b-2} &= \frac{b^4-16}{(b-2)^2} \cdot \frac{b-2}{b^2+2b} = \frac{(b^2-4)(b^2+4)}{(b-2)^2} \cdot \frac{b-2}{b(b+2)} \\ &= \frac{(b-2)(b+2)(b^2+4)(b-2)}{(b-2)^2 \cdot b(b+2)} = \frac{b^2+4}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{a^3-125}{a^2-10a+25} : \frac{a^2+5a+25}{a^2+10a+25} &= \frac{a^3-125}{a^2-10a+25} \cdot \frac{a^2+10a+25}{a^2+5a+25} \\ &= \frac{(a-5)(a^2+5a+25)(a+5)^2}{(a-5)^2(a^2+5a+25)} = \frac{(a+5)^2}{(a-5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \frac{(2z+4)(z-1)+5-3z}{4+2z} : (z-z^2+2z^3) &= \frac{2z^2+2z-4+5-3z}{4+2z} \cdot \frac{1}{z-z^2+2z^3} \\
&= \frac{2z^2-z+1}{4+2z} \cdot \frac{1}{2z^3-z^2+z} \\
&= \frac{2z^2-z+1}{2z(z+2)(2z^2-z+1)} = \frac{1}{2z(z+2)}
\end{aligned}$$

2.6. Operatoria algebraica con radicales

- **Simplificación de expresiones con radicales**

Una expresión que contiene radicales está simplificada o reducida a su forma más sencilla si:

- ✓ No se puede sacar ningún factor del radicando.
- ✓ No puede reducirse el grado de ninguna raíz.
- ✓ No hay fracciones dentro del radical.
- ✓ No hay radicales en el denominador. Es decir, se ha racionalizado su denominador.

Ejemplos

Simplificar las siguientes raíces.

$$1) \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{36}y^{24}}} = \sqrt[12]{x^{36}y^{24}} = \sqrt[12]{(x^3y^2)^{12}} = |x^3y^2|.$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \sqrt[7]{64a^2b^4} \cdot \sqrt[7]{512a^3b^6} &= \sqrt[7]{8^2a^2b^4 \cdot a^3b^68^3} = \sqrt[7]{(2^2)^7 2a^5b^{10}} = \\
&\sqrt[7]{4^7} \sqrt[7]{b^7} \sqrt[7]{2a^5b^3} = 4b\sqrt[7]{2a^5b^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \sqrt[9]{\sqrt{(m^2-2)^{54}(5n+3)^6}} &= \sqrt[9]{(m^2-2)^{27}(5n+3)^3} \\
&= (m^2-2)^3 \sqrt[3]{(5n+3)} \\
&= |(m^2-2)^3| \sqrt[3]{(5n+3)}
\end{aligned}$$

$$4) \quad \frac{\sqrt[5]{x^{12}y^3z}}{\sqrt[5]{x^2y^8z^6}} = \sqrt[5]{x^{10}y^{-5}z^{-5}} = \frac{x^2}{yz}$$

• **Adición, sustracción, multiplicación, división y racionalización.**

I. Efectuar las siguientes operaciones y reducir a su mínima expresión.

$$\begin{aligned} 1) \quad \sqrt{12x} + \sqrt{27x} - \sqrt{48x} &= \sqrt{2^2 3x} + \sqrt{3^2 3x} - \sqrt{2^4 3x} \\ &= 2\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = \sqrt{3x} \end{aligned}$$

$$2) \quad -2\sqrt{x} \cdot 7\sqrt{x^4} = -14\sqrt{x \cdot x^4} = -14\sqrt{x^5} = -14\sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot x} = -14x^2\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \sqrt{xy} : \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) &= \sqrt{xy} : \left(\frac{\sqrt{xy}}{y} - \frac{\sqrt{yx}}{x} \right) = \sqrt{xy} : \left(\frac{x\sqrt{xy} - y\sqrt{xy}}{xy} \right) \\ &= \sqrt{xy} \cdot \frac{xy}{(x-y)\sqrt{xy}} = \frac{xy}{x-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \left(\sqrt{a+b+\sqrt{4ab}} - \sqrt{a+b-\sqrt{4ab}} \right)^2 &= \\ &= a+b+\sqrt{4ab} - 2\sqrt{(a+b)^2 - (\sqrt{4ab})^2} + a+b-\sqrt{4ab} \\ &= 2a+2b-2(\sqrt{(a-b)^2}) = 4b \end{aligned}$$

$$5) \quad 2\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + 4\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - \sqrt{\frac{36a^2}{a^2-b^2}} = \frac{2(\sqrt{a-b})^2 + 4(\sqrt{a+b})^2 - 6a}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$6) \quad \sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{(a^2-b^2) \cdot \frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{(a+b)(a-b) \cdot \frac{a+b}{a-b}} = (a+b)$$

$$7) \quad (5a^2\sqrt[9]{a^3})(3a^{12}\sqrt{a}) = (5a^{2 \cdot 36}\sqrt{(a^3)^4})(3a^{36}\sqrt{a^3}) = 15a^{3 \cdot 36}\sqrt{a^{15}} = 15a^{3 \cdot 12}\sqrt{a^5}$$

II. Multiplicar usando productos notables.

$$1) \quad (\sqrt[4]{x} + 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x} - 1)(x^4 + x^2 + 1),$$

Por propiedad asociativa y propiedad conmutativa de la multiplicación se tiene:

$$(\sqrt[4]{x} + 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x} - 1)(x^4 + x^2 + 1) =$$

$$= (\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1) \\
&= (x^2-1)(x^4+(x^2+1)) \\
&= (x^2-1)(x^2+1) + (x^2-1)x^4 \\
&= x^4-1+x^6-x^4 = x^6-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \sqrt[3]{a^2+4a+4} \cdot \sqrt[3]{-a-2} &= \sqrt[3]{(a+2)^2} \cdot \sqrt[3]{-(a+2)} \\
&= -\sqrt[3]{(a+2)^3} = -(a+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x^2+x+1)} \cdot \sqrt[3]{(x^6-2x^3+1)} \\
&= \sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)(x^6-2x^3+1)} \\
&= \sqrt[3]{(x^3-1)(x^3-1)^2} \\
&= \sqrt[3]{(x^3-1)^3} = x^3-1
\end{aligned}$$

III. Racionalizar las siguientes expresiones.

$$1) \frac{z^2-49}{\sqrt{z+7}} = \frac{(z^2-49)\sqrt{z+7}}{\sqrt{z+7} \cdot \sqrt{z+7}} = \frac{(z-7)(z+7)\sqrt{z+7}}{z+7} = (z-7)\sqrt{z+7}$$

$$\begin{aligned}
2) \frac{3+\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} &= \frac{(3+\sqrt{x+1})(3+\sqrt{x+1})}{(3-\sqrt{x-1})(3+\sqrt{x+1})} = \frac{3^2+6\sqrt{x+1}+(\sqrt{x+1})^2}{3^2-(\sqrt{x+1})^2} \\
&= \frac{9+6\sqrt{x+1}+x+1}{9-x-1} = \frac{10+x+6\sqrt{x+1}}{8-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \frac{3a-4}{\sqrt{4a-1}-\sqrt{a+3}} &= \frac{(3a-4)[\sqrt{4a-1}+\sqrt{a+3}]}{(\sqrt{4a-1})^2-(\sqrt{a+3})^2} = \frac{(3a-4)(\sqrt{4a-1}+\sqrt{a+3})}{4a-1-a-3} \\
&= \frac{(3a-4)(\sqrt{4a-1}+\sqrt{a+3})}{3a-4} = \sqrt{4a-1}+\sqrt{a+3}
\end{aligned}$$

IV. Reducir las siguientes expresiones.

$$1) \frac{ab}{\sqrt[4]{ab^3}} = \frac{ab\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt[4]{a^4b^4}} = \frac{ab\sqrt[4]{a^3b}}{ab} = \sqrt[4]{a^3b}$$

$$2) \frac{\sqrt{4x^5}}{\sqrt{3y^3}} = \frac{2x^2\sqrt{x}}{y\sqrt{3y}} = \frac{2x^2\sqrt{3xy}}{y(3y)} = \frac{2x^2}{3y^2}\sqrt{3xy}$$

$$3) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{9x}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{3^2x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{3x^2}}{3x}$$

$$4) \frac{m^2+4}{\sqrt[3]{m}+2} = \frac{(m^2+4)(\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4)}{(\sqrt[3]{m}+2)(\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4)} = \frac{(m^2+4)(\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4)}{(\sqrt[3]{m^3}+2^3)} \\ = \frac{(m^2+4)(\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4)}{(m+8)}$$

• **Ejercicios misceláneos de potencias y raíces.**

$$1) \left(\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}} + \frac{a^{-2}-1}{a^2-1} \right) \left(1 - \frac{1}{1+\frac{b^2}{1-b^2}} \right) = \left(\frac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}} + \frac{\frac{1}{a^2}-1}{a^2-1} \right) \left(1 - \frac{1}{\frac{1-b^2+b^2}{1-b^2}} \right) \\ = \left(\frac{\frac{b^4-a^4}{a^4b^4}}{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}} + \frac{\frac{1-a^2}{a^2}}{a^2-1} \right) \left(1 - \frac{1-b^2}{1} \right) \\ = \left(\frac{a^2b^2(b^4-a^4)}{a^4b^4(b^2-a^2)} + \frac{1-a^2}{a^2(a^2-1)} \right) (1-1+b^2) \\ = \left(\frac{(ab)^2(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{(ab)^4(b^2-a^2)} - \frac{a^2-1}{a^2(a^2-1)} \right) b^2 \\ = \left(\frac{(b^2+a^2)}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} \right) b^2 = \left(\frac{b^2+a^2-b^2}{a^2b^2} \right) b^2 \\ = \frac{a^2}{a^2b^2} \cdot b^2 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} = 1$$

$$2) \frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} + \frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}} - \frac{4x\sqrt{y}}{x^2-y} = \frac{(x+\sqrt{y})^2+(x-\sqrt{y})^2-4x\sqrt{y}}{(x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y})} \\ = \frac{x^2+2x\sqrt{y}+y+x^2-2x\sqrt{y}+y-4x\sqrt{y}}{x^2-y} = \frac{2x^2-4x\sqrt{y}+2y}{x^2-y} \\ = \frac{2(x^2-2x\sqrt{y}+y)}{x^2-y}$$

$$3) \sqrt[5]{\frac{a^4x^{-3}}{y^2}} : \sqrt[5]{\frac{x^2y^{-3}}{a}} + \sqrt[6]{\frac{b^4x^{-1}}{z^3}} : \sqrt[6]{\frac{x^5z^{-3}}{b^2}} = \frac{a}{x} \sqrt[5]{y} + \frac{b}{x}$$

$$4) \sqrt[15]{a^7} \cdot \sqrt[15]{a^3} + \sqrt[39]{a^{57}} : \sqrt[39]{a^{31}} = 2\sqrt[3]{a^2}$$

2.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el valor de: $A = x^2 \cdot 2^y \cdot 3^x \cdot y^3$, sabiendo que $x = 1$, $y = -2$

Resp.: $A = \frac{-2}{3}$

2. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $[m^{p+1} \cdot 2m^{p+2}] : 2m^{p-2}$

Resp.: $\frac{1}{4}m^{1-p}$

b) $\sqrt[4]{2p^3} \cdot \sqrt[4]{5p^7} \cdot \sqrt[4]{7p^6}$

Resp.: $\sqrt[4]{70}p^4$

3. Efectúe las operaciones indicadas, aplique producto notable cuando corresponda, y simplifique el resultado a su mínima expresión:

a) $(x+3)^3 - (3x+3)(3x+6) - 9 =$

Resp.: x^3

b) $(m^3 - m + m^2)(m^3 - m - m^2 + 1) =$

Resp.: $m^6 - 3m^4 - 3m^2$

c) $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2 =$

Resp.: 2

d) $\sqrt{2}((\sqrt{2}-1)^5 + 41)$

Resp.: 58

e) $\frac{2x}{x^2+3x+2} + \frac{x+4}{x^2-4} - \frac{2x-3}{x^2-x-2}$

Resp.: $\frac{x^2+10}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

f) $\frac{1-\frac{3}{x^2-1}}{1+\frac{1}{x+1}}$

Resp.: $\frac{x-2}{x-1}$

g) $(1 + \frac{2b^3}{a^3-b^3}) \cdot (\frac{a-b}{a+b}) : (1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b})$

Resp.: $\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}$

4. Reduzca a su mínima expresión:

a) $a\sqrt{b} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{a^2b} - \sqrt[4]{a^4b^2}$

Resp.: 0

b) $(3a-b)^2 - [5a-b - (-9a^2 + \frac{2}{3}ab - b^2)] + \frac{16}{3}ab + 5a$

Resp.: b

c) $(x^2 + x - 3)^2$

Resp.:

$x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$

5. Expresé las raíces como potencias de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[p]{\frac{2a}{5}}$

Resp.: $(2a)^{\frac{1}{p}}5^{\frac{-1}{p}}$

b) $\sqrt[ab]{(3xy)^{2a}}$

Resp.: $9^{\frac{1}{b}}(xy)^{\frac{2}{b}}$

6. Racionalice las expresiones siguientes:

a) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Resp.: $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

b) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^3b^2}}$

Resp.: $\sqrt[7]{a^4b^5}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Resp.: $2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}$

7. Determine cuáles de las siguientes expresiones son polinomios, en caso afirmativo señale el grado y el término independiente, en caso negativo señale el por qué:

a) $2\sqrt{x} + 2x^2 + 2$

Resp.: No, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

b) $1 - y^5$

Resp.: Si. 5. 1

c) $z^2 + 8z - \frac{9}{4}$

Resp.: Si. 2. $-\frac{9}{4}$

8. Dados los polinomios $R(x) = 6x^2 + x + 1$, $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$, $T(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5$.

Determine:

a) $-4T(x) + 2R(x) - 6S(x)$

Resp.: $3x^2 + 2x - 42$

b) $S(x) \cdot [R(x) - 4T(x)]$

Resp.: $\frac{1}{2}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 2x - 38$

9. Dados los polinomios:

$A = 3x^4 - 2x^2 + 6x^3 + 8$,

$B = 7x^2 - 4x + 11 - x^3$,

$C = -7x + 5x^3 + 3 - 2x^2$,

$D = x^2 - 4x^4 + 1 - 5x$

Determine:

$-\{A - [B - (C - D)]\}$

Resp.: $-7x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 1$

10. Efectúe las divisiones siguientes y en cada caso indique cociente y resto.

a) $(3x^5 - x^4 - 8x^3 - x^2 - 3x + 12) \div (3x^3 - x^2 + x - 4)$ Resp.: $(x^2 - 3)$
resto 0.

b) $(-6x^5 + 2x^4 - x + 10) \div (2x^3 + 2x - 1)$

Resp.: $-3x^2 + x + 3$

$R(x) = -5x^2 - 6x + 13$

c) $(12x^5 - \frac{5}{3} + x^3) : (6x^2 + 5 - 3x)$

Resp.: $2x^3 + x^2 - x - \frac{4}{3}$

$R(x) = x + 5$

11. Si las raíces reales de un polinomio $p(x)$ son -3 , $\frac{2}{5}$, 0 y 2 . Determine $p(x)$ y su grado.

Resp.: $p(x) = 5x^4 + 3x^3 - 32x^2 + 12$, grado 4.

12. Dados los polinomios: $p(x) = 17x^2 + 6x - 8$ y $d(x) = x + 2$, determine si $p(x)$ es divisible por $d(x)$, sin realizar la división y justificando claramente.
13. Encuentre un polinomio $p(x)$ tal que dividido por $x^2 - x + 1$, de como cociente $x + 2$ y como resto $x - 3$. Resp.: $p(x) = x^3 + x^2 - 1$
14. Factorice en $\mathbb{R}$
- a) $36a^4 + 24a^2 - 5$ Resp.: $(6a^2 + 5)(\sqrt{6}a + 1)(\sqrt{6}a - 1)$
 - b) $(y^2 + y - 2)^2 - (y^2 - y - 6)^2$ Resp.: $4(y + 2)^2 \cdot (y - 2)$
 - c) $a^2x^2 + x^2y^2 - x^2b + a^2y^2 + y^4 - y^2b - a^2 - y^2 + b$
Resp.: $(a^2 + y^2 - b) \cdot [x^2 + y^2 - 1]$
 - d) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ Resp.: $(3x - 2)^2$
 - e) $6x^{2m} - x^m - 15$ Resp.: $(3x^m - 5)(2x^m + 3)$
 - f) $ax + by - cz + bx + cy - az + cx + ay - bz$
Resp.: $(a + b + c)(x + y - z)$
 - g) $-27 + 64x^6$ Resp.: $(4x^2 - 3)(16x^4 + 12x^2 + 9)$
 - h) $20x^2 + 7x - 6$ Resp.: $(4x + 3)(5x - 2)$
 - i) $(a + b - 1)(a^2 + 1) - a^2 - 1$ Resp.: $(a^2 + 1)(a + b - 2)$
 - j) $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$ Resp.: $(a^2 - ax + x^2)[x - 2y]$
15. Por simple inspección, determine el cociente de:
 $(4a^4b^{12} - a^6b^{24}) : (2a^2b^6 - a^3b^{12})$ Resp.: $2a^2b^6 + a^3b^{12}$
16. Determine las raíces racionales de polinomio $p(x)$ y factorice en $\mathbb{R}$:
- a) $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 5x + 6$ Resp.: $2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$
 - b) $p(x) = 2x^5 - 15x^2 - 3x^4 - 32x - 12$ Resp.: $-1, -\frac{1}{2}, 3$
17. Determine el valor de k para que al dividir el polinomio $P(x) = 2x^2 + kx + 2$ por $(x - 2)$ el resto de la división sea 4. Resp.: $k = -3$

UNIDAD III ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

La Unidad de Ecuaciones algebraicas considera seis secciones fundamentales, de modo de capacitar al alumno para que: resuelva ecuaciones de primer grado y otras ecuaciones reducibles a ecuaciones de primer grado, caracterice situaciones problemáticas utilizando ecuaciones de primer grado y use un lenguaje matemático con rigurosidad lógica.

Se indican en cada sección definiciones, ejemplos, ejercicios desarrollados y/o propuestos, con el objeto que el alumno desarrolle la capacidad de expresar las ideas escritas en forma clara y precisa. Finaliza la unidad con ejercicios propuestos con su respectiva respuesta.

Las secciones donde se desarrollan los contenidos de esta unidad son:

1. Conceptos básicos.
2. Clasificación de las ecuaciones.
3. Principios fundamentales de las igualdades que permiten transformar las ecuaciones.
4. Ecuaciones con una incógnita
5. Ecuaciones fraccionarias reducibles a ecuaciones de primer grado.
6. Resolución de problemas de planteo.

Uno de los problemas más comunes que se presentan en el estudio de matemática es la resolución de diversas ecuaciones.

Para resolver ecuaciones debemos clarificar algunos conceptos básicos:

3.1. Conceptos Básicos

- **Igualdad:** Es la relación que establece que dos cantidades tienen el mismo valor. Se denota por el signo “=” que se lee “igual”.
- **Clases de igualdades:** Existen dos tipos:

- a) **Igualdad absoluta:** Llamada también **identidad o igualdad incondicional**, es aquella que se verifica para cualquier valor numérico que se le asigna a sus variables.

Ejemplos

1) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow (0 + 3)(0 - 3) = 0 - 9 \\ -9 = -9$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow (1 + 3)(3) = 1 - 9 \\ (4)(-2) = -8 \\ -8 = -8$$

2) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$\text{Si } x = 3 \text{ e } y = -1 \Rightarrow (3 + -1)^3 = 3^3 + 3(3)^2(-1) + 3(3)(-1)^2 + (-1)^3 \\ 2^3 = 27 - 27 + 9 - 1$$

$$8 = 8$$

- b) **Igualdad relativa o ecuación:** Llamada también **igualdad condicional**, es aquella que se verifica para algunos valores particulares atribuidos a sus incógnitas (usualmente las incógnitas se designan por las últimas letras del alfabeto).

Ejemplos

1) $x + 5 = 12$ se verifica para $x = 7$

2) $3x - 8 = 16$ se verifica para $x = 8$

3) $x^2 - 4x - 21 = 0$ se verifica para $x_1 = -3$, $x_2 = 7$.

$$(-3)^2 - 4(-3) - 21 = 9 + 12 - 21 = 0$$

$$7^2 - 4(7) - 21 = 49 - 28 - 21 = 49 - 49 = 0$$

3.2. Clasificación de las ecuaciones



Ecuaciones compatibles: Son aquellas que admiten solución.

Pueden ser:

- a) Ecuaciones compatibles determinadas: Cuando el número de soluciones es finita.

$$x + 6 = 15 \Rightarrow x = 9 \text{ es la solución.}$$

$$S = \{9\}.$$

- b) Ecuaciones compatibles indeterminadas: Cuando el número de soluciones es infinita.

$$x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{o } x = 7 - y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$S = \{(x, y) / y = 7 - x\}.$$

Son soluciones:

$$x = -1 \Rightarrow y = 7 - (-1) = 8 \quad \therefore (-1, 8) \in S$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 7 - 4 = 3 \quad \therefore (4, 3) \in S$$

 **Ecuaciones incompatibles (o absurdas):** Son aquellas que no admiten solución. ($S = \emptyset$)

$$x^2 + 5 = x^2 \Rightarrow S = \emptyset.$$

$$\nexists x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 = x^2 \Rightarrow 5 = 0 (\Rightarrow \Leftarrow)$$

 **Ecuaciones equivalentes:** Son aquellas que admiten las mismas soluciones. (Tienen el mismo conjunto solución)

$$3x + 12 = 27 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 4 = 9 \Rightarrow x = 5$$

$$x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$$

3.3. **Principios fundamentales de las igualdades que permiten transformar las ecuaciones**

1. Si a ambos miembros de una ecuación se suma o resta una misma expresión o un mismo número, resulta una ecuación equivalente a la primera.

$$\text{Sea } A = B \Rightarrow A \pm n = B \pm n$$

2. Si a ambos miembros de una ecuación se multiplica o divide una misma cantidad (diferente de cero), la igualdad no se altera.

$$\text{Sea } A = B \text{ y } n \neq 0 \Rightarrow A \cdot n = B \cdot n \text{ y } \frac{A}{n} = \frac{B}{n}$$

Observación

- 1) En una ecuación, cuando se dividen ambos miembros por un mismo factor en donde interviene la incógnita, es posible que se elimine una solución.
- 2) Si ambos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o se extrae una misma raíz, la ecuación que resulta es parcialmente equivalente a la primera (aparecen soluciones extrañas).

NOTA Se denomina solución extraña a aquella que se agrega o se pierde al realizar ciertas operaciones en una ecuación.

Otras generalidades:

- En una ecuación, para designar los coeficientes se usan las primeras letras del alfabeto y para las incógnitas se utilizan las últimas letras del alfabeto.
- Las expresiones que están a la izquierda y derecha del signo igual se llaman, respectivamente primer y segundo miembro de la ecuación.

$$\begin{array}{ccc} 5x - 8 & = & 2x + 7 \\ \text{Primer} & & \text{Segundo} \\ \text{miembro} & & \text{miembro} \end{array}$$

- Resolver una ecuación es determinar el o los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad. El conjunto solución es un conjunto que contiene a todas las soluciones de la ecuación.
Para determinar las soluciones se debe especificar el universo en el cual se resolverá la ecuación.
En nuestro estudio el universo será el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).
Como $\mathbb{R}$ es el conjunto numérico en el cual trabajaremos las ecuaciones, entonces los coeficientes serán números reales y los valores que pueden tomar las incógnitas serán también números reales.

De acuerdo con el número de incógnitas las ecuaciones se clasifican en ecuaciones con uno o más incógnitas.

3.4. Ecuaciones con una incógnita

Se pueden clasificar según el grado de la ecuación.

Grado de una ecuación: es el mayor exponente natural al cual está elevada la incógnita o variable.

Ejemplos

- Ecuación lineal o de primer grado:
 $ax + b = 0, a \text{ y } b \in \mathbb{R}.$
- Ecuación cuadrática o de segundo grado:
 $ax^2 + bx + c = 0, a, b \text{ y } c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$
- Ecuación cúbica o de tercer grado:
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0.$
- Ecuación de cuarto grado:
 $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{R}, a_4 \neq 0.$
- Ecuación polinómica de grado n:
 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$

Observación

La solución de una ecuación con una incógnita se llama también **raíz** o **cero** de la ecuación.

Número de soluciones de una ecuación:

Es posible demostrar que el número de soluciones de una ecuación, con una variable depende del grado de la ecuación.

Así: La ecuación de 1º grado tiene a lo más una solución.

La ecuación de 2º grado tiene a lo más dos soluciones.

La ecuación de 3º grado tiene a lo más tres soluciones.

3.4.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Es aquella que puede reducirse a la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Siendo a y b coeficientes, x la variable o incógnita.

Por ejemplo:

1) $2x + 5 = 0$

$$2) x - 8 = 0$$

$$3) (x + 7)(x - 3) = (x - 3)^2$$

que se reduce a $10x - 30 = 0$ ó $x - 3 = 0$

• Resolución de ecuaciones de primer grado.

Sea $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Se resuelve aplicando las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$.

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b) \quad /+(-b)$$

$$ax + (b + (-b)) = 0 + (-b) \quad \text{Asociar, propiedad 8 neutro e inverso.}$$

$$ax + 0 = (-b)$$

$$ax = -b \quad / \cdot \frac{1}{a}, a \neq 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

La solución es $x = -\frac{b}{a}$.

Discusión de la solución:

$$1) \text{ Si } a \neq 0, b \neq 0, \text{ se tiene } x = -\frac{b}{a}.$$

La solución existe y es única. Luego, el conjunto solución S es: $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

$$2) \text{ Si } a \neq 0, b = 0, \text{ se tiene } x = 0, \text{ luego } S = \{0\}.$$

Ejemplos

1) Determine el conjunto solución de la ecuación:

$3 + 2[x - (2x + 2)] = 2[x + (3x - 1)]$, se eliminan paréntesis y se reducen los términos semejantes.

$$3 + 2[-x - 2] = 2[4x - 1]$$

$$3 - 2x - 4 = 8x - 2$$

$$-2x - 8x + 2 - 4 + 3 = 0$$

$$-10x + 1 = 0$$

$$-10x = -1 \quad / \cdot (-1)$$

$$10x = 1$$

$$x = \frac{1}{10}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{1}{10}\right\}$$

2) Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{3}{5}(x - 4) - \frac{2}{3}(x - 5) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$$

Si procedemos en forma similar al ejemplo anterior se tiene:

$$\frac{3}{5}x - \frac{12}{5} - \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = \frac{2}{5} + \frac{12}{5} - \frac{10}{3}$$

Se factoriza

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)x = \frac{2}{5} + \frac{12}{5} - \frac{10}{3}$$

$$\frac{-17}{30}x = -\frac{8}{15} \quad / \cdot -\frac{30}{17}$$

$$x = \frac{16}{17}$$

$$S = \left\{\frac{16}{17}\right\}$$

Observación

La misma ecuación se puede resolver reduciendo los coeficientes fraccionarios a enteros, multiplicando la ecuación por el **m.c.m** de los denominadores.

$$\begin{aligned} 3) \quad (x+5)(x-2) &= (x-2)^2 \\ (x-2)^2 - (x+5)(x-2) &= 0 \\ (x-2)[(x-2) - x - 5] &= 0 \\ (x-2)[-7] &= 0 \end{aligned}$$

$$-7(x-2) = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

4) Resolver para x la ecuación literal:

$$a(3x+4a) + 5b^2 = b(9b+2x) + ax, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$$

$$3ax + 4a^2 + 5b^2 = 9b^2 + 2bx + ax$$

$$3ax - ax - 2bx = 9b^2 - 4a^2 - 5b^2$$

$$2ax - 2bx = 4b^2 - 4a^2$$

$$(2a - 2b)x = 4b^2 - 4a^2$$

$$x = \frac{4(b^2 - a^2)}{2(a - b)} = \frac{2(b - a)(b + a)}{(a - b)}$$

$$x = \frac{-2(a-b)(a+b)}{(a-b)}, a \neq b$$

$$x = -2(a+b)$$

5) Resolver para x , la ecuación literal:

$$\frac{x+m-n}{m} - \frac{(n+m)(n-m)}{mn} = \frac{x-m+n}{n}, \quad / mn \neq 0$$

$$(x+m-n)n - (n^2 - m^2) = m(x-m+n)$$

$$nx + mn - 2n^2 + m^2 = mx - m^2 + mn$$

$$nx - mx = -2m^2 + 2n^2$$

$$x(n-m) = 2(n^2 - m^2)$$

$$x = \frac{2(n-m)(n+m)}{(n-m)}, \quad n \neq m$$

$$x = 2(n+m)$$

3.5. Ecuaciones fraccionarias

Se denomina Ecuación fraccionaria a aquella que tiene la incógnita en el denominador.

3.5.1. Ecuaciones fraccionarias reducibles a ecuaciones de primer grado

Ejemplos

1. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{1}{3x-3} + \frac{1}{4x-4} + \frac{1}{6x-6} = 5$$

$$\frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{6(x-1)} = 5 \quad m.c.m. 12(x-1)$$

$$\frac{4+3+2}{12(x-1)} = 5$$

$$\frac{9}{12(x-1)} = 5 \quad \cdot 12(x-1) \text{ si } x \neq 1$$

$$9 = 60(x-1)$$

$$\frac{9}{60} = x-1$$

$$x = 1 + \frac{3}{20}$$

$$x = \frac{23}{20}$$

2. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{x+7}{x^2+8x+7} + \frac{x+1}{x^2-6x-7} = \frac{2x-14}{x^2-49}$$

$$\frac{x+7}{(x+7)(x+1)} + \frac{x+1}{(x-7)(x+1)} = \frac{2(x-7)}{(x-7)(x+7)} \quad x \neq 7, x \neq -1, x \neq 7$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-7} = \frac{2}{x+7} \quad m.c.m. (x+1)(x-7)(x+7)$$

$$(x-7)(x+7) + (x+1)(x+7) = 2(x+1)(x-7)$$

$$x^2 - 49 + x^2 + 8x + 7 = 2x^2 - 7 + 49$$

$$20x = 28$$

$$x = \frac{28}{20}$$

$$x = \frac{7}{5}$$

O bien,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-7} = \frac{2}{x+7}$$

$$\frac{x-7+x+1}{(x+1)(x-7)} = \frac{2}{x+7}$$

$$\frac{2x-6}{(x+1)(x-7)} = \frac{2}{x+7}$$

$$2(x-3)(x+7) = 2(x+1)(x-7)$$

$$x^2 + 4x - 21 = x^2 - 6x - 7$$

$$10x = 14$$

$$x = \frac{7}{5}$$

3. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{x+1}{x-1} + 4 = \frac{4x^2}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{x+1+4x-4}{x-1} = \frac{4x^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{5x-3}{x-1} = \frac{5x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$/\cdot (x-1)(x+1), x \neq 1, x \neq -1$$

$$(5x-3)(x+1) = 5x^2-2x+1$$

$$5x^2+5x-3x-3 = 5x^2-2x+1$$

$$5x - 3x + 2x = 1 + 3$$

$$4x = 4$$

$$x = 1 \quad \text{pero } x \neq 1$$

$$\therefore S = \emptyset$$

4. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{x} \right) = 1 - \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{x} \right)$$

$$\frac{a}{b} \left(\frac{x-a}{x} \right) = 1 - \frac{b}{a} \left(\frac{x-b}{x} \right)$$

$$\frac{ax - a^2}{bx} = \frac{ax - bx + b^2}{ax}, x \neq 0$$

$$a^2x^2 - a^3x = abx^2 - b^2x^2 + b^3x$$

$$x(a^2x - a^3 - abx + b^2x - b^3) = 0$$

$\therefore$

$$i) \quad x = 0 \quad (\text{no es solución})$$

$$ii) \quad a^2x - a^3 - abx + b^2x - b^3 = 0$$

$$x(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$x = \frac{a^3 + b^3}{(a^2 - ab + b^2)}$$

$$x = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\therefore x = a + b$$

3.6. Resolución de problemas de planteo

Las ecuaciones se usan con frecuencia en la resolución de problemas de aplicación a otros campos, es por esto que el estudiante de asignaturas de matemática no sólo debe adquirir la habilidad operatoria sino que además debe ser capaz de expresar en términos matemáticos los problemas prácticos, no expresados con enunciado matemático. Es decir, debe ser capaz de plantear problemas en forma matemática para luego resolverlos.

En la resolución de problemas se debe tener presente el siguiente procedimiento, aunque no siempre se realicen todos los pasos.

- a) Leer cuidadosamente el problema con el fin de que quede clara la situación que se plantea.
- b) Identificar la o las incógnitas del problema y darle nombres: x , y , z , etc.
- c) Hacer un diagrama, si el problema lo permite, identificando los datos conocidos y las incógnitas.
- d) Traducir las condiciones a ecuaciones que contengan las incógnitas escogidas.
- e) Resolver la o las ecuaciones planteadas.
- f) Verificar si las soluciones cumplen las condiciones establecidas.
- g) Dar la respuesta al problema planteado.

En este curso veremos diferentes tipos de problemas de aplicación que se resolverán aplicando lo señalado en el párrafo anterior.

3.6.1. Problemas que se resuelven mediante una ecuación de primer grado.

Problema 1.

El triple de un número aumentado en 10 es igual al cuádruple del número disminuido en 5. ¿Cuál es el número?

Desarrollo:

- 1) Se lee el problema, se identifica la variable y se le asigna un nombre.
Sea x el número.
- 2) Se traducen los datos del problema al lenguaje matemático:
Así: El triple de un número se escribe : $3x$
El cuádruple del número se escribe: $4x$
El triple de un número aumentado en 10 es : $3x + 10$
El cuádruple del número disminuido en 5 es: $4x - 5$
- 3) Se plantea la ecuación de acuerdo a los datos del problema:
 $3x + 10 = 4x - 5$
- 4) Se resuelve la ecuación, obteniendo $x = 5$, Luego $S = \{5\}$.
- 5) Se verifica si la solución de la ecuación cumple las condiciones que indica el problema.

6) Finalmente se da respuesta al problema planteado.

Respuesta: El número es **cinco** ($x=5$).

Problema 2.

La suma de tres números naturales impares consecutivos es 99. ¿Cuáles son los números?

Desarrollo:

- 1) Se lee el problema, se identifican las variables y se le asignan nombres.
Los tres números impares consecutivos se escriben en la forma: $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$ donde n es la incógnita.
- 2) Se plantea la ecuación: $(2n-1) + (2n+1) + (2n+3) = 99$
- 3) Se resuelve la ecuación: $6n+3 = 99 \rightarrow n=16$.
Luego **solución de la ecuación** es $S = \{16\}$, que no es solución al problema planteado.
- 4) Se determinan los números naturales impares consecutivos :
 $2n-1 = 2 \cdot 16 - 1 = 32 - 1 = 31$
 $2n+1 = 2 \cdot 16 + 1 = 32 + 1 = 33$
 $2n+3 = 2 \cdot 16 + 3 = 32 + 3 = 35$
- 5) Finalmente se formula la respuesta al problema planteado.
Respuesta: Los números impares consecutivos son: 31, 33 y 35.

Ejercicio

Resuelva el problema que se plantea, aplicando lo señalado anteriormente.

Una persona distribuye su presupuesto en la siguiente forma: $\frac{5}{12}$ en alimentación, $\frac{1}{4}$ en arriendo, $\frac{1}{6}$ en agua y el resto lo ahorra para emergencias. ¿Qué fracción del total ahorra? Si el sueldo mensual es de \$ 336.000 ¿Cuánto ahorra?

3.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el valor de x en cada ecuación, exprese su respuesta simplificada:

a) $2 - \left[-2(x+1) - \frac{x-3}{2} \right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} - 3x$ Resp.: $x = 3$

b) $\frac{2}{3} \left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3} \right) \right] + 1 = x$ Resp.: $x = -1$

c) $\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} = -\frac{5x+4}{14} + \frac{7x}{6}$ Resp.: $x = \frac{1}{4}$

d) $\frac{x^2+2x+1}{x+1} + \frac{x-1}{x+3} = \frac{x^3}{x^2+2x+15} + \frac{3}{2x^2-4x-30}$ Resp.: $x = -\frac{1}{2}$

e) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{3} - \frac{3}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{3x+5}}$ Resp.: $x = -\frac{45}{16}$

f) $\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{x} \right) + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{x} \right) = 1$ Resp.: $x = a + b$

g) $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2} - \frac{a-x}{ax-x^2-a^2} = \frac{3}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$; con $x \neq 0$ Resp.: $x = \frac{3}{2a^3}$

2. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) \cdot \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right) = \frac{\left(x-3 + \frac{5x}{2x-6} \right)x}{2x-1 + \frac{15}{x-3}}$$
 Resp.: $S = \emptyset$

3. Resuelva los siguientes problemas, que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita:

a) Dividir 184 en tres partes tales que la segunda sea el duplo de la primera y la suma de las dos primeras exceda a la tercera en 20. Determine el valor de cada parte. Resp: El valor de cada parte es: 34, 68 y 82.

b) En un triángulo ABC, el ángulo con vértice en B mide 30° menos que el ángulo con vértice en C y el ángulo con vértice en A mide 30° menos que el ángulo con vértice en B. Determine la medida de cada uno de los ángulos.

Resp: (A = 30° , B = 60° , C = 90°)

c) Si una persona gasta las tres quintas partes de su sueldo mensual, cuando han transcurrido las dos terceras partes del mes. Considerando que mantiene el mismo patrón de gasto, ¿con qué fracción de su sueldo se quedará al final de un mes que tiene 30 días? Resp: Se queda con $\frac{1}{10}$ de su sueldo

UNIDAD IV ECUACIONES LINEALES

La Unidad de Ecuaciones lineales considera seis secciones fundamentales, de modo de capacitar al alumno para que: resuelva ecuaciones de primer grado en dos variables, resuelva sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, interprete geoméricamente soluciones, plantee y resuelva problemas en que aplique los conceptos y operatoria aritmética y algebraica.

Se indican en cada sección definiciones, ejemplos, ejercicios desarrollados y/o propuestos, con el objeto que el alumno desarrolle la capacidad de expresar las ideas escritas en forma clara y precisa. Finaliza la unidad con ejercicios propuestos con su respectiva respuesta.

Las secciones donde se desarrollan los contenidos de esta unidad son:

1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas
2. Método para determinar el conjunto solución
3. Interpretación geométrica de una ecuación lineal con dos incógnitas
4. Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas
5. Aplicación a otros sistemas de ecuaciones simultáneas
6. Problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Son aquellas de la forma $ax + by = c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$ y x e y son las incógnitas o variables.

La solución de la ecuación $ax + by = c$ es el conjunto de pares ordenados (p, q) de números reales que al reemplazar en la ecuación x por p e y por q se obtiene una igualdad.

Ejemplo: Dada la ecuación $3x - 2y = 7$, los pares ordenados $(-1, -5)$, $(0, -\frac{7}{2})$, $(5, 4)$ son algunas soluciones de la ecuación, puesto que:

- i) Si $x = -1$ e $y = -5$ se tiene $3(-1) - 2(-5) = 7$. Entonces $(-1, -5)$ es solución de $3x - 2y = 7$.
- ii) Si $x = 0$ e $y = -\frac{7}{2}$, se tiene $3(0) - 2(-\frac{7}{2}) = 0 + 7 = 7$. Entonces $(0, -\frac{7}{2})$ es solución de $3x - 2y = 7$.

- iii) Si $x = 5$ e $y = 4$ se tiene que $3(5) - 2(4) = 15 - 8 = 7$. Entonces $(5,4)$ es solución de $3x - 2y = 7$.

4.2. Método para determinar el conjunto solución

El conjunto solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es el conjunto formado por todos los pares ordenados (p, q) que verifican la ecuación.

Notación: $S = \{(p, q)\}$

El conjunto solución de una ecuación lineal con dos incógnitas, consiste en despejar una de las variables y darle valores a la otra.

De la ecuación general $ax + by = c$, si despejamos y , se tiene

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

En este caso, se dice que hemos expresado " y " en función de " x ", x se llama variable independiente e y variable dependiente.

También se puede despejar x en función de y , quedando:

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Siendo en este caso y la variable independiente y x la variable dependiente.

Una ecuación lineal con dos incógnitas, tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 1

En la ecuación $3x - 2y = 7$ tenemos que

$$y = \frac{3x - 7}{2}$$

x : variable independiente.

y : variable dependiente (depende de valores de x).

Luego, el conjunto solución es:

$$S = \left\{ (x, y) / y = \frac{3x - 7}{2} \right\} \text{ ó}$$

$$S = \left\{ \left(x, \frac{3x-7}{2} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

Efectivamente los pares ordenados indicados anteriormente pertenecen a este conjunto solución.

$$(-1, -5) \in S, \left(0, -\frac{7}{2} \right) \in S, (5, 4) \in S$$

Observación

El conjunto S es un conjunto infinito, puesto que en él están las infinitas soluciones de $3x - 2y = 7$.

Ejemplo 2

Dada la ecuación $4x + y = 1$

- i) Determine el conjunto solución de la ecuación.

Desarrollo: despejamos y obteniendo $y = 1 - 4x$

$$\therefore S = \{(x, 1 - 4x) / x \in \mathbb{R}\}$$

- ii) Determine tres pares ordenados que sean solución de la ecuación.

Desarrollo:

Si $x = 1$, entonces $y = 1 - 4(1) = -3$.

$$\therefore (1, -3) \in S.$$

Si $x = 0$, entonces $y = 1 - 4(0) = 1$.

$$\therefore (0, 1) \in S.$$

Si $x = -3$, entonces $y = 1 - 4(-3) = 13$.

$$\therefore (-3, 13) \in S.$$

- iii) Indique tres pares ordenados que no sean solución de la ecuación.

Desarrollo:

$$a) \quad x = 8, y = 2 \Rightarrow 4(8) + 2 = 32 + 2 = 34 \neq 1$$

Otra forma de verificar si es solución o no es:

$$y = 1 - 4x$$

$$2 = 1 - 4 \cdot 8$$

$2 = -31 \Rightarrow$ es falso, ya que $2 \neq -31$.

$\therefore (8,2) \notin S$.

b) $x = 0, y = -3$

$$y = 1 - 4x$$

$$-3 = 1 - 4 \cdot 0$$

$$-3 = 1, \text{ falso.}$$

$\therefore (0, -3) \notin S$

c) $x = -5, y = 13$

$$13 = 1 - 4(-5)$$

$$13 = 21, \text{ Falso.}$$

$\therefore (-5,13) \notin S$

4.3. Interpretación geométrica de una ecuación lineal con dos incógnitas

El gráfico de una ecuación lineal en dos variables es el conjunto de todos los puntos del plano correspondiente a los pares ordenados (x,y) que son elementos del conjunto solución de la ecuación dada.

El gráfico de la ecuación $ax + by = c$ es una recta. Por lo tanto, todo par ordenado que corresponde a un punto de la recta es solución de la ecuación y toda solución debe corresponder a un punto de la recta.

Dado que una recta se determina si se conocen dos puntos diferentes cualquiera de ellas, para trazar la gráfica de una recta basta con encontrar dos puntos diferentes de ésta.

Dos puntos útiles al trazar la gráfica de rectas, son las intersecciones con los ejes coordenados X e Y .

- La intersección con el eje X es el punto (si existe) en que la recta cruza el eje X . Para determinar esta intersección se sustituye y por cero ($y = 0$) en la ecuación.
- La intersección con el eje Y es el punto (de haberlo) en que la recta cruza el eje Y . Para determinar esta intersección se sustituye x por cero ($x = 0$) en la ecuación.

Ejemplo

Determinar la intersección de $4x - y = -3$ con los ejes X e Y .

La intersección con el eje X se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación, quedando:

$$4x - 0 = -3$$

$$4x = -3$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Así la intersección con el eje X es:

$$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

Para la intersección con el eje Y hacemos $x = 0$ en la ecuación, quedando:

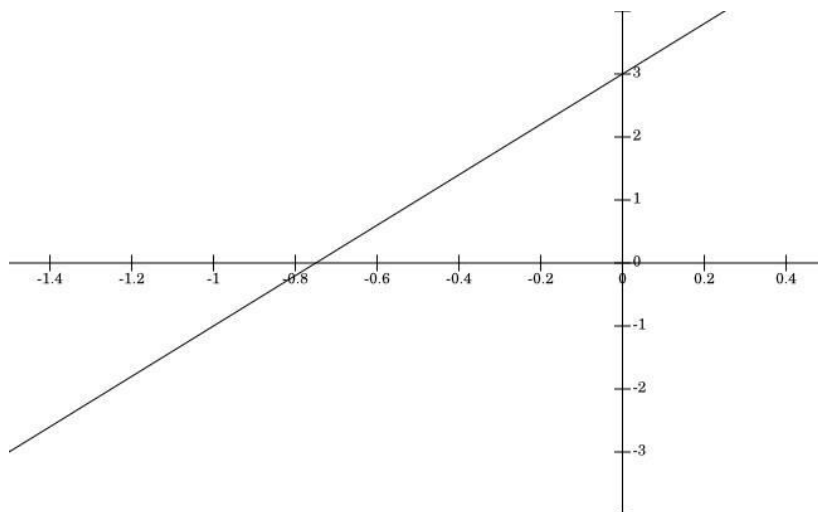
$$4 \cdot 0 - y = -3$$

$$-y = -3$$

$$y = 3$$

Así la intersección con el eje Y es $(0,3)$.

La gráfica es



La recta $4x - y = -3$

Ejercicio

Represente gráficamente las siguientes ecuaciones lineales y determine tres soluciones.

1) $3x - 2y = 7$

2) $4x + y = 1$

3) $3x = 6$

4) $y = 5$

4.4. Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas

En muchos problemas es necesario resolver varias ecuaciones lineales simultáneamente. En estos problemas se buscan las soluciones comunes a todas ellas.

También resultan muy útiles en Geometría, puesto que una ecuación lineal representa una recta en el plano.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables es equivalente a estudiar la posición relativa de estas rectas.

- **Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es de la forma.

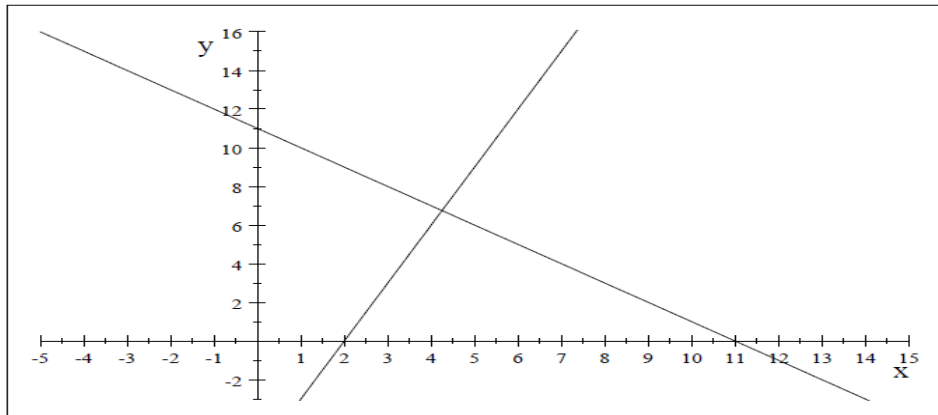
$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1, \quad \text{donde } a_1 \neq 0 \text{ ó } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2, \quad \text{donde } a_2 \neq 0 \text{ ó } b_2 \neq 0 \end{array} \right\}$$
$$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \quad \text{con } i = 1, 2.$$

4.4.1. Interpretación gráfica

La gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta. Luego, existen tres posibilidades para la solución de un sistema con dos variables, como se aprecia en las figuras siguientes:

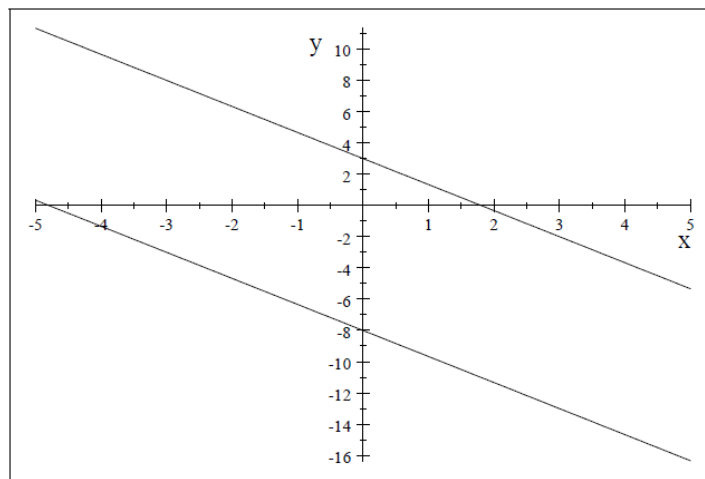
Ejemplos

a) $\left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{array} \right\}$



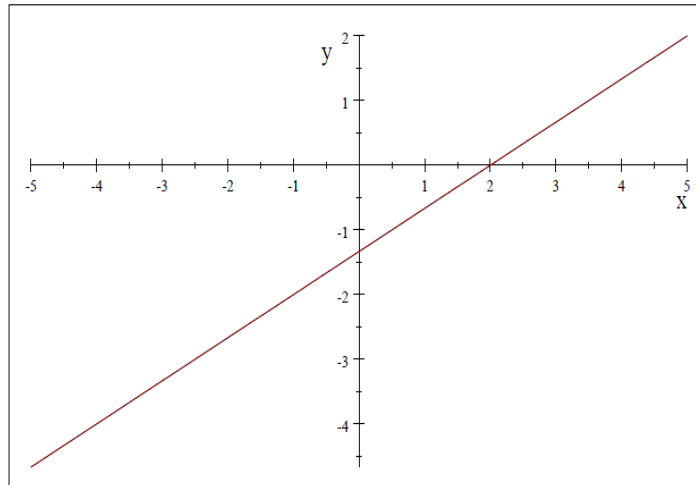
Las dos rectas se intersectan en un solo punto. Las coordenadas de este punto son la solución del sistema.

$$\text{b) } \begin{cases} 25x + 15y = 45 \\ -5x - 3y = 24 \end{cases}$$



Las rectas son paralelas. En este caso el sistema es inconsistente. Esto es, no hay punto común de intersección de las rectas. El sistema no tiene solución.

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6y - 4x = -8 \end{cases}$$



Las rectas coinciden (son una sola recta). En este caso las ecuaciones son *dependiente*. Esto es, todo punto de una recta es también punto de la otra. El sistema tiene infinitas soluciones.

Es posible encontrar la solución de un sistema por medio de gráficas. Sin embargo, como puede ser difícil determinar de manera exacta las coordenadas de un gráfico, por lo general se utiliza un método algebraico para resolver el sistema.

4.4.2. Métodos de resolución

Los métodos más usuales de eliminación de una incógnita son: Igualación, sustitución y reducción.

- **Método de Igualación:** Consiste en despejar la misma incógnita en cada ecuación y luego igualar los valores obtenidos.

Ejemplo

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Como los coeficientes de y en ambas ecuaciones son 1 y -1, despejamos y , obteniéndose

$$\begin{cases} y = 11 - x \\ y = 3x - 5 \end{cases}$$

Luego igualamos los valores de y , resolviendo para x

$$\begin{aligned} 11 - x &= 3x - 5 \\ 4x &= 16 \end{aligned}$$

$$x = 4$$

Finalmente, reemplazamos $x = 4$ en cualquiera de las dos ecuaciones. Así,

$$y = 11 - x \Rightarrow y = 11 - 4 \Rightarrow y = 7.$$

$$\therefore S = \{(4,7)\}$$

- **Método de Sustitución:** Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

Ejemplo

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

En la primera ecuación elegimos despejar x , teniendo $x = 11 - y$.

Luego, sustituimos $x = 11 - y$ en la segunda ecuación, obteniendo

$$3(11 - y) - y = 5$$

$$33 - 3y - y = 5$$

$$33 - 5 = 4y$$

$$\frac{28}{4} = y$$

$$\therefore y = 7.$$

$y = 7$, se reemplaza en la primera ecuación o en $x = 11 - y$.

Así obtenemos:

$$x = 11 - 7 = 4.$$

Finalmente la solución es $S = \{(4,7)\}$

- **Método de Reducción:** Consiste en igualar los coeficientes de las incógnitas que se quiere eliminar (o reducir) y luego se suman o restan ambas ecuaciones.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Como las y ya están igualadas, podemos sumar para eliminar esa variable, obteniendo:

$$4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

Luego, se reemplaza $x = 4$ en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de y .

Si consideramos la segunda ecuación, tenemos

$$y = 3x - 5$$

De donde

$$y = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$$

$$\therefore S = \{(4,7)\}.$$

Observación

Otra forma de proceder es igualar los coeficientes de x para eliminar esta variable.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{array} \right\}$$

Multiplicando la primera ecuación por (-3) se tiene:

$$\begin{array}{r} -3x - 3y = -33 \\ 3x - y = 5 \\ \hline -4y = -28 \\ y = 7 \end{array}$$

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por el método indicado.

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 14 \\ 9x - y = 67 \end{array} \right\} \quad \text{Igualación.} \quad S = \{(8,5)\}$$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 6 \\ \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = 2 \end{array} \right\} \quad \text{Sustitución.} \quad S = \{(10,8)\}$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{3}{4}(x - 1) + \frac{5}{3}(y - 2) = 34 \\ \frac{5}{3}(x + 2) - \frac{3}{5}(y + 3) = 13 \end{array} \right\} \quad \text{Reducción.} \quad S = \{(13,17)\}$$

4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} &= 1 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{4} &= -9 \end{aligned} \right\} \text{Igualación.} \quad S = \{(-12,0)\}$$

4.4.3. Clasificación de los sistemas lineales

El sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una única solución, como en el ejemplo anterior. Pero también hay sistemas que no tienen solución y hay otros que tienen infinitas soluciones.

De acuerdo a las soluciones de un sistema podemos clasificarlos en:

a) **Sistema compatible:** Es el sistema que tiene solución.

a.1. Sistema compatible independiente: Es el sistema que tiene una única solución. Se llama independiente porque las ecuaciones son independientes entre sí, es decir, una ecuación no se puede obtener de la otra.

Ejemplo

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 11 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned} \right\} \text{Cuya solución es } S = \{(4,7)\}$$

a.2. Sistema compatible dependiente: Es el sistema que tienen infinitas soluciones. Se llama dependiente porque una ecuación se puede obtener de la otra.

Ejemplo

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 3 \\ 4x - 4y &= 12 \end{aligned} \right\} \text{Vemos que la segunda ecuación es la primera multiplicada por 4.}$$

Luego, podemos obtener la primera ecuación, dividiendo la segunda ecuación por 4.

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 3 \\ \frac{4}{4}x - \frac{4}{4}y &= \frac{12}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_1: x - y &= 3 \\ E_2: x - y &= 3 \end{aligned}$$

∴ El sistema tiene dos ecuaciones iguales.

Al usar el método de reducción, restando ambas ecuaciones nos queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 - E_2 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \text{ que es una verdad, } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto el conjunto solución del sistema es el conjunto solución de la ecuación $x - y = 3$. Se sabe que la ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, luego el sistema dado tiene infinitas soluciones y es:

$$S = \{(x, x - 3) / x \in \mathbb{R}\}$$

- b) **Sistema incompatible:** Es el sistema que no tiene solución. Es decir, si S_1 es el conjunto solución de una ecuación y S_2 es el conjunto solución de la otra ecuación, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Al tratar de resolver el sistema por los métodos algebraicos llegaremos a una contradicción.

Ejemplo

El sistema $\left. \begin{array}{l} 3x - y = 8 \\ 6x - 2y = 5 \end{array} \right\}$ es incompatible.

Para resolver el sistema, multiplicamos por 2 la primera ecuación para igualar los coeficientes de x :

$$\left. \begin{array}{l} 6x - 2y = 16 \\ 6x - 2y = 5 \end{array} \right\}, \text{ restamos la segunda ecuación de la primera}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x - 2y = 16 \\ 0 = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \Leftarrow$$

Como la segunda ecuación es FALSA, entonces no existen valores x e y que satisfagan ambas ecuaciones, luego $S = \emptyset$.

Ejercicio Resolver analítica y gráficamente los sistemas que se indican, clasificándolos de acuerdo a su conjunto solución.

$$1) \quad \begin{cases} 3x - y = -2 \\ -6x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -8x + 4y = 2 \end{cases}$$

4.5. Aplicación a otros sistemas de ecuaciones simultáneas

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

Podemos transformar las ecuaciones dadas a lineales, para ello utilizaremos incógnitas auxiliares.

Sean $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, entonces el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 3u + 5v = 2 \\ 9u - 10v = 1 \end{cases}$$

Y se resuelve por algún método de eliminación, obteniendo

$$\begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ de donde } x = 3, y = 5 \quad \therefore S = \{(3,5)\}$$

- Otras aplicaciones

Ejemplo 1

Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{x+5} - \frac{6}{y-2} = \frac{4}{3} \\ \frac{3}{x+5} + \frac{18}{y-2} = \frac{7}{2} \end{array} \right\}$$

Desarrollo:

$$\text{Sean } \frac{1}{x+5} = u, \quad \frac{1}{y-2} = v$$

Entonces el sistema nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4u - 6v = \frac{4}{3} \\ 3u + 18v = \frac{7}{2} \end{array} \right\}$$

Multiplicando por 3 para eliminar v , tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 12u - 18v = 4 \\ 3u + 18v = \frac{7}{2} \end{array} \right\}$$

$$15u = \frac{15}{2} \quad / \cdot \frac{1}{15}$$

$$u = \frac{1}{2}$$

Y sustituyendo el valor de u en cualquiera de las dos ecuaciones, obtenemos:

$$v = \frac{12u - 4}{18} \Rightarrow v = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} - 4}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

De donde,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x+5} \Rightarrow x+5 = 2 \Rightarrow x = -3$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{y-2} \Rightarrow y-2 = 9 \Rightarrow y = 11$$

$$\therefore S = \{(-3, 11)\}$$

Ejemplo 2

Para resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3} \\ x+y = 20 \end{array} \right\}$$

Aplicamos propiedad de las proporciones

$$\left. \begin{array}{l} 3(x+y) = 5(x-y) \\ x+y = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x+3y = 5x-5y \\ x+y = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x+8y = 0 \\ x+y = 20 \end{array} \right\}$$

Obteniendo así un sistema lineal equivalente al original, que resolvemos por cualquier método.

Se tiene así:

$$x = 16, y = 4$$

$$\therefore S = \{(16,4)\}$$

Ejercicios

Resuelva los siguientes sistemas no lineales:

$$1) \left. \begin{array}{l} \frac{13}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{9}{x} - \frac{7}{y} = \frac{13}{2} \end{array} \right\} \quad S = \{(3, -2)\}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \frac{20}{x+2} + \frac{30}{y-17} = -2 \\ \frac{2}{x+2} + \frac{3}{y-17} = -\frac{1}{5} \end{array} \right\} \quad S = \left\{ \left(x, \frac{2x+174}{x+12} \right) \right\}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \frac{3x+10y}{2x+3y} = 3 \\ \frac{x-2}{y+2} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \quad S = \emptyset$$

4.6. Problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales

Plantear problemas en un lenguaje matemático se hace más fácil, en muchos casos, si los llevamos a un sistema de ecuaciones.

Ejemplos

- 1) En un corral hay gallinas y ovejas, los animales tienen 60 cabezas y 150 patas
¿Cuántas gallinas y cuántas ovejas hay en el corral?

Solución:

x : Cantidad de gallinas $\Rightarrow 2 \cdot x$: cantidad de patas de gallinas

y : Cantidad de ovejas $\Rightarrow 4 \cdot y$: cantidad de patas de ovejas.

Según los datos

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ 2x + 4y = 150 \end{array} \right\}$$

Resolviendo por el método de sustitución tenemos

$y = 60 - x$, luego sustituyendo en la segunda ecuación tenemos

$$2x + 4(60 - x) = 150$$

$$2x + 240 - 4x = 150$$

$$240 - 150 = 2x$$

$$90 = 2x$$

$$45 = x$$

Entonces

$$y = 60 - 45$$

$$y = 15$$

Respuesta: En el corral hay 45 gallinas y 15 ovejas.

- 2) Una madre tiene dos hijas, la hija mayor tiene el doble de la edad de la menor más 4 años y la diferencia entre la edad de la mayor y la menor es 19. ¿Qué edad tenía la hija mayor cuando nació la menor?.

Solución:

Sea

x : Hija mayor

y : Hija menor

Según los datos, tenemos

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ x - y = 19 \end{cases}$$

Si resolvemos, usando método de sustitución nos queda

$$\begin{aligned} x - y &= 19 \\ (2y + 4) - y &= 19 \\ 2y - y &= 19 - 4 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Reemplazando en la primera ecuación

$$x = 2 \cdot 15 + 4$$

$$x = 34$$

Respuesta: La edad de la hija mayor es 34y la de la menor es 15.

Por lo tanto, hace quince años la hija mayor tenía 19 años.

- 3) Hace 20 años la edad del padre era 8 veces la del hijo y en 10 años más, la edad del hijo es la mitad de la del padre. Halle la edad actual.

Solución:

Sea

x : edad actual del padre

y : edad actual del hijo

Entonces hace veinte años

El padre tenía: $x - 20$

El hijo tenía: $y - 20$

Entonces:

$$x - 20 = 8(y - 20)$$

Y en 10 años más

El padre tendría: $x + 10$

El hijo tendría: $y + 10$

Luego

$$(x + 10) = 2(y + 10)$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones

$$\begin{cases} x - 20 = 8(y - 20) \\ x + 10 = 2(y + 10) \end{cases}$$

Por el método de igualación se tiene

$$8(y - 20) + 20 = 2(y + 10) - 10$$

$$8y - 160 + 20 = 2y + 20 - 10$$

$$6y = 10 + 140$$

$$y = \frac{150}{6}$$

$$y = 25$$

$$\text{Luego } x - 20 = 8(25 - 20)$$

$$x = 8 \cdot 5 + 20 \Rightarrow x = 60$$

Respuesta: El padre tiene 60 años y el hijo tiene 25 años.

- 4) Si al doble de mi edad le restas 5 años, obtienes la edad de mi papá. Si a mi edad le sumas 17 años y a la de mi papá le restas 17 años, obtienes el mismo número. Puedes saber cuántos años tengo y cuantos tiene mi papá?.

Solución:

Sea

x : mi edad

y : edad de mi papá

Según los datos se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ x + 17 = y - 17 \end{cases}$$

Resolución: Si usamos el método de sustitución, " y " de la primera ecuación se reemplaza en la segunda:

$$x + 17 = (2x - 5) - 17$$

Resolviendo, se tiene $x = 39$

Reemplazando en la primera ecuación se tiene que $y = 73$

Respuesta: mi edad es de 39 años y la de mi papá es de 73 años.

- 5) Aumentando 3 al numerador de una fracción y restando 2 al denominador, la fracción se convierte en $\frac{6}{7}$, pero si se resta 5 al numerador y se agrega 2 al denominador, la fracción equivale a $\frac{2}{5}$. Hallar la fracción.

Planteo: Sea x el numerador e y el denominador.

$$f = \frac{x}{y}$$
$$\Rightarrow \frac{x+3}{y-2} = \frac{6}{7} \quad \text{pero} \quad \frac{x-5}{y+2} = \frac{2}{5}$$

Ecuaciones: $\left. \begin{array}{l} \frac{x+3}{y-2} = \frac{6}{7} \\ \frac{x-5}{y+2} = \frac{2}{5} \end{array} \right\}$ luego:

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 21 = 6y - 12 \\ 5x - 25 = 2y + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x - 6y = -33 \\ 5x - 2y = 29 \end{array} \right\} / \cdot (-3) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x - 6y = -33 \\ -15x + 6y = -87 \end{array} \right\}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $-8x = -120$

$$\therefore x = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{5x - 29}{2} = y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{75 - 29}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

Respuesta: La fracción es: $f = \frac{15}{23}$

- 6) Un padre le dice a su hijo: Hace 6 años tu edad era $\frac{1}{5}$ de la mía; dentro de 9 años será los $\frac{2}{5}$. Hallar ambas edades actuales.

Planteo:

	Hace 6 años	Edad Actual	En 9 años
Edad del hijo	$x - 6$	x	$x + 9$
Edad del padre	$y - 6$	y	$y + 9$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{5}(y - 6) = x - 6 \\ \frac{2}{5}(y + 9) = x + 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - 6 = 5x - 30 \\ 2(y + 9) = 5x + 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - y = 24 \\ 5x - 2y = -27 \end{array} \right\}$$

Multiplicando por (-2) la primera ecuación eliminamos y , así: $-5x = -75$, $x = 15$

$$\therefore y = 5x - 24 \Rightarrow y = 75 - 24 \Rightarrow y = 51$$

Solución: La edad actual del padre es 51 años y la del hijo es 15 años.

4.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelva para x e y , los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{2} = 0 \\ \frac{x+2y}{3} - \frac{x+y+2}{4} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Resp: } S = \left\{ \left(-\frac{13}{7}, \frac{11}{7} \right) \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{b} - y = a - b \\ \frac{x}{a} + y = 2b \end{array} \right\} \quad \text{Resp: } S = \{(ab, b)\}$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} ax + by = 2a^2 - 3b^2 \\ x + 2y = 2a - 6b \end{array} \right\} \quad \text{Resp.: } S = \{(2a, -3b)\}$$

$$\text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 0,5x + 0,2y = 0,1 \\ 0,2x - 0,5y = 0,2 \end{array} \right\} \quad \text{Resp.: } S = \left\{ \left(\frac{9}{29}, -\frac{8}{29} \right) \right\}$$

2. Resuelva los siguientes problemas:

- a) Una plancha rectangular de cobre de perímetro 92cm se usa para hacer una caja sin tapa. Para ello se corta un cuadrado de 5cm de cada lado en cada esquina y se sueldan los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la plancha utilizada si el volumen de la caja es de 845cm^3 ?

Resp: Los lados son de 23 cm cada uno.

- b) Determine el área de un rectángulo, sabiendo que: Su perímetro es de 24 cm y su base es el triple de su altura.

Resp: El área del rectángulo mide 27 cm

- c) La edad de una mujer era hace 10 años cinco veces la de su hija, y dentro de 11 años será solamente el doble. ¿Qué edades tienen actualmente?

Resp: La edad de la madre es 45 años y la de la hija de 17 años

- d) Expresa la ecuación que traduce la siguiente situación: Tener \$42000 en billetes de \$2000 y de \$5000. Determine dos soluciones posibles.

Resp: La ecuación es: $2000x + 5000y = 42000$

Algunas soluciones son: (1,8), (6,6), (11,4), (16,2).

UNIDAD V ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

La Unidad de Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita contiene cinco secciones fundamentales, de modo de capacitar al alumno para que: resuelva ecuaciones de segundo grado, ecuaciones reducibles a ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones no lineales y caracterice situaciones problemáticas que se resuelven mediante éstas ecuaciones.

En cada sección se indican definiciones, ejemplos y ejercicios desarrollados. Finaliza la unidad con ejercicios propuestos con su respectiva respuesta.

Las secciones donde se desarrollan los contenidos de esta unidad son:

1. Ecuación cuadrática.
2. Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de segundo grado.
3. Problemas de aplicación a ecuaciones de segundo grado.
4. Algunas ecuaciones no lineales reducibles a ecuaciones de segundo grado.
5. Algunos sistemas de ecuaciones no lineales.

5.1. Ecuación Cuadrática

La forma general de la ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0 ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

5.1.1. Soluciones o raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Completando cuadrados

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observación

1) La cantidad subradical: $b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

2) La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos

1) $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-15)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\therefore S = \{-3, 5\}$$

2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

Comprobación:

$$2(1) - 3(1) + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$3) \quad x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

$$x_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

Soluciones complejas.

Observación En $\mathbb{R}$ la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene solución.

$$4) \quad 9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(9)(4)}}{18} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12 \pm 0}{18}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$\therefore \frac{2}{3}$ es raíz de multiplicidad 2.

$$\therefore S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

5.1.2. Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática

La naturaleza de las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, depende del discriminante $D = b^2 - 4ac$.

Las soluciones son:

- a) Reales y distintas si $b^2 - 4ac > 0$.
- b) Reales e iguales si $b^2 - 4ac = 0$.
- c) Complejas y conjugadas si $b^2 - 4ac < 0$.

En efecto:

Como las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces:

- a) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real mayor que cero y por lo tanto r_1 y r_2 son números reales distintos.
- b) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + 0}{2a} & y & & r_2 &= \frac{-b - 0}{2a} \\ r_1 &= \frac{-b}{2a} & y & & r_2 &= \frac{-b}{2a} \Rightarrow r_1 = r_2 \end{aligned}$$

- c) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un complejo imaginario puro.

Se tiene: $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow -b^2 + 4ac > 0 \Rightarrow -(b^2 - 4ac) > 0$.

$$\therefore \sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}$$

Por lo tanto:

$$r_1 = \frac{-b}{2a} + i \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad y \quad r_2 = \frac{-b}{2a} - i \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$\therefore r_1$ y r_2 son complejas y conjugadas.

Ejemplos

Determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación y verificar su resultado resolviendo la ecuación.

1) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

$$D = 25 - 4 \cdot 3(-1) = 25 + 12 = 37 > 0$$

raíces reales y distintas.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6} \Rightarrow r_1 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6}, \quad r_2 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6}$$

2) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$D = 4 - 4 = 0$$

raíces reales e iguales.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

3) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$$

raíces reales y distintas.

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{4 + 2}{2} = 3, \quad r_2 = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

4) $x^2 - 6x + 10 = 0$

$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0$$

raíces complejas y conjugadas.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = \frac{2(3 \pm i)}{2} = 3 \pm i$$
$$\Rightarrow r_1 = 3 + i, \quad r_2 = 3 - i$$

5) $\sqrt{5}(x^2 + 1) = 4x$

Solución:

Reducimos la ecuación $\sqrt{5}(x^2 + 1) = 4x$ a la forma general

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$\sqrt{5}x^2 - 4x + \sqrt{5} = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot \sqrt{5}\sqrt{5} = 16 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

raíces complejas y conjugadas.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2\sqrt{5}} = \frac{4 \pm i\sqrt{4}}{2\sqrt{5}} = \frac{4 \pm 2i}{2\sqrt{5}} = \frac{2(2 \pm i)}{2\sqrt{5}} = \frac{2 \pm i}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i, \quad r_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i$$

6) $x^2 + 12x + 11 = 0$

$$D = 144 - 4 \cdot 11 = 100 > 0$$

raíces reales y distintas.

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-12 \pm 10}{2} = \frac{2(-6 \pm 5)}{2} = -6 \pm 5$$

$$\Rightarrow r_1 = -1, \quad r_2 = -11$$

Ejercicios resueltos

1) Determine el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que la ecuación: $x^2 - 2m(x - 2) + 2(x - 2) = 0$ tenga raíces reales e iguales.

Solución:

$$x^2 - 2mx + 4m + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + (2 - 2m)x + (4m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow D = (2 - 2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4m - 4) = 0$$

$$4[(1 - m)^2 - 4(m - 1)] = 0 \quad /: 4$$

$$(m - 1)[m - 1 - 4] = 0$$

$$m = 1 \quad \vee \quad m = 5$$

$\therefore$ Si $m = 1$ o $m = 5$ la ecuación tiene raíces iguales.

En efecto, para la ecuación $x^2 + (2 - 2m)x + (4m - 4) = 0$ se tiene:

$$m = 1 \Rightarrow x^2 + (0)x + 0 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$m = 5 \Rightarrow x^2 + (-8)x + 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

2) Determine el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que la ecuación:

$(m + 4)x^2 - 1 = (2m + 2)x - m$ tenga raíces reales e iguales.

Solución:

$$(m+4)x^2 - (2m+2)x + (m-1) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (2m+2)^2 - 4(m+4)(m-1) = 0 \\ D &= 4(m^2 + 2m + 1) - 4(m^2 + 3m - 4) = 0 \quad /:4 \\ m^2 + 2m + 1 - m^2 - 3m + 4 &= 0 \\ -m + 5 &= 0 \\ -m &= -5 \\ m &= 5 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} (m+4)x^2 - 1 &= (2m+2)x - m \\ 9x^2 - 1 &= 12x - 5 \\ 9x^2 - 12x - 1 + 5 &= 0 \\ 9x^2 - 12x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} \\ x &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12 \pm 0}{18} \\ x &= \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Solución: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

3) Resolver la siguiente ecuación:

$$x + \frac{1}{x} = 4, x \neq 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$D = 12 > 0$ raíces reales y distintas.

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \\ \Rightarrow r_1 &= 2 + \sqrt{3}, \quad r_2 = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

4) Resolver la siguiente ecuación:

$$(x+1)^2 = (x-1) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$$

$D = -7 < 0$ raíces complejas y conjugadas.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}, \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$

5) Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{3x-1}{x+1} \quad x \neq -1, \quad x \neq 1$$

$$(x+1)^2 = (3x-1)(x-1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$$

$$2x^2 - 6x = 0 \quad /:2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 3$$

5.1.3. Otros métodos de resolución de la ecuación cuadrática.

A) Método de factorización:

Podemos resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ por medio de factorización, empleando la propiedad del cuerpo $\mathbb{R}$: $\mathbf{a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0}$

Ejemplo

1) $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$(x+3)(x-5) = 0$$

$$x+3 = 0 \vee x-5 = 0$$

$$x = -3 \vee x = 5$$

$\therefore$ la solución es $S = \{-3, 5\}$

2) $2x^2 - 7x - 15 = 0$

$$(2x+3)(x-5) = 0$$

$$2x+3 = 0 \vee x-5 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \vee x = 5$$

$\therefore$ la solución es $S = \left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$

$$3) \quad 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$(2x + 3)(2x + 3) = 0$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

$-\frac{3}{2}$ es raíz de multiplicidad 2.

$$\therefore \text{ la solución es } S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Observación

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se puede factorizar:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Ejemplo

$$1) \text{ En } 2x^2 - 7x - 15 = 0, \text{ las raíces son: } r_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = 5$$

Luego, la expresión $2x^2 - 7x - 15$ se puede factorizar en la forma siguiente:

$$2x^2 - 7x - 15 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 5)$$

$$2) \text{ En } 4x^2 + 12x + 9 = 0 \text{ las raíces son : } r_1 = -\frac{3}{2} = r_2$$

$$\text{Luego, } 4x^2 + 12x + 9 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

B) Método de completación de cuadrados:

Consiste en sumarle al binomio $x^2 + mx$ un término, tal que el trinomio formado sea el desarrollo del cuadrado de un binomio.

Es decir, para que tenga una de las formas siguientes:

$$x^2 + 2mx + m^2 = (x + m)^2 \quad \text{o} \quad x^2 - 2mx + m^2 = (x - m)^2$$

Ejemplo

$$1) \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= 21 \quad /+4 \\ x^2 - 4x + 4 &= 25 \\ (x - 2)^2 &= 25 \\ x - 2 &= \pm 5 \\ x &= 2 \pm 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ la solución es } S = \{-3, 7\}$$

$$2) \ x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 2x = 15 \quad /+1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 16$$

$$(x - 1)^2 = 16$$

$$x - 1 = \pm 4$$

$$x = 1 \pm 4$$

$\therefore$ la solución es $S = \{-3, 5\}$

5.1.4. Relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$), entonces:

$$1) \ r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2) \ r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Demostración:

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ entonces las raíces son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ,$$

que están expresadas en términos de los coeficientes, por lo tanto:

1)

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \end{aligned}$$

Luego,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

2)

$$\begin{aligned}
 r_1 \cdot r_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \\
 &= \frac{1}{4a^2} \left((-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4a^2} [b^2 - b^2 + 4ac] \\
 &= \frac{4ac}{4a^2}
 \end{aligned}$$

Luego,

$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$

Ejemplos

1) Si la ecuación $5x^2 + 2x - 9 = 0$ tiene raíces r_1 y r_2 , entonces:

$ \begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{2}{5} \\ r_1 \cdot r_2 &= -\frac{9}{5} \end{aligned} $	ya que $ \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \\ c = -9 \end{cases} $
---	---

2) Determine el valor de k de modo que en la ecuación:

$$kx^2 - (k + 1)x - 3 = 0$$

la suma de sus raíces sea $\frac{2}{5}$.

Solución:

Por propiedad sabemos que:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{k + 1}{k}$$

$$\frac{k + 1}{k} = \frac{2}{5}$$

$$5k + 5 = 2k$$

$$3k = -5$$

$$k = -\frac{5}{3}$$

3) Determine el valor de k de modo que en la ecuación:

$$(k + 2)x^2 + x + (k - 19) = 0$$

el producto de sus raíces sea $\frac{-5}{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{-5}{2} = \frac{k - 19}{k + 2} \\ \Rightarrow -5k - 10 &= 2k - 38 \\ 28 &= 7k \\ 4 &= k \end{aligned}$$

4) Determine el valor de k en la ecuación:

$$(k - 1)x^2 - 5x + 3k - 7 = 0$$

para que una de las raíces sea el recíproco de la otra.

Solución: Sea r_1 una raíz

$$\Rightarrow r_2 = \frac{1}{r_1} \text{ y } r_1 \cdot r_2 = 1$$

Pero

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= \frac{3k - 7}{k - 1} \therefore \frac{3k - 7}{k - 1} = 1 \\ \Rightarrow 3k - 7 &= k - 1 \\ \Rightarrow 2k - 6 &= 0 \\ \Rightarrow k &= 3 \end{aligned}$$

5) Determine el valor de m para el cual la suma de las soluciones de la ecuación $4x^2 + 5x + m = 0$ es igual al producto de sus soluciones.

Solución:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{-5}{4} \\ r_1 + r_2 &= \frac{-5}{4} \\ r_1 \cdot r_2 &= \frac{m}{4} \\ \Rightarrow \frac{m}{4} &= \frac{-5}{4} \quad / \cdot 4 \end{aligned}$$

$m = -5$

- 6) ¿Qué valor debe tener m en la ecuación $x^2 + (m - 5)x + 2m + 7 = 0$ para que la suma de sus raíces sea 8?

Solución:

$$r_1 + r_2 = \frac{-(m - 5)}{1}$$

$$r_1 + r_2 = 8$$

$$\therefore -m + 5 = 8$$

$$\boxed{m = -3}$$

- 7) ¿Qué valor debe tener m para que el producto de las raíces de la ecuación $(m^2 - 5)x^2 - 6x + (m^2 - 9) = 0$ sea 5?

Solución:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{m^2 - 9}{m^2 - 5}, \text{ además } r_1 \cdot r_2 = 5 \quad \therefore \frac{m^2 - 9}{m^2 - 5} = 5$$

$$m^2 - 9 = 5m^2 - 25$$

$$16 = 4m^2$$

$$4 = m^2$$

$$\boxed{\pm 2 = m}$$

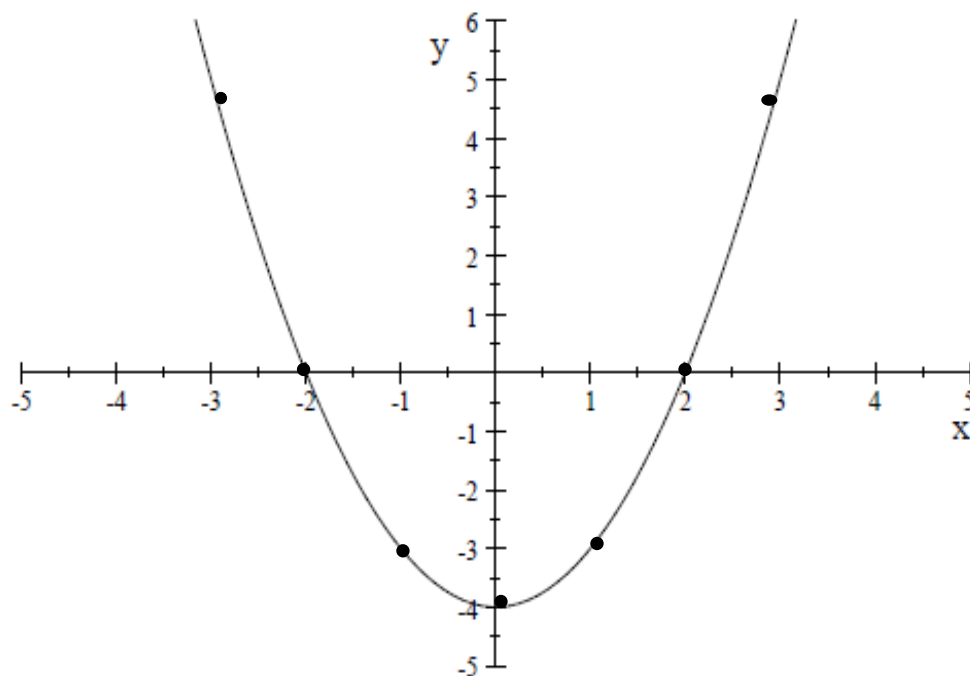
5.2. Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Analizaremos la ecuación: $y = x^2 - 4$

Solución: Determinaremos algunos valores que satisfagan la ecuación $y = x^2 - 4$ haciendo una tabla de valores de x e y

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Representemos los puntos (x, y) en el sistema cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$. Y luego podemos unir mediante una curva:



Curva que recibe el nombre de parábola, cuyo vértice es $V(0, -4)$.

Si resolvemos la ecuación $x^2 - 4 = 0$ observamos que $x^2 = 4 \therefore x = \pm 2$ que son las raíces de la ecuación.

En la gráfica podemos ver que estos dos puntos, son los puntos donde la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 4$ corta al eje x .

En general, se tiene que una ecuación de segundo grado de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con dos incógnitas se puede representar como una parábola en el plano. Es decir, un punto (x, y) del plano está en dicha parábola si los valores de x e y satisfacen esa ecuación.

Geométricamente, resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ significa encontrar los puntos donde la gráfica de la parábola corta al eje x .

Entonces, si la ecuación tiene:

- 1) Raíces reales y distintas, significa que la gráfica de la parábola corta al eje x en dos puntos distintos.
- 2) Raíces reales e iguales, significa que la gráfica de la parábola corta al eje x en un único punto.
- 3) Raíces complejas y conjugadas, significa que la gráfica de la parábola no corta al eje x .

Observaciones

1) El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ está en:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad V\left(-\frac{b}{2a}, \quad y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

2) La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Veamos algunos ejemplos de estas situaciones:

1) Las raíces de la ecuación $3x^2 + x + 1 = 0$ son:

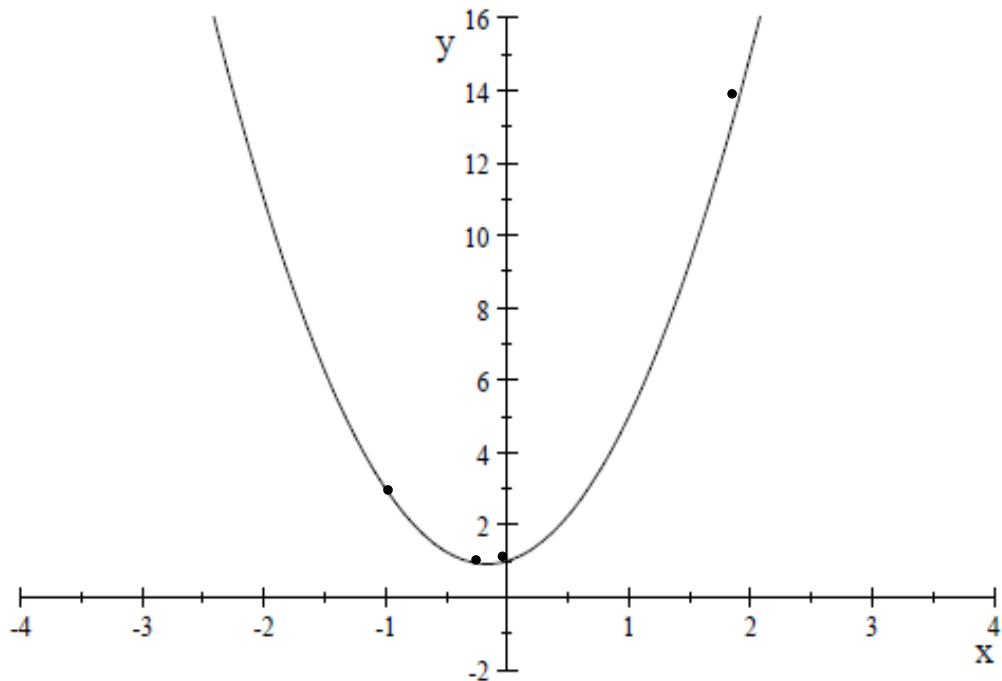
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{2(3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{6} \quad , \quad \text{¡ Raíces complejas!}$$

Luego, $y = 3x^2 + x + 1$ ¡No corta al eje x!

x	y
-1	3
0	1
2	15

$$y = 3 \cdot \frac{1}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore V\left(-\frac{1}{6}, \frac{3}{4}\right)$$



2) La ecuación $4x^2 + 12x + 9 = 0$, se puede resolver por factorización.

Así: $(2x + 3)^2 = 0$ tiene dos raíces iguales.

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \quad \text{que es una raíz doble}$$

$$\therefore y = (2x + 3)^2$$

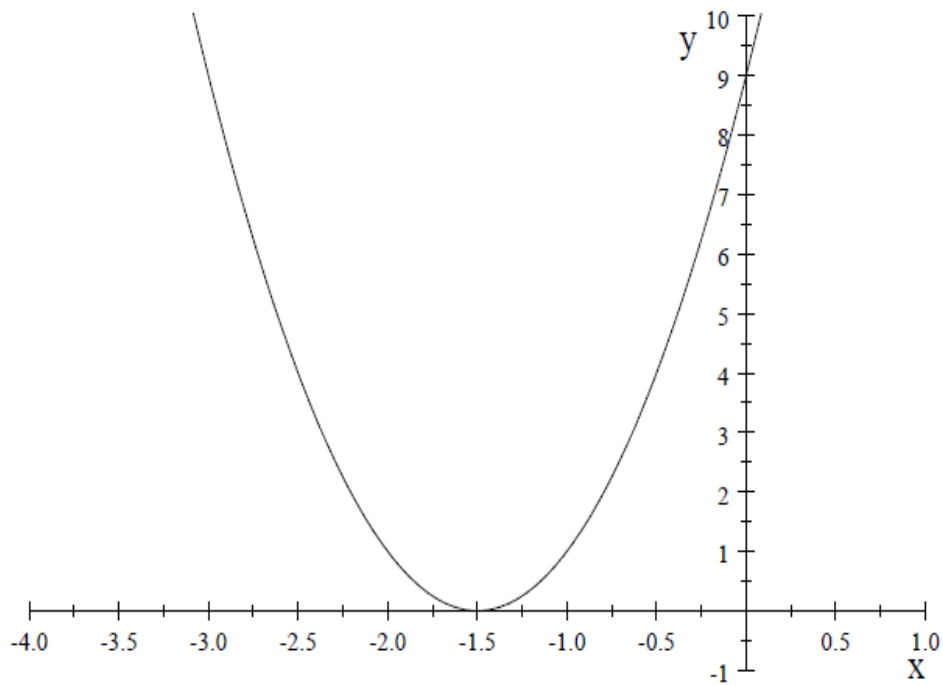
x	y
-2	1
$-\frac{3}{2}$	0
-1	1
0	9
1	25

El vértice de la parábola está en $x = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{4}$, que es la abscisa de V.

La ordenada del Vértice es: $y = 4 \cdot \frac{9}{4} + 12 \cdot -\frac{3}{2} + 9$

$$y = 9 - 18 + 9 = 0$$

$$\therefore V\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$



3) Para la ecuación $x^2 - 13x + 40 = 0$, se tiene:

$$(x - 5)(x - 8) = 0$$

$$x = 5$$

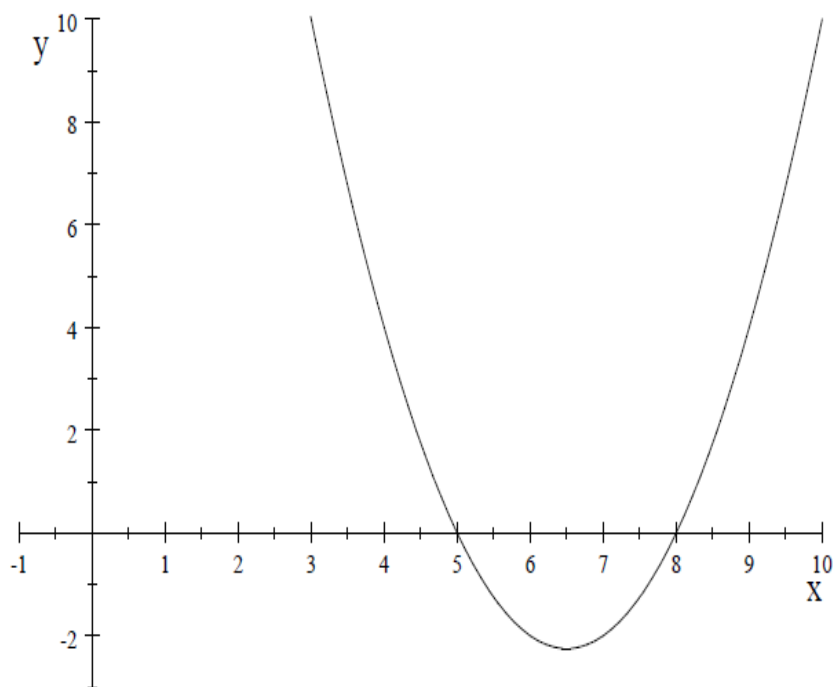
$$x = 8$$

$$y = x^2 - 13x + 40$$

x	y
0	40
5	0
6	-2
7	2
8	0

$$y = \frac{169}{4} - 13 \cdot \frac{13}{2} + 40 = -\frac{9}{4}$$

$$\therefore V\left(\frac{13}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$



- 4) En la ecuación $-x^2 + x - 1 = 0$, las raíces son complejas y la parábola se abre hacia abajo.

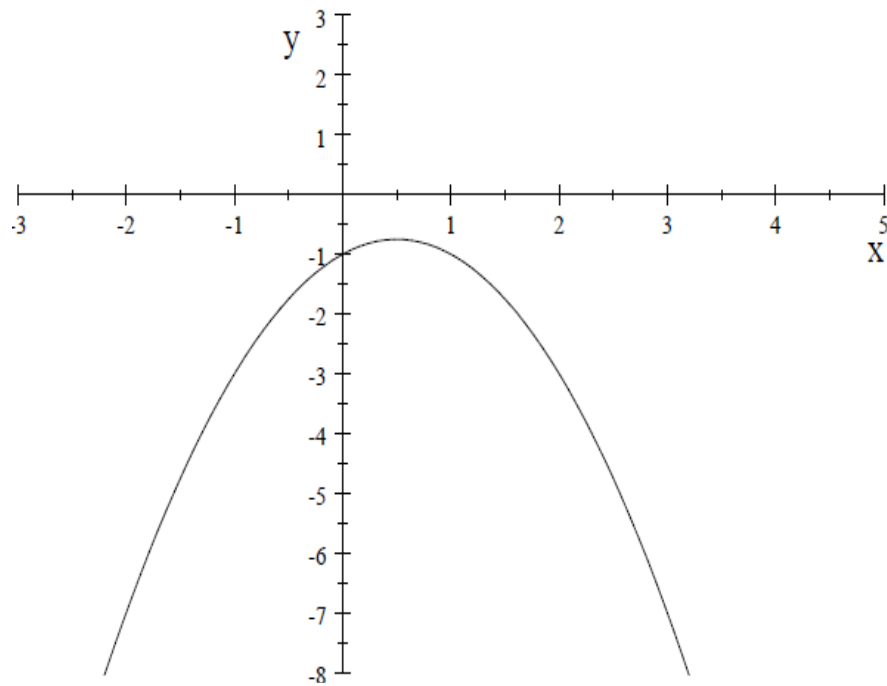
En efecto,

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

¡Raíces complejas!

$$y = -x^2 + x - 1$$

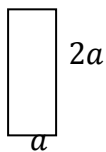


5.3. Problemas de aplicación a ecuación de segundo grado.

- 1) La longitud de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si la longitud se aumenta en 40 m. y el ancho en 6 m, el área será el doble que la anterior.

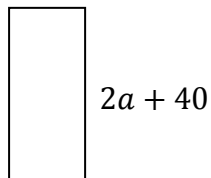
Planteo:

i)



$$A_{rec1} = a \cdot 2a = 2a^2$$

ii)



$$a + 6$$

$$A_{rec2} = (2a + 40)(a + 6) = 2(a + 20)(a + 6) = 2(a^2 + 26a + 120)$$

iii) Ecuación: $A_{rec2} = 2A_{rec1}$

$$2(a^2 + 26a + 120) = 2(2a^2)$$

$$a^2 - 26a - 120 = 0$$

$$(a + 4)(a - 30) = 0$$

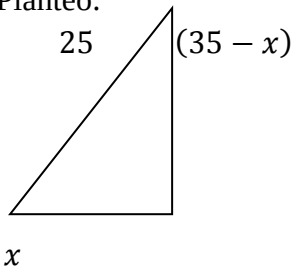
$a = -4$ no es solución (la unidad de medida es positiva)

$a = 30$, es solución.

∴ El ancho del terreno es $a = 30 \text{ m}$ y la longitud es $l = 60 \text{ m}$.

- 2) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 25 m y la suma de los catetos es 35 m.
¿Cuánto miden los catetos?

Planteo:

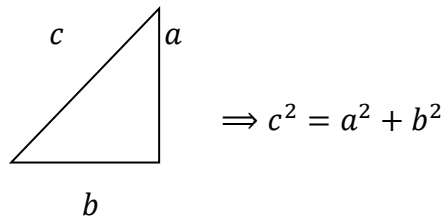


Sea x : un cateto

$35 - x$: Otro cateto

Se conoce que “en todo triángulo rectángulo: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

Así:



Entonces:

$$25^2 = x^2 + (35 - x)^2$$

$$25^2 = x^2 + x^2 + 35^2 - 70x$$

$$0 = 2x^2 - 70x + 1225 - 625$$

$$2x^2 - 70x + 600 = 0 \quad /: 2$$

$$x^2 - 35x + 300 = 0$$

$$(x - 15)(x - 20) = 0$$

$$\Rightarrow x = 15$$

$$x = 20$$

Solución: Si un cateto mide 15, el otro mide 20 o si un cateto mide 20 el otro mide 15.

Otra forma: En el caso de plantear el problema usando las variables x e y para los catetos, obtenemos el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que se indica:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 35 \\ x^2 + y^2 &= 25^2 \end{aligned} \right\}$$

¡Resuélvalo!

- 3) La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados es 53. Hallar los números.

Planteo:

Sean: x un número y $(9 - x)$ el otro número.

Luego: $x^2 + (9 - x)^2 = 53$

$$x^2 + 81 - 18x + x^2 = 53$$

$$2x^2 - 18x + 28 = 0$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x - 2)(x - 7) = 0$$

$$x = 2, \quad x = 7$$

Solución: Los números son 2 y 7.

- 4) La edad de A hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años.

Hallar la edad actual.

Planteo: Edad actual de A : x

Hace 6 años : $x - 6$

Edad dentro de 6 años: $x + 6$

Ecuación:

$$x - 6 = \sqrt{x + 6} \quad /(\quad)^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = x + 6$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$(x - 10)(x - 3) = 0$$

$$x = 10$$

$$x = -3 \quad \text{no es solución}$$

Solución: La edad actual de A es 10 años.

5.4. Algunas ecuaciones no lineales reducibles a Ecuaciones de 2º grado

Diremos que una ecuación es reducible a ecuación de 2º grado si es posible transformarla en una ecuación de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Entre ellos se presentan las siguientes:

5.4.1. Ecuaciones Fraccionarias

Son aquellas en las cuales la incógnita está en el denominador de alguna fracción.

Observación

Al resolver una ecuación fraccionaria se debe **eliminar del conjunto solución** los valores que anulan el denominador.

- **Procedimiento para resolver una ecuación fraccionaria.**

Se multiplica la ecuación por el m.c.m de los denominadores.

Ejemplo

Son ecuaciones fraccionarias, las siguientes:

1)

$$5x - \frac{3}{x} = 2 ; x \neq 0$$

2)

$$\frac{x}{2x+5} - \frac{1}{2x-5} + \frac{8}{4x^2+25} = 0 ; x \neq \pm \frac{5}{2}$$

3)

$$\frac{a-x}{a+x} - \frac{a+x}{a-x} = 2 ; x \neq \pm a$$

4)

$$\frac{7x-4}{x^2-6x+8} - \frac{5}{2-x} = \frac{x+5}{x-4} ; x \neq 2 ; x \neq 4$$

Desarrollo

1)

$$\begin{aligned} 5x - \frac{3}{x} &= 2 ; x \neq 0 \text{ /m.c.m.: } x \\ 5x^2 - 3 &= 2x \\ 5x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{2 \pm 8}{10} \\ x_1 &= \frac{10}{10} = 1 ; x_2 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \\ \therefore \text{Sol: } &\left\{1, -\frac{3}{5}\right\} \end{aligned}$$

2)

$$\frac{x}{2x+5} - \frac{1}{2x-5} + \frac{8}{4x^2-25} = 0, \quad x \neq \pm \frac{5}{2}$$

$$x(2x-5) - 1(2x+5) + 8 = 0, \quad m.c.m (4x^2 - 25)$$

$$2x^2 - 5x - 2x - 5 + 8 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3; \quad x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore Sol: \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

3)

$$\frac{a-x}{a+x} - \frac{a+x}{a-x} = 2, \quad m.c.m (a+x)(a-x); x \neq \pm a$$

$$(a-x)^2 - (a+x)^2 = 2(a+x)(a-x)$$

$$a^2 - 2ax + x^2 - a^2 - 2ax - x^2 = 2a^2 - 2x^2$$

$$2x^2 - 4ax - 2a^2 = 0 \quad /: 2$$

$$x^2 - 2ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{2a \pm 2a\sqrt{2}}{2} = (a \pm a\sqrt{2})$$

$$\therefore Sol: \{a + a\sqrt{2}, a - a\sqrt{2}\}$$

5.4.2. Ecuaciones Irracionales

Son aquellas que involucran a las raíces y la incógnita está en la cantidad subradical.

Resolución de ecuaciones con radicales que se reducen a ecuaciones de primer grado

Ejemplos

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt{x^2 - 2x + 1} = (9 - x) \quad / ()^2 \\
 & x^2 - 2x + 1 = (9 - x)^2 \\
 & x^2 - 2x + 1 = 81 - 18x + x^2 \\
 & 16x = 81 - 1 \\
 & x = \frac{80}{16} \Rightarrow x = 5 \\
 & \therefore S = \{5\}
 \end{aligned}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & 9 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 9 \\
 \text{ii)} \quad & x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\
 & (x - 1)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$2) \quad \sqrt{x} + \sqrt{x + 7} = 7 \quad , \text{ se aísla un radical y luego se eleva al cuadrado}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x + 7} &= 7 - \sqrt{x} \quad / ()^2 \\
 x + 7 &= 49 - 14\sqrt{x} + x \\
 14\sqrt{x} &= 42 \\
 \sqrt{x} &= 3 \quad / ()^2 \\
 x &= 9 \\
 \therefore S &= \{9\}
 \end{aligned}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & x \geq 0 \\
 \text{ii)} \quad & x + 7 > 0 \\
 & x > -7
 \end{aligned}$$

$$3) \quad \text{Radical y fracción.}$$

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{x + 6} - \sqrt{4x - 3} &= \frac{9}{\sqrt{4x - 3}} \quad / \sqrt{4x - 3} \\
 2\sqrt{x + 6}\sqrt{4x - 3} - (\sqrt{4x - 3})^2 &= 9 \\
 2\sqrt{4x^2 + 21x - 18} - (4x - 3) &= 9 \\
 2\sqrt{4x^2 + 21x - 18} &= 9 + 4x - 3 \\
 \sqrt{4x^2 + 21x - 18} &= 3 + 2x \quad / ()^2 \\
 4x^2 + 21x - 18 &= 4x^2 + 9 + 12x \\
 9x &= 27 \\
 x &= 3 \\
 \therefore S &= \{3\}
 \end{aligned}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & x > \frac{3}{4} \\
 \text{ii)} \quad & x > -6
 \end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones con radicales que se reducen a ecuaciones de segundo grado

Al igual que en el caso anterior éstas ecuaciones se resuelven eliminando los radicales mediante la elevación de los dos miembros a la potencia que indique el índice del radical.

Cuando la ecuación que resulta es de segundo grado, se obtendrán dos raíces de la ecuación, luego es necesario verificar ambas raíces en la ecuación dada para comprobar si ambas raíces satisfacen la ecuación dada.

Recordar que “**cuando los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia generalmente se introducen nuevas soluciones que no satisfacen la ecuación dada**” (aparecen soluciones extrañas o inadmisibles).

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$

Restricciones:

i) $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

ii) $2x + 1 \geq 0$

$x \geq -\frac{1}{2}$

iii) $x \geq 0$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x} \quad /(\)^2$$

$$x-3+2x+1+2\sqrt{(x-3)(2x+1)} = 4x$$

$$2\sqrt{2x^2-5x-3} = 4x-3x+2$$

$$2\sqrt{2x^2-5x-3} = x+2 \quad /(\)^2$$

$$4(2x^2-5x-3) = x^2+4x+4$$

$$8x^2-20x-12 = x^2+4x+4$$

$$7x^2-24x-16 = 0$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576+448}}{14} = \frac{24 \pm \sqrt{1024}}{14} = \frac{24 \pm 32}{14} = \frac{8(3 \pm 4)}{14} = \frac{12 \pm 16}{7}$$

$$x_1 = \frac{28}{7} = 4$$

$$x_2 = -\frac{4}{7} \text{ es solución extraña, ya que } x \geq 3.$$

$$S = \{4\}$$

2) $\sqrt{x+3} + \frac{6}{\sqrt{x+3}} = 5 \quad / \cdot \sqrt{x+3}$

Restricción:

$$\sqrt{x+3}^2 + 6 = 5\sqrt{x+3}$$

$$x > -3$$

$$\begin{aligned}
x + 9 &= 5\sqrt{x + 3} & /()^2 \\
x^2 + 18x + 81 &= 25(x + 3) \\
x^2 + 18x - 25x + 81 - 75 &= 0 \\
x^2 - 7x + 6 &= 0 \\
(x - 6)(x - 1) &= 0 \\
x - 6 = 0 &\vee x - 1 = 0 \\
x = 6 &\vee x = 1
\end{aligned}$$

$$S = \{1, 6\}$$

$$\begin{aligned}
3) \sqrt{x + \sqrt{x + 8}} &= 2\sqrt{x} & /()^2 \\
x + \sqrt{x + 8} &= 4x \\
\sqrt{x + 8} &= 3x & /()^2 \\
x + 8 &= 9x^2 \\
9x^2 - x - 8 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{18} = \frac{1 \pm 17}{18}$$

$$x_1 = \frac{18}{18} = 1$$

$$x_2 = \frac{-16}{18} = -\frac{8}{9} \text{ no verifica la ecuación}$$

$$S = \{1\}$$

5.4.3. Ecuaciones Trinomias

Se denomina ecuación trinomia a una ecuación de tres términos de la forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad , \text{ con } a \neq 0, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

Que también pueden escribirse:

$$a(x^n)^2 + b(x^n) + c = 0$$

$\therefore$ podemos hacer una sustitución $y = x^n$

$\Rightarrow ay^2 + by + c = 0$ que es una ecuación cuadrática.

Procedimiento para su resolución

- 1) Hacemos una sustitución
- 2) Despejamos la nueva variable
- 3) Despejamos la variable original

Nota

- 1) La ecuación trinomia de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0 \text{ se llama } \mathbf{ecuación bicuadrática}.$$

- 2) La ecuación $x^n + a = 0$ se llama **ecuación binomial**.

Ejemplos

1)

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \text{ hacemos } y = x^2$$

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$(y - 4)(y - 9) = 0$$

$$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Sol: } \{-3, -2, 2, 3\}$$

2)

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0, \text{ hacemos } z = x^3$$

$$z^2 - 7z - 8 = 0$$

$$(z - 8)(z + 1) = 0$$

$$z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1$$

$$z - 8 = 0 \Rightarrow z = 8$$

$$\therefore x^3 = -1; x^3 = 8$$

a)

$$x^3 + 1 = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

b)

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\text{Sol. Final: } \left\{ -1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i), \quad (-1 \pm \sqrt{3}i) \right\}$$

3)

$$x^{10} - 33x^5 + 32 = 0, \quad \text{sea } u = x^5$$

$$u^2 - 33u + 32 = 0$$

$$(u - 32)(u - 1) = 0$$

$$u = 32 \Rightarrow x^5 - 32 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) = 0$$

$$u = 1 \Rightarrow x^5 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore \text{Sol. Reales } \{1, 2\}$$

4)

$$x^4 - 6x^2 + 7 = 0, \quad \text{sea } u = x^2$$

$$u^2 - 6u + 7 = 0$$

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{2})}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{pero } u = x^2 \Rightarrow x^2 = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{Sol} = \left\{ \sqrt{3 + \sqrt{2}}, \sqrt{3 - \sqrt{2}}, -\sqrt{3 + \sqrt{2}}, -\sqrt{3 - \sqrt{2}} \right\}$$

5) **Casos especiales**

- $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$

$$\text{Sea } u = \sqrt{x} / ()^2$$

$$u^2 = x$$

$$(u + 5)(u - 2) = 0$$

$$u - 2 = 0 \Rightarrow u = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$u + 5 = 0 \Rightarrow u = -5 \rightarrow \sqrt{x} = -5 \text{ no es solución.}$$

$$\therefore \text{Sol} = \{4\}$$

- $x^3 - 9x^{\frac{3}{2}} + 8 = 0$

$$x^3 - 9\sqrt{x^3} + 8 = 0$$

$$\text{Sea } z = \sqrt{x^3} / ()^2$$

$$z^2 = x^3$$

$$\therefore z^2 - 9z + 8 = 0$$

$$(z - 8)(z - 1) = 0$$

$$z = 8; z = 1$$

a)

$$\sqrt{x^3} = 8$$

$$x^3 = 64$$

$$x^3 - 64 = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x^2 + 4x + 16 = 0 \rightarrow \text{Raices Complejas}$$

b)

$$\sqrt{x^3} = 1$$

$$x^3 = 1$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \text{Raices Complejas}$$

- $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$

$$(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$$

$$\text{Sea } u = x^2 - x$$

$$u^2 - 14u + 24 = 0$$

$$(u - 12)(u - 2) = 0$$

$$u - 12 = 0 \rightarrow u = 12 \Rightarrow x^2 - x = 12 \dots (a)$$

$$u - 2 = 0 \rightarrow u = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \dots \dots \dots (b)$$

$$(a) \ x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 4; \ x = -3$$

$$(b) \ x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 2; \ x = -1$$

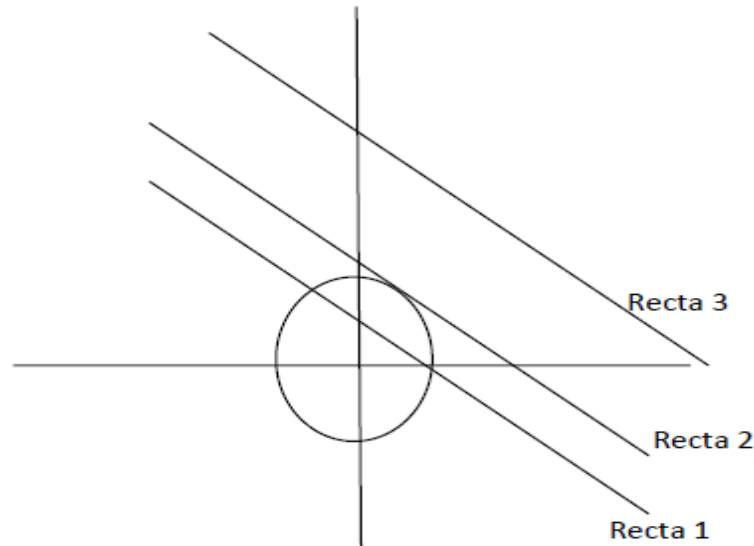
$$\therefore \text{Sol. Final} = \{4, -3, 2, -1\}$$

5.5. Algunos Sistemas de Ecuaciones no lineales.

La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ representa una circunferencia de radio r y $c(0,0)$ y la ecuación $ax + by + c = 0$ representa una línea recta.

Resolver un sistema que involucra a ambas ecuaciones, representa geométricamente, el determinar los puntos de intersección de ambas curvas.

Dados una circunferencia y una recta, puede suceder lo que se observa en la figura siguiente:



- 1) La recta intersecta a la circunferencia en dos puntos. (Recta 1)
- 2) La recta intersecta a la circunferencia en un punto. (Recta 2)
- 3) La recta no intersecta a la circunferencia. (Recta 3)

En términos algebraicos al resolver un sistema de estas dos ecuaciones en forma simultánea puede ocurrir que:

- 1) El sistema tenga dos soluciones. (se intersectan en 2 puntos)
- 2) El sistema tenga una sola solución. (se intersectan en 1 punto)
- 3) El sistema no tenga solución. (no se intersectan)

Sistemas de ecuaciones de segundo grado en dos variables.

Un sistema de ecuaciones en dos variables es de segundo grado si alguna de las ecuaciones contiene alguno de los términos x^2 , y^2 o xy . (siendo x e y las variables)

Para estos sistemas no hay un método general de resolución, por tal motivo veremos algunos casos de ellos.

I. Sistemas que contienen una ecuación lineal y una ecuación cuadrática.

Método de resolución: Despejamos una de las variables de la ecuación lineal y la sustituimos en la ecuación cuadrática.

Ejemplos

$$1) \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

Despejamos una variable en E_1 : por ejemplo $x = 2 + y$ y la reemplazamos en E_2 :

Así, $x^2 + y^2 = 20$ nos queda $(2 + y)^2 + y^2 = 20$ y tenemos una ecuación en una variable.

$$4 + 4y + y^2 + y^2 = 20$$

$$2y^2 + 4y - 16 = 0 \quad / : 2$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(y + 4)(y - 2) = 0$$

$$y + 4 = 0 \quad \vee \quad y - 2 = 0$$

$$y = -4 \quad \vee \quad y = 2$$

$$\Rightarrow x = 2 - 4 \quad \vee \quad x = 2 + 2$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = 4$$

$$\therefore S = \{(-2, -4), (4, 2)\}$$

Nota: Al representar en un mismo sistema cartesiano, ambas curvas, observará que éstas se intersectan en dos puntos. Estos puntos son los que se indican en el conjunto solución.

2) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x - y = 8 \\ -2xy = 6 \end{cases}$$

En E_1 : $5x - y = 8$ despejamos y . Así, $-y = 8 - 5x \Rightarrow y = 5x - 8$ y reemplazamos en E_2 : $-2xy = 6$

$$2x(8 - 5x) = 6$$

$$16x - 10x^2 = 6 \quad / (-1)$$

$$10x^2 - 16x + 6 = 0 \quad / : 2$$

$$5x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(5)(3)}}{2(5)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{10} = \frac{8 \pm 2}{10}$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{10}{10} = 1 \\ x_2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Finalmente:

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow y = 5 \cdot 1 - 8 = -3 \quad \therefore s_1 = (1, -3)$$

$$\text{si } x = \frac{3}{5} \Rightarrow y = 5 \cdot \frac{3}{5} - 8 = -5 \quad \therefore s_2 = \left(\frac{3}{5}, -5\right)$$

$$S = \left\{(1, -3), \left(\frac{3}{5}, -5\right)\right\}$$

Ejercicios

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 9x^2 - 9y^2 = -8 \end{cases} \\ & S = \left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{7}{6}, -\frac{3}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \\ & S = \left\{\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \begin{cases} 2x + y = 11 \\ x^2 - xy = 4 \end{cases} \\ & S = \left\{(4, 3), \left(-\frac{1}{3}, \frac{35}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

II. Sistemas en que ambas ecuaciones son de la forma: $ax^2 \pm by^2 = c$.

(Es decir, no hay términos de primer grado ni el término xy).

Método de resolución: Es conveniente utilizar el método de reducción de variables. (Esto se logra con una adecuada amplificación de las ecuaciones).

Ejemplos

$$1) \quad \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 22 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases} \quad / \cdot 2$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 2y^2 = 44 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$5x^2 = 45$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Para obtener el valor de y , reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones:

Veamos en E_1 : $y^2 = 22 - 2x^2$

$$y^2 = 22 - 2 \cdot 9 = 22 - 18 = 4$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$S = \{(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)\}$$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 0 \end{array} \right\} / \cdot (-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ -3x^2 + 6y^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$3y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Reemplazamos $y = 0$ en la segunda ecuación y obtenemos:

$$x^2 - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$S = \{(0, 0)\}$$

Ejercicios

Resuelva los sistemas indicados:

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{array} \right\}$$
$$S = \{(\pm 5, \pm 3)\}$$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 7y^2 = 6 \end{array} \right\}$$
$$S = \{(\pm \sqrt{5}, \pm \sqrt{2})\}$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + 2y^2 = 72 \\ x^2 - y^2 = 60 \end{array} \right\}$$
$$S = \{(\pm 8, \pm 2)\}$$

III. Sistemas homogéneos formados por ecuaciones cuyos términos son todos de segundo grado.

(Es decir, contienen términos en x^2, y^2, xy)

Método de resolución: Se procede como en I, es decir, despejamos una de las variables en términos de la otra y resolvemos, finalmente, una ecuación de segundo grado con una variable.

Ejemplos

$$1) \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Si despejamos y en la segunda ecuación y reemplazamos en la primera se tiene:

$$y = \frac{12}{x}, \quad x \neq 0$$

$$x^2 - \left(\frac{12}{x}\right)^2 = -7$$

$$x^2 - \frac{144}{x^2} = -7 \quad / \cdot x^2$$

$$x^4 - 144 = -7x$$

$$x^4 + 7x^2 - 144 = 0 \quad (\text{es una ecuación bicuadrática}) \quad \text{Sea } u = x^2$$

$$(x^2)^2 + 7x^2 - 144 = 0$$

$$u^2 + 7u - 144 = 0$$

$$(u + 16)(u - 9) = 0$$

$$u = -16 \quad \vee \quad u = 9 \quad \text{pero } u = x^2, \text{ entonces}$$

$$x^2 = -16 \quad \vee \quad x^2 = 9$$

$$x^2 + 16 = 0 \quad \vee \quad x = \pm 3$$

$$S = \emptyset$$

Además como

$$y = \frac{12}{x} \Rightarrow y = \frac{12}{\pm 3} \Rightarrow y = \pm 4$$

$$S = \{(3, 4), (-3, -4)\}$$

Observación: Se debe considerar sólo x e y de igual signo para que $x \cdot y = 12$.

$$2) \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 41 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 131 \end{cases} / \cdot (-1) \quad \text{Para tener una ecuación en términos de } xy.$$

$$\left. \begin{array}{l} -x^2 + 2xy + y^2 = -41 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 131 \end{array} \right\} \text{Sumamos}$$

$$5xy = 90 \quad / \cdot \frac{1}{5}$$

$$xy = 18$$

$$y = \frac{18}{x}, x \neq 0 \quad \text{que reemplazamos en } E_1$$

Así:

$$x^2 - 2xy - y^2 = 41 \quad \text{nos queda}$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{18}{x} - \left(\frac{18}{x}\right)^2 = 41$$

$$x^2 - 36 - \frac{18^2}{x^2} = 41 \quad / \cdot x^2$$

$$x^4 - 36x^2 - 18^2 = 41x^2$$

$$x^4 - 77x^2 - 18^2 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 81) = 0$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 81 = 0$$

$$\emptyset \quad \quad \quad x^2 = 81$$

$$x = \pm 9$$

$$\therefore y = \frac{18}{\pm 9} = \pm 2$$

$\therefore$ Hay que verificar en las ecuaciones.

$$S = \{(9, 2)(-9, -2)\}$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - xy = -4 \end{array} \right\}$$

Se despeja y en E_2

$$x^2 + 4 = xy$$

$$\frac{x^2 + 4}{x} = y \quad \text{Se reemplaza en } E_1$$

$$x^2 + \left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)^2 = 41$$

$$x^2 + \frac{x^4 + 8x^2 + 16}{x^2} = 41 \quad / \cdot x^2, x \neq 0$$

$$x^4 + x^4 + 8x^2 + 16 = 41x^2$$

$$2x^4 - 33x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16}}{2(2)} = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 128}}{4} = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{4} = \frac{33 \pm 31}{4}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{64}{4} = 16 & \Rightarrow x = \pm 4 \\ x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

i) Si,

$$x = \pm 4 \Rightarrow y = \frac{16 + 4}{\pm 4} = \frac{20}{\pm 4} = \pm 5$$

$$\therefore (4, 5), (-4, -5), (4, -5), (-4, 5)$$

Verificamos en E_2 : $16 - 20 = -4$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -5 \end{array} \right\} 16 - (4 \cdot -5) = 16 + 20 \neq -4 \quad \therefore (4, -5) \notin S$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 5 \end{array} \right\} 16 - (-4)(5) = 34 \neq -4 \quad \therefore (-4, 5) \notin S$$

ii) Si,

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{2} + 4}{\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pm \frac{9}{\sqrt{2}} = \pm \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Verificar en E_2

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad y = \frac{9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{9}{4} \cdot 2 = \frac{-8}{2} = -4$$

Verificar en E_1

$$\frac{1}{2} + \frac{81}{2} = \frac{82}{2} = 41$$

$$S = \left\{ (4, 5), (-4, -5), \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{2}\sqrt{2} \right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{9}{2}\sqrt{2} \right) \right\}$$

Ejercicios

$$1) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 40 \\ xy = 12 \end{array} \right\} \quad S = \{(6, 2), (-6, -2), (2, 6), (-2, -6)\}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x^2 - 3y^2 = 13 \\ xy = 10 \end{array} \right\} \quad S = \{(5, 2), (-5, -2)\}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 2y^2 = -24 \\ 2xy + y^2 = 84 \end{array} \right\} \quad S = \{(4, 6), (-4, -6)\}$$

5.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado con una incógnita, por el método que se indica:

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$, (factorizando). Resp.: $\{7, 8\}$
 b) $x^2 + 2x - 15 = 0$, (completando cuadrados) Resp.: $\{-5, 3\}$
 c) $3x^2 - 17x + 20 = 0$, (forma general) Resp.: $\{\frac{5}{3}, 4\}$
 d) $2x^2 + 13x - 24 = 0$, (completando cuadrados) Resp.: $\{-8, \frac{3}{2}\}$

2. Determine los valores que debe tomar k para que la ecuación dada admita raíces reales e iguales:

a) $kx^2 + kx - 2 = 0$ Resp.: $k = -8$
 b) $x^2 - 15x - k(2x + 1) = 0$ Resp.: $k = \frac{-16 \pm \sqrt{31}}{2}$

3. Determine la suma de las raíces de la ecuación $3x^2 - 5x - 1 = 7(x - 3)$.
 Resp.: 4

4. Determine el producto de las raíces de la ecuación $(x - 2)^2 = (x - 2)(x + 2)$.

5. Hallar los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, si es que existen, para que la ecuación $x^2 - 15x = m(2x - 8)$, tenga raíces:

a) reales e iguales Resp.: $\emptyset$
 b) reales y distintas. Resp.: $\mathbb{R}$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones :

a) $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x-13}{6}$ Resp.: -2 y 9
 b) $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$ Resp.: 1
 c) $\frac{x-a}{b^2} - \frac{x-b}{a^2} = \frac{3}{a} - \frac{3}{b}$, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a^2 \neq b^2$. Resp.: $\frac{(a-b)^2}{a+b}$
 d) $\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \frac{8}{\sqrt{x+5}}$ Resp.: 3

7. Expresar $x^2 - x + y - 6 = 0$ en la forma $(x - a)^2 = k(y - b)$ completando el cuadrado perfecto.
 Resp.: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(y - \frac{25}{4}\right)$

8. Resolver la ecuación en $\mathbb{R}$, para x .

$$\frac{a^2 + \sqrt{12x^2 - a^2}}{a^2 - \sqrt{12x^2 - a^2}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Resp.: $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right\}$

9. Resuelva los problemas que se indican:

- a) Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de " x " baldosas por lado sobran 27, y si se toman " $x + 1$ " baldosas por lado faltan 40. Hallar el número de baldosas.

Resp.: 1116

- b) Determine el área de un rectángulo, sabiendo que: Su perímetro es de 24cms. y su base es el triple de su altura.

Resp.: $\frac{27}{2} \text{ cm}^2$

- c) El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2 cm al doble de la longitud del lado desigual. Determine el área del triángulo.

Resp.: $\frac{3\sqrt{247}}{4} \text{ cm}^2$

10. Si r y s son las raíces de la ecuación $6 + \frac{1}{x} = x$, hallar el valor de:

$$A = \frac{\sqrt{6(r+s)}}{6(rs)^8} - 5$$

Resp.: $A = -4$

11. Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Resp.: $S = \{(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1)\}$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Resp.: $S = \{(4,1), (-4,-1), (2,2), (-2,-2)\}$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1 \end{cases}$$

Resp.: $S = \{(5,0), (-5,0)\}$

d)
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 + 2xy = -1 \end{cases}$$

Resp.: $S = \left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{-13}{5}\right), (1, -1)\right\}$

UNIDAD VI LOGARITMOS

La Unidad de Logaritmos considera cuatro secciones fundamentales, de modo de capacitar al alumno para que: reconozca y aplique las propiedades de los logaritmos, resuelva ecuaciones exponenciales, logarítmicas y algunos sistemas que involucren a estas ecuaciones aplicando el concepto de logaritmo y sus propiedades.

Se indican en cada sección definiciones, ejemplos, ejercicios desarrollados y/o propuestos, con el objeto que el alumno aplique correctamente lo señalado en el párrafo anterior. Finaliza la unidad con ejercicios propuestos con su respectiva respuesta.

Las secciones donde se desarrollan los contenidos de esta unidad son:

1. Logaritmos de números reales positivos.
2. Propiedades de los logaritmos.
3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
4. Sistemas de ecuaciones no lineales que involucran logaritmos, exponenciales y radicales

6.1. Logaritmos de números reales positivos

El logaritmo de un número “ N ” ($N > 0$) en una base dada “ a ”, $a > 0$ y $a \neq 1$, es igual al exponente al que se debe elevar la base “ a ” para obtener el número N .

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Ejemplos

1. Se conoce que $2^3 = 8$, luego $\log_2 8 = 3$
2. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, puesto que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
3. $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$, ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$

Observación

- 1) Si la base del logaritmo es 10, éstos se llaman logaritmos vulgares, decimales o de Briggs.

Notación: $\log_{10} N = \log N$

- 2) Si la base del logaritmo es “ e ”, estos se llaman logaritmos naturales o Neperianos.

Notación: $\log_e N = \ln N$

- 3) La base de un logaritmo puede ser cualquier $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.
($a \in \mathbb{R}, a > 0 \wedge a \neq 1$).

Ejercicio

Determine el valor de x en las expresiones siguientes:

1) $\log_2 x = 4 \Leftrightarrow 2^4 = x$
 $\Rightarrow x = 16$

2)

$$\log_{\frac{5}{2}} x = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^3 = x$$
$$\Rightarrow x = \frac{125}{8}$$

3)

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x$$
$$\Rightarrow x = 2$$

4) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81$
 $\Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$

5)

$$\log_{\frac{1}{4}} 64 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 64$$
$$\Rightarrow 4^{-x} = 4^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

$$6) \log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \\ \Rightarrow x = \sqrt[4]{16} \Rightarrow x = 2$$

$$7) \\ \log_x 2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^{1/4} = 2 \\ \Rightarrow x = 2^4 \Rightarrow x = 16$$

$$8) \\ \log_x \frac{1}{4} = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x^{-2/3} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x^{-2/3} = 2^{-2} \Rightarrow x = 8$$

$$9) \\ \log_x 32 = \frac{-5}{7} \Leftrightarrow x^{-5/7} = 32 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{128}, \text{ puesto que } x^{-5/7} = 2^5 \quad / ()^{-7/5} \\ x = (2^5)^{-7/5} = 2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

6.2. Propiedades de los logaritmos

Considerando la equivalencia

$$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$$

obtenemos en forma inmediata algunas propiedades, mencionaremos las siguientes.

$$1. a^{\log_a N} = N$$

En efecto, si reemplazamos el valor de $b = \log_a N$ en $a^b = N$, se obtiene:

$$a^{\log_a N} = N$$

$$2. \log_a a^b = b$$

En efecto, si reemplazamos el valor de $N = a^b$ en $\log_a N = b$, se obtiene:

$$\log_a a^b = b$$

Como consecuencia de la propiedad 2, obtenemos otras propiedades en forma inmediata:

3. $\log_a a = 1$, ya que $\log_a a^1 = 1$
4. $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$, ya que $\log_a a^{1/2} = \frac{1}{2}$
5. $\log_a 1 = 0$, ya que $\log_a a^0 = 0$
6. $\log_a \frac{1}{a} = -1$, ya que $\log_a a^{-1} = -1$
7. $\log_{\frac{1}{a}} a = -1$, ya que $\log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = -1$

Aplicando definición también se pueden demostrar otras propiedades:

$$8. \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

En efecto,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sea } x = \log_a u \\ y = \log_a v \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^x = u \\ a^y = v \end{array} \right\}$$

Multiplicando

$$u \cdot v = a^x \cdot a^y \quad (\text{Propiedad de potencias de igual base})$$

$$u \cdot v = a^{x+y}, \quad \text{Aplicando definición de } \log_a$$

$$\log_a(u \cdot v) = x + y, \quad \text{sustituyendo tenemos}$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$9. \log_a u^n = n \cdot \log_a u, \quad \text{con } n \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sea } x = \log_a u \Leftrightarrow a^x = u \quad / \quad ()^n$$

$$(a^x)^n = u^n \Rightarrow a^{nx} = u^n, \quad \text{por definición}$$

$$\log_a u^n = nx$$

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u$$

$$10. \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \log_a \frac{u}{v} &= \log_a u \cdot v^{-1} = \log_a u + \log_a v^{-1} \\ &= \log_a u + (-1)\log_a v \\ &= \log_a u - \log_a v \\ \therefore \log_a \frac{u}{v} &= \log_a u - \log_a v \end{aligned}$$

11. Propiedad del cambio de base

Sea $\log_a N$ y se desea cambiarlo a una nueva base “ b ” tal que $b > 0 \wedge b \neq 1$, entonces

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

En efecto, sea $x = \log_a N$, entonces según definición:

$$\begin{aligned} a^x &= N \quad / \log_b \\ \log_b a^x &= \log_b N \\ x \log_b a &= \log_b N \\ x &= \frac{\log_b N}{\log_b a} \end{aligned}$$

Reemplazando x se obtiene la propiedad:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Ejemplos

Usando propiedades, determine el valor de:

$$1) \quad 3^{(2 \log_3 7 + \log_3 5)}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 3^{(\log_3 7^2 + \log_3 5)} &= 3^{\log_3 7^2 \cdot 5} \\ &= 7^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

2)

$$125^{(\log_5 \sqrt[3]{95} + \frac{1}{3})}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 125^{\log_5 \sqrt[3]{95}} \cdot 125^{\frac{1}{3}} &= 5^{3 \log_5 (95)^{\frac{1}{3}}} \cdot (5^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^{\log_5 \left(95^{\frac{1}{3}}\right)^3} \cdot 5 \\ &= 5^{\log_5 95} \cdot 5 \\ &= 95 \cdot 5 \\ &= 475 \end{aligned}$$

3) $64^{0,5 \log_8(0,75)}$

Solución:

$$\begin{aligned} (8^2)^{0,5 \log_8(0,75)} &= 8^{\log_8 \left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

4) $\log_4 7^{-2 \log_7 4}$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_4 7^{\log_7 4^{-2}} &= \log_4 4^{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

5) $\log_3 \log_2 512$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_3 \log_2 2^9 &= \log_3 9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

- **Otros ejemplos más simples**

$$1) \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \log_2 (2^{-1})^{-5} = \log_2 2^5 = 5$$

$$2) \log_7 7^{x-3} = x - 3$$

$$3) 100^{\log x^2} = 10^{2 \log x^2} = 10^{\log x^4} = x^4$$

$$4) e^{\ln e^8} = e^8$$

Ejercicios resueltos

1) Expresa M en función de $\log a$, $\log b$ y $\log c$, aplicando propiedades de logaritmo, si:

a)

$$M = \log \frac{\sqrt[5]{a^{-2}\sqrt{b^3}}}{\sqrt{b^5\sqrt{c^3}\sqrt[3]{a^2b}}}$$

Solución:

$$M = \log \frac{\sqrt[5]{a^{-2}\sqrt{b^3}}}{\sqrt{b^5\sqrt{c^3}\sqrt[3]{a^2b}}}$$

$$M = \log \sqrt[5]{a^{-2}\sqrt{b^3}} - \log \sqrt{b^5\sqrt{c^3}\sqrt[3]{a^2b}}$$

$$M = \frac{1}{5} \log a^{-2} b^{3/2} - \left\{ \frac{1}{2} \log b^5 c^{1/2} + \frac{1}{3} \log a^2 b \right\}$$

$$M = \frac{1}{5} [\log a^{-2} + \log b^{3/2}] - \left\{ \frac{1}{2} [\log b^5 + \log c^{1/2}] + \frac{1}{3} [\log a^2 + \log b] \right\}$$

$$M = \frac{1}{5} \left[-2 \log a + \frac{3}{2} \log b \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[5 \log b + \frac{1}{2} \log c \right] + \frac{1}{3} [2 \log a + \log b] \right\}$$

$$M = -\frac{2}{5} \log a + \frac{3}{10} \log b - \frac{5}{2} \log b - \frac{1}{4} \log c - \frac{2}{3} \log a - \frac{1}{3} \log b$$

$$M = \left(-\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) \log a + \left(\frac{3}{10} - \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \right) \log b - \frac{1}{4} \log c$$

$$M = -\frac{16}{15} \log a + \frac{9 - 75 - 10}{30} \log b - \frac{1}{4} \log c$$

$$M = -\frac{16}{15} \log a - \frac{38}{15} \log b - \frac{1}{4} \log c$$

b)

$$M = \log \left[\frac{(a^5 b^6)^{-2}}{(c^4 a)^3} : \left(\frac{c^{-3} a^{-1}}{a^2 b^8} \right)^5 \right]^{\frac{1}{4}}$$

Solución 1: efectuando propiedades de potencias

$$M = \log \left[\frac{(a^5 b^6)^{-2}}{(c^4 a)^3} : \left(\frac{c^{-3} a^{-1}}{a^2 b^8} \right)^5 \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$M = \log \left[\frac{a^{-10} b^{-12}}{c^{12} a^3} : \frac{c^{-15} a^{-5}}{a^{10} b^{40}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$M = \log \left[\frac{1}{a^{13} b^{12} c^{12}} : \frac{1}{a^{15} b^{40} c^{15}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$M = \log \left[\frac{1}{a^{13} b^{12} c^{12}} \cdot \frac{a^{15} b^{40} c^{15}}{1} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$M = \log \left[\frac{a^{15} b^{40} c^{15}}{a^{13} b^{12} c^{12}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$M = \log \left[\frac{a^2 b^{28} c^3}{1} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$M = \log a^{1/2} b^7 c^{3/4}$$

$$M = \log a^{1/2} + \log b^7 + \log c^{3/4}$$

$$M = \frac{1}{2} \log a + 7 \log b + \frac{3}{4} \log c$$

Solución 2: utilizando directamente propiedades de logaritmos

$$M = \log \left[\frac{(a^5 b^6)^{-2}}{(c^4 a)^3} : \left(\frac{c^{-3} a^{-1}}{a^2 b^8} \right)^5 \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$M = \frac{1}{4} \log \left[\frac{(a^5 b^6)^{-2}}{(c^4 a)^3} : \left(\frac{c^{-3} a^{-1}}{a^2 b^8} \right)^5 \right]$$

$$M = \frac{1}{4} \left\{ \log \frac{(a^5 b^6)^{-2}}{(c^4 a)^3} - \log \left(\frac{c^{-3} a^{-1}}{a^2 b^8} \right)^5 \right\}$$

$$M = \frac{1}{4} \left\{ (\log(a^5 b^6))^{-2} - \log(c^4 a)^3 - 5 \log \frac{(c^{-3} a^{-1})}{a^2 b^8} \right\}$$

$$M = \frac{1}{4} \{-2 \log(a^5 b^6) - 3 \log(c^4 a) - 5[\log c^{-3} a^{-1} - \log a^2 b^8]\}$$

$$M = \frac{1}{4} \{-2[\log a^5 + \log b^6] - 3[\log c^4 + \log a] \\ - 5[\log c^{-3} + \log a^{-1} - [\log a^2 + \log b^8]]\}$$

$$M = \frac{1}{4} \{-2[5 \log a + 6 \log b] - 3[4 \log c + \log a] \\ - 5[[-3 \log c - \log a] - 2 \log a - 8 \log b]\}$$

$$M = \frac{1}{4} \{-10 \log a - 12 \log b - 12 \log c - 3 \log a + 15 \log c + 5 \log a + 10 \log a \\ + 40 \log b\}$$

$$M = \frac{1}{4} \{(-10 - 3 + 5 + 10) \log a + (-12 + 40) \log b + (-12 + 15) \log c\}$$

$$M = \frac{1}{4} \{2 \log a + 28 \log b + 3 \log c\}$$

$$M = \frac{1}{2} \log a + 7 \log b + \frac{3}{4} \log c$$

2) Expresa A como un único logaritmo, si:

$$a) \quad A = \log_a \sqrt[4]{z^3} + \log_a \sqrt[3]{z^2} + \log_a \sqrt{z^5} - \log_a \sqrt[6]{z^7} - \log_a \sqrt[12]{z} =$$

Solución 1:

$$A = \left(\log_a \sqrt[4]{z^3} + \log_a \sqrt[3]{z^2} + \log_a \sqrt{z^5} \right) - \left(\log_a \sqrt[6]{z^7} + \log_a \sqrt[12]{z} \right)$$

$$A = \left(\frac{3}{4} \log_a z + \frac{2}{3} \log_a z + \frac{5}{2} \log_a z \right) - \left(\frac{7}{6} \log_a z + \frac{1}{12} \log_a z \right)$$

$$A = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} \right) \log_a z - \left(\frac{7}{6} + \frac{1}{12} \right) \log_a z$$

$$A = \left(\frac{9 + 8 + 30}{12} \right) \log_a z - \left(\frac{14 + 1}{12} \right) \log_a z$$

$$A = \frac{47}{12} \log_a z - \frac{15}{12} \log_a z$$

$$A = \left(\frac{47}{12} - \frac{15}{12} \right) \log_a z$$

$$A = \frac{32}{12} \log_a z$$

$$A = \frac{8}{3} \log_a z$$

Solución 2 :

$$A = \log_a \left(\sqrt[4]{z^3} \cdot \sqrt[3]{z^2} \cdot \sqrt{z^5} \right) - \log_a \left(\sqrt[6]{z^7} \cdot \sqrt[12]{z} \right)$$

$$A = \log_a \left(z^{3/4} \cdot z^{2/3} \cdot z^{5/2} \right) - \log_a \left(z^{7/6} \cdot z^{1/12} \right)$$

$$A = \log_a \left(z^{(3/4 + 2/3 + 5/2)} \right) - \log_a \left(z^{(7/6 + 1/12)} \right)$$

$$A = \log_a \left(z^{47/12} \right) - \log_a \left(z^{15/12} \right)$$

$$A = \log_a \left(\frac{z^{47/12}}{z^{15/12}} \right)$$

$$A = \log_a \left(z^{32/12} \right)$$

$$A = \frac{8}{3} \log_a z$$

b)

$$A = \frac{3}{5} \log(x-3) - \frac{1}{3} \log x - \frac{5}{6} \log(x+1) + 2 \log z$$

Solución:

$$A = \log(x-3)^{3/5} - \log x^{1/3} - \log(x+1)^{5/6} + \log z^2$$

$$A = \left(\log(x-3)^{3/5} + \log z^2 \right) - \left(\log x^{1/3} + \log(x+1)^{5/6} \right)$$

$$A = \log \left((x-3)^{3/5} \cdot z^2 \right) - \log \left(x^{1/3} \cdot (x+1)^{5/6} \right)$$

$$A = \log \left(\frac{(x-3)^{3/5} \cdot z^2}{x^{1/3} \cdot (x+1)^{5/6}} \right)$$

6.3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuación exponencial: Es aquella ecuación en la cual la incógnita está en algún exponente.

Ejemplos

a) $5^{x^2+x} = 25^{x+6}$

b) $4^{x-3} \cdot 5^{2x-7} = 0,8$

c) $e^x - e^{-x} = 2$

Ecuación logarítmica: Es aquella ecuación en la que la incógnita aparece en el argumento de uno o más logaritmos.

Ejemplos

a) $\log(2x+1) + \log x = 1$

b) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

c) $\ln 12 - \ln(x-1) = \ln(x-2)$

6.3.1. Resolución de ecuaciones exponenciales.

Para resolver una ecuación exponencial podemos usar:

- 1) La propiedad: $a^x = a^m \Rightarrow x = m$ con $a > 0$, $a \neq 1$
- 2) Logaritmos y propiedades

Ejemplos

1) $5^{x^2+x} = 25^{x+6}$

$$5^{x^2+x} = (5^2)^{(x+6)}$$

$$5^{x^2+x} = 5^{2x+12}, \text{ aplicando propiedad de las potencias}$$

$$x^2 + x = 2x + 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -3$$

2) $3^{x+2} = 5^{x-1}$ /log , ya que son potencias de bases distintas

$$(x + 2) \log 3 = (x - 1) \log 5$$

$$x \log 3 + 2 \log 3 = x \log 5 - \log 5$$

$$x(\log 3 - \log 5) = -\log 5 - 2 \log 3$$

$$x = \frac{-\log 5 - 2 \log 3}{\log 3 - \log 5}$$

$$x = \frac{-0,699 - 0,954}{0,477 - 0,699}$$

$$x = \frac{1,653}{0,222} = 7,446$$

3) $e^x - e^{-x} = 2 \Rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 2$ / $e^x > 0$

$$\Rightarrow e^{2x} - 1 = 2e^x \Rightarrow e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (e^x)^2 - 2(e^x) - 1 = 0, \quad \text{sea } z = e^x$$

$$z^2 - 2z - 1 = 0$$

$$z = 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{pero } z = e^x$$

$$e^x = 1 + \sqrt{2} \quad / \ln, \text{ ya que } e^x > 0, \forall x$$

$$\ln e^x = \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$x \ln e = \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$x = \ln(1 + \sqrt{2})$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales.

$$1) (0,3)^{x+1} = (0,0243)^{2x-1} \quad \text{Sol. } x = 0,7898$$

$$2) a^{2x} \cdot b^{3x} = c^5 \quad \text{Sol. } x = \frac{5 \log c}{2 \log a + 3 \log b}$$

$$3) 10 \cdot 5^{x+1} = 3^{x-1} \quad \text{Sol. } x = \frac{\log 150}{\log 3 - \log 5}$$

$$4) 3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750 \quad \text{Sol. } x = 5$$

$$5) 3^{x+3} + 9^{x+2} = 4 \quad \text{Sol. } x = -2$$

6.3.2. Resolución de ecuaciones logarítmicas

Para resolver una ecuación logarítmica, se expresan ambos miembros de la ecuación como logaritmos únicos y luego se aplica la definición de logaritmo o la propiedad:

$$\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow A = B.$$

Ejemplos

$$1) \log(4x + 5) - \log(x + 2) = \log(7x - 1) - \log(5x - 3)$$

$$\log\left(\frac{4x + 5}{x + 2}\right) = \log\left(\frac{7x - 1}{5x - 3}\right)$$

$$\frac{4x + 5}{x + 2} = \frac{7x - 1}{5x - 3}$$

$$20x^2 + 13x - 15 = 7x^2 + 13x - 2$$

$$13x^2 - 13 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1. \text{ Pero } x = -1 \text{ no es solución}$$

Por lo tanto la solución es $x = 1 \quad \therefore S = \{1\}$.

$$2) \log \sqrt{x-1} + \log \sqrt{x+4} - \log(x-1) = 0$$

$$\log \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}}{x-1} = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x+4}}{x-1} = 10^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = x + 1 \quad /(\)^2$$

$$x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2x + 1$$

$$x = 5 \quad \therefore S = \{5\}.$$

$$3) \ln 12 - \ln(x-1) = \ln(x-2)$$

$$\ln\left(\frac{12}{x-1}\right) = \ln(x-2)$$

$$\frac{12}{x-1} = x-2$$

$$(x-2)(x-1) = 12$$

$$x^2 - 3x + 2 = 12$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

$$x = 5$$

$$x = -2 \text{ no es solución, ya que } \ln(-4) \nexists \text{ y } \ln(-3) \nexists \quad \therefore S = \{5\}.$$

$$4)$$

$$\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$$

Cambiar a base 10 para simplificar

$$\frac{\log 2}{\log x} \cdot \frac{\log 2}{\log \frac{x}{16}} = \frac{\log 2}{\log \frac{x}{64}}$$

$$\frac{(\log 2)^2}{\log x (\log x - \log 16)} = \frac{\log 2}{\log x - \log 64}$$

$$(\log 2)^2 (\log x - \log 64) = \log 2 ((\log x)^2 - \log x \log 16)$$

$$\log 2 \log x - \log 2 \log 64 = (\log x)^2 - \log x \log 16$$

$$(\log x)^2 - (\log 2 + \log 16) \log x + \log 2 \log 64 = 0$$

$$(\log x)^2 - (\log 2 + \log 2^4) \log x + \log 2 \log 2^6 = 0$$

$$(\log x)^2 - 5 \log 2 \log x + 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x - 3 \log 2)(\log x - 2 \log 2) = 0$$

$$\log x = 3 \log 2 \quad \vee \quad \log x = 2 \log 2$$

$$x = 2^3 = 8 \qquad x = 2^2 = 4 \qquad \therefore S = \{4, 8\}.$$

NOTA

El ejercicio anterior también se puede resolver en base 2.
¡Verifíquelo!

• Ejercicios Resueltos

1) Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$x^{\log_2 x} = 8x^2$$

Solución:

$$x^{\log_2 x} = 8x^2 \dots (*)$$

Para resolver la ecuación (*), aplicamos la propiedad:

$$A = B \Leftrightarrow \log_2 A = \log_2 B$$

Aplicamos $\log_2$ a la ecuación (*)

$$\log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2(8x^2)$$

$$(\log_2 x)(\log_2 x) = \log_2 8 + \log_2 x^2$$

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x = 3$$

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 3 = 0 \quad \text{Ecuación de segundo grado con incógnita } \log_2 x$$

$$\text{Sea } u = \log_2 x$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$(u - 3)(u + 1) = 0$$

$$u - 3 = 0 \quad \vee \quad u + 1 = 0$$

$$u = 3 \quad \quad \quad u = -1$$

$$\log_2 x = 3 \quad \vee \quad \log_2 x = -1$$

$$x = 2^3 \quad \quad \quad x = 2^{-1}$$

$$x = 8 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{solución de } x^{\log_2 x} = 8x^2 \text{ es } S = \left\{\frac{1}{2}, 8\right\}.$$

$$2) 2(7^{\log_a x}) + 5(x^{\log_a 7}) = 343$$

Solución:

$$2(7^{\log_a x}) + 5(x^{\log_a 7}) = 343$$

$$2(7^{\log_a x}) + 5(7^{\log_a x}) = 343$$

$$7(7^{\log_a x}) = 7^3 \quad / \cdot \frac{1}{7}$$

$$(7^{\log_a x}) = 7^2$$

$$\log_a x = 2$$

$$x = a^2$$

$$\therefore S = \{a^2\}.$$

(*) Muestre que $(x^{\log_a 7}) = (7^{\log_a x})$ usando la propiedad de cambio de base.

6.4. Sistemas de ecuaciones no lineales que involucran logaritmos, exponenciales y radicales

Como su nombre lo indica son sistemas de ecuaciones que contienen ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas y ecuaciones con radicales

Para resolver estos tipos de ecuaciones no hay un método determinado. Según el tipo de sistema se sugiere aplicar todas las propiedades de logaritmo y/o de potencias necesarios, hasta transformar el sistema dado a un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve según lo tratado en la unidad cuatro.

Resolveremos algunos sistemas con dos ecuaciones y dos incógnitas que contengan ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas.

Ejemplos:

1) Resolver el sistema de dos ecuaciones exponenciales:

$$\begin{array}{l|l} 6^x = 2^y & \text{/aplicamos logaritmo } (A = B \Leftrightarrow \log A = \log B) \\ 6^x = 6^{y-1} & \text{/aplicamos } (a^x = a^m \Rightarrow x = m) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x \log 6 = y \log 2 & \therefore \text{reemplazamos el valor de } x \text{ en la 1ª ecuación,} \\ x = y - 1 & \text{se tiene:} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & (y - 1) \log 6 = y \log 2 \\ & y \log 6 - \log 6 = y \log 2 \\ & y(\log 6 - \log 2) = \log 6 \\ & y \left(\log \frac{6}{2} \right) = \log 6 \\ & y(\log 3) = \log 6 \\ & y = \frac{\log 6}{\log 3} \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{\log 6}{\log 3} - 1 = \frac{\log 6 - \log 3}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{\log 2}{\log 3}, \frac{\log 6}{\log 3} \right) \right\}$$

2) Resolver el sistema:

$$\begin{array}{l|l} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 y^3) = 5 & \text{/aplicamos propiedad de logaritmos} \\ xy^{-2} = 2^8 & \text{/aplicamos logaritmo en base } \frac{1}{2}, \text{ puesto que aparece en la} \\ & \text{1ª ecuación. } \left\{ x \cdot y^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \log_{\frac{1}{2}} x^2 + \log_{\frac{1}{2}} y^3 = 5 & \\ \log_{\frac{1}{2}} x - 2\log_{\frac{1}{2}} y = -8\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2\log_{\frac{1}{2}} x + 3\log_{\frac{1}{2}} y = 5 & \\ \log_{\frac{1}{2}} x - 2\log_{\frac{1}{2}} y = -8 & \end{array}$$

Sean

$$u = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$v = \log_{\frac{1}{2}} y$$

$$\begin{array}{l|l} 2u + 3v = 5 & \\ u - 2v = -8 & /(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2u + 3v = 5 & \\ -2u + 4v = 16 & \\ \hline 7v = 21 & \\ v = 3 & \end{array}$$

$$u = -8 + 2v$$

$$u = -8 + 6$$

$$u = -2$$

Pero,

$$\text{i) } u = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\Rightarrow -2 = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = x$$

$$2^2 = x \Rightarrow x = 4$$

$$\text{ii) } v = \log_{\frac{1}{2}} y \Rightarrow 3 = \log_{\frac{1}{2}} y$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$y = \frac{1}{8}$$

$$S = \left\{ \left(4, \frac{1}{8} \right) \right\}$$

3) Resolver:

$$\begin{array}{l} 10^{x+2y} = 2 \\ \log 3x - \log 2y = 1 \end{array}$$

Aplicando logaritmo en base 10 y propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\begin{array}{l} (x + 2y) \log 10 = \log 2 \\ \log \left(\frac{3x}{2y} \right) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = \log 2 \\ 10^1 = \frac{3x}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = \log 2 \dots (*) \\ 2y = \frac{3x}{10} \dots\dots (**) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = \log 2 \quad / \cdot 3 (*) \\ -3x + 20y = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y = 3\log 2 \\ -3x + 20y = 0 \end{array} \right\} \text{sumando ambas ecuaciones se tiene:}$$

$$26y = 3\log 2$$

$$y = \frac{3}{26}\log 2$$

Despejamos x en (*)

$$x + 2\frac{3}{26}\log 2 = \log 2 \text{ /multiplicando por 13}$$

$$13x + 3\log 2 = 13\log 2$$

$$13x = 10\log 2$$

$$x = \frac{10}{13}\log 2$$

$$\therefore S = \left\{ \left(\frac{10}{13}\log 2, \frac{3}{26}\log 2 \right) \right\}$$

4) Resolver:

$$\left. \begin{array}{l} xy = 1 \\ (2y)^2 = 2^{-2\log x} \end{array} \right| \text{Aplicando logaritmos se tiene:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 0 \\ \log x \log 2 + \log y = -\log 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{restamos la segunda ecuaci3n} \\ \text{de la primera} \end{array}$$

$$(\log 2 - 1)\log x = -\log 2$$

$$\log x = \frac{-\log 2}{\log 2 - 1} = \frac{-\log 2}{\log 2 - \log 10} = \frac{-\log 2}{\log 2 - (\log 2 + \log 5)}$$

$$\log x = \frac{\log 2}{\log 5} \Rightarrow x = 10^{\frac{\log 2}{\log 5}}$$

Reemplazando x en E1:

$$\log y = -\log x$$

$$\log y = -\frac{\log 2}{\log 5}$$

$$\Rightarrow y = 10^{-\frac{\log 2}{\log 5}}$$

$$S = \left\{ \left(10^{\frac{\log 2}{\log 5}}, 10^{-\frac{\log 2}{\log 5}} \right) \right\}$$

5)

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cdot e^y = 2 \\ e^x = 8e^y \end{array} \right| / \ln \quad \left. \begin{array}{l} \ln e^x + \ln e^y = \ln 2 \\ \ln e^x = \ln 8e^y \end{array} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot 1 + y \cdot 1 = \ln 2 \\ x \cdot 1 - y \cdot 1 = \ln 8 = 3 \ln 2 \end{array} \right| \text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos}$$

$$2x = \ln 2 + 3 \ln 2$$

$$2x = 4 \ln 2$$

$$x = 2 \ln 2$$

$$x = \ln 2^2$$

$$x = \ln 4$$

$$y = \ln 2 - x$$

$$y = \ln 2 - \ln 4$$

$$y = \ln \left(\frac{2}{4} \right)$$

$$y = \ln \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ \left(\ln 4, \ln \frac{1}{2} \right) \right\}$$

6)

$$\left. \begin{array}{l} \log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \\ \log_2 \frac{x}{y} = \log_{\frac{1}{2}} 8 \end{array} \right|$$

Escribimos ambas ecuaciones en la misma base 2.

$$\begin{array}{l} \log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \\ \log_2 x - \log_2 y = \frac{\log_2 8}{\log_2 \frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log_2 x + \log_2 y = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = \frac{3 \log_2 2}{-1} = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = -3 \end{array} \quad \text{Sumamos ambas ecuaciones}$$

$$\begin{array}{l} 2 \log_2 x = 0 \quad / \frac{1}{2} \\ \log_2 x = 0 \\ x = 2^0 \\ x = 1 \end{array}$$

Reemplazando x en Ecuación 1:

$$\log_2 y = 3 - \log_2 x$$

$$\begin{array}{l} \log_2 y = 3 - \log_2 1 = 3 - 0 \\ \log_2 y = 3 \\ y = 2^3 \\ y = 8 \end{array}$$

$$S = \{(1, 8)\}$$

7) Resolver

$$\begin{array}{l} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log(x + y)(x - y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \dots / \ln \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x+y)(x-y) = 33 \\ x+y = 11 \end{array} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} 11(x-y) = 33 \\ x+y = 11 \end{array} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} x-y = 3 \\ x+y = 11 \end{array} \right|$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

$$y = 11 - 7$$

$$y = 4$$

$$S = \{(7,4)\}$$

8) Resolver $\left. \begin{array}{l} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = 3 \end{array} \right\}$ usando método de reducción eliminamos 3^y y obtenemos.

$$2 \cdot 2^x = 8$$

$$2^x = 4 \quad \therefore x = 2$$

Aplicando el mismo método para eliminar 2^x tenemos: $2 \cdot 3^y = 2$

$$3^y = 1 \quad \therefore y = 0$$

$$S = \{(2,0)\}$$

$$9) \text{ Resolver } \left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = 2 \\ \sqrt{x-y} + 2\sqrt{2x} = 5 \end{array} \right\}$$

Si despejamos x en Ecuación 1, tenemos: $x = 2y$, con $y \neq 0$.

Reemplazamos en Ecuación 2 se tiene:

$$\sqrt{2y-y} + 2\sqrt{2(2y)} = 5$$

$$\sqrt{y} + 4\sqrt{y} = 5$$

$$5\sqrt{y} = 5 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 1 \therefore x = 2$$

$$S = \{(2,1)\}$$

10) Resolver
$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x + y} + y = x \end{cases}$$

Si despejamos y en Ecuación 1 ($y = 2x - 9$) para reemplazar en Ecuación 2 se tiene: $\sqrt{x + (2x - 9)} + (2x - 9) = x$

$$\sqrt{3x - 9} = 9 - x \quad / \text{ elevando al cuadrado}$$

$$3x - 9 = 81 - 18x + x^2$$

$$x^2 - 21x + 90 = 0$$

$$(x - 15)(x - 6) = 0, \text{ entonces:}$$

$$x = 15 \quad \vee \quad x = 6$$

$$x = 15 \Rightarrow y = 21 \quad (\text{no es solución})$$

$$x = 6 \Rightarrow y = 3$$

$$\therefore S = \{(6,3)\}$$

6.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

- Determine el valor de x en las siguientes expresiones:
 - $\log_{0,008} x = \frac{1}{3}$ Resp.: $x = \frac{1}{5}$
 - $\log_x 8 = -\frac{3}{4}$ Resp.: $x = \frac{1}{6}$
 - $\log_{\frac{1}{25}}(32 \cdot 10^{-5}) = x$ Resp.: $x = \frac{5}{2}$
 - $\log_5 3^{-2\log_3 5} = x$ Resp.: $x = -2$
- Expresa x en forma de logaritmo, si $a^x = \sqrt{p+q}$. Resp.: $\log_a \sqrt{p+q} = x$
- Demuestre que:
 - $\log \frac{75}{16} - 2\log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2$
 - $\frac{1}{2} \ln(a^2 + 3a - 4) - \frac{3}{2} \ln(2a - 1) + \ln \sqrt{\frac{1}{a+4} - \frac{4(a+5)}{a^2+3a-4} + \frac{5}{a-1}} = -\ln(2a - 1)$
- Aplicando propiedades de logaritmos:
 - Calcule el valor de la expresión: $\log_2 3 + \log_{\frac{1}{2}} 3$ Resp.: 0
 - Escriba el desarrollo de:

$$\log \frac{a^3 \sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[3]{\frac{b}{c^{-2}}}}$$
 Resp.: $3 \log a + \frac{1}{5} \log b - \frac{2}{3} \log c$
 - Expresa en un solo logaritmo :

$$\frac{1}{2} \log a + \frac{3}{2} \log b - \frac{1}{2} \log c - \frac{1}{2} \log d$$
 Resp.: $\log \sqrt{\frac{a b^3}{c d}}$
 - Determine el valor numérico de: $4^{\log_x \sqrt{x}}$ Resp.: 2
- Si $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$ determine el valor de $\log 120$, sin usar calculadora. Resp.: 2,0791
- Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones exponenciales:
 - $6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20$ Resp.: $S = \{\log_{54} 18\}$
 - $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$ Resp.: $S = \left\{2, \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3}\right\}$
 - $7^{x+1} \cdot 2^{x-1} = 686$ Resp.: $S = \{2\}$
- Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones logarítmicas:
 - $2 \log_3(x+2) = \log_3 9$ Resp.: $S = \{1\}$

$$\text{b) } \log_8(x-6) + \log_8(x+6) = \log_{2\sqrt{2}} 8$$

$$\text{Resp.: } S = \{10\}$$

$$\text{c) } 1 + \log(x+1) - \{2 - \log(x-2)\} = 0$$

$$\text{Resp.: } S = \{4\}$$

8. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Resp.: } x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ y^{\log_y x^2} + x^{\log_x y^2} = (xy)^{\log_{xy} 5} \end{cases}$$

$$\text{Resp.: } S = \emptyset$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$$

$$\text{Resp.: } S = \{(3,2)\}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Resp.: } S = \{(17,8)\}$$

PRUEBAS AÑOS ANTERIORES

Se indican a continuación algunas pruebas realizadas en la asignatura Introducción al Álgebra. Cada una de ellas tiene Temas específicos que corresponden a una o más unidades, de acuerdo al avance de los contenidos en el año correspondiente. Cabe señalar que en algunos años se tomaron tres pruebas y en otros cuatro.

PRUEBA 1

- 1.- Sean x, y, z, v números naturales tales que tres de ellos son primos entre sí. Determine x, y, z, v si: x e y son impares consecutivos cuya suma es 32, z es un número consecutivo a uno de los anteriores y máximo común divisor de 54 y 72, v es un número que es múltiplo de 2 mayor que 23 y menor que 30 pero no admite como divisor al 4.
- 2.- a) Dada la expresión $\frac{5}{7} + \frac{4}{9} + \frac{125}{990}$, resuelva e indique su respuesta en forma decimal.
- b) Dada $(3, \bar{4} + 1,3\bar{5})$. Transforme a fracción, resuelva e indique la respuesta en forma fraccionaria.
- 3.- Simplifique al máximo

$$\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 4^{-1}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321}{0,004321} - \frac{960,3}{0,9603} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

- 4.- a) Calcule:

$$E = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3} + 1}} - \frac{\sqrt[3]{5^5}}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} + 1}\right) - \frac{1}{5}$$

- b) Racionalice y simplifique: $\frac{2}{3+\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Desarrollo

Solución pregunta 1.

Si x e y son impares consecutivos cuya suma es 32 entonces se tiene:

$$x = 2n - 1, \quad y = 2n + 1, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

$$x + y = 2n - 1 + 2n + 1 = 32$$

$$4n = 32 \quad \therefore \quad n = 8$$

Luego $x = 15$, $y = 17$.

Si z es un número consecutivo a uno de los anteriores y máximo común divisor de 54 y 72 entonces calculamos $MCD\{54,72\}$

$$\left. \begin{array}{l} 54 = 2 \cdot 3^3 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array} \right\} 2 \cdot 3^2 = 18 \quad \therefore MCD\{54,72\} = 18 \quad \text{y es sucesor de } y = 17, \text{ luego } z = 18.$$

Si v es un número múltiplo de 2 mayor que 23 y menor que 30, entonces los números que están entre 23 y 30 son: 24, 26 y 28. Pero no admite como divisor al 4, luego $v = 26$

Solución pregunta 2a.

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} + \frac{4}{9} + \frac{125}{990} &= \frac{5 \cdot 990 + 4 \cdot 7 \cdot 110 + 125 \cdot 7}{990 \cdot 7} \\ &= \frac{4950 + 3080 + 875}{6930} \\ &= \frac{8905 : 5}{6930 : 5} = \frac{1781}{1386} = 1,2849927 \end{aligned}$$

Solución pregunta 2b.

$$\begin{aligned} 3,\bar{4} + 1,3\bar{5} &= \frac{34-3}{9} + \frac{135-13}{90} \\ &= \frac{31}{9} + \frac{122}{90} = \frac{310+122}{90} \\ &= \frac{432 : 18}{90 : 18} = \frac{24}{5} . \end{aligned}$$

Solución pregunta 3.

$$\begin{aligned}
 \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 4^{-1}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321}{0,004321} - \frac{960,3}{0,9603} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321}{4,321 \cdot 10^{-3}} - \frac{960,3}{960,3 \cdot 10^{-3}} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{6-1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{1}{10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1}{\sqrt{\frac{1}{625}}} = \frac{\frac{16}{25} - 1}{\frac{1}{25}} \\
 &= \frac{-\frac{9}{25}}{\frac{1}{25}} = -9.
 \end{aligned}$$

Solución pregunta 4a.

$$E = \frac{\frac{\sqrt[3]{5^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}}{\sqrt[3]{5^2}}}{\frac{\sqrt[3]{5^3} + 1}{\sqrt[3]{5^3} + 1}} - \frac{\sqrt[3]{5^5}}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} + 1}\right) - \frac{1}{5}$$

Sean $\alpha = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3} + 1}}$, $\beta = \frac{\sqrt[3]{5^5}}{5}$ y $\gamma = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} + 1}$ Así, $E = \alpha - \beta \cdot \gamma - \frac{1}{5}$

Calculando α, β, γ :

$$\alpha = \frac{\frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} + 1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5+1}} = \frac{\frac{5+1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{6}} = \frac{6}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{6}{\sqrt[3]{5^2}} \quad \therefore \alpha = \frac{36}{5}$$

$$\beta = \frac{\sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2}}{5} = \frac{5 \sqrt[3]{5^2}}{5} \quad \therefore \beta = \sqrt[3]{5^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego, } \beta \cdot \gamma &= \sqrt[3]{5^2} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} + 1}\right) \\
 &= \frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} + 1} = \frac{\sqrt[3]{5^4} + \sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{5} + 1} = \frac{5 \sqrt[3]{5} + 5}{\sqrt[3]{5} + 1} = \frac{5(\sqrt[3]{5} + 1)}{\sqrt[3]{5} + 1} \quad \therefore \beta \cdot \gamma = 5.
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$E = \alpha - \frac{1}{5} - \beta \cdot \gamma = \frac{36}{5} - \frac{1}{5} - 5 = \frac{35}{5} - 5 = 7 - 5 \quad \therefore E = 2.$$

Alternativa:

$$\gamma = \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5}+1)}{\sqrt[3]{5}+1} = \sqrt[3]{5}. \quad \therefore \gamma = \sqrt[3]{5}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E &= \alpha - \frac{1}{5} - \beta \cdot \gamma \\ &= \frac{36}{5} - \frac{1}{5} - \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \frac{35}{5} - \sqrt[3]{5^3} = 7 - 5 = 2 \quad \therefore E = 2. \end{aligned}$$

Solución pregunta 4b.

Sea $\frac{2}{3+\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = (*)$ entonces racionalizando se tiene:

$$(*) = \underbrace{\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}} \right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \right)} - \underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \right)}$$

$$(*) = \underbrace{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} - \underbrace{\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}} \text{ simplificando se tiene que:}$$

$$(*) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}-3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$$

Luego, reduciendo se tiene

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3-4\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}.$$

PRUEBA 1

1.- Determinar:

- a) El sucesor de un número par natural. (escriba primero el par natural y luego su sucesor)
- b) El antecesor de un número impar entero. (escriba primero el impar entero y luego su antecesor.
- c) El o los números primos que es factor o son factores comunes de 104 y 24.
- d) máximo común divisor de los números 144 y 36.
- e) El mínimo común múltiplo de los números 12, 24, 16 y 5.
- f) El valor de $\frac{a}{b}$. Si a es igual a la mitad de b.

2.- Simplificar:

$$\frac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} + \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{7}{20} \cdot \frac{11}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \\ \frac{4 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{5 - \frac{1}{5}}{24}$$

3.- Reducir:

$$\left(y^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(2x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{5}{3}} - 7x^{\frac{7}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} + 9x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \right) + 2(xy+1)^2 - xy(7x^2 - 16x + 13)$$

4.- Demostrar que:
$$\frac{(16)^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot (125)^{-3}}{4^2 \cdot 5^{-1} \cdot 9^{-2}} + \frac{(25)^{-3} \cdot 4^5 \cdot 2^{-3} \cdot 9 \cdot 3^6}{8 \cdot 27} = \left(\frac{6}{5} \right)^4 \cdot \frac{84}{25}$$

5.- Multiplicar aplicando productos notables:

a)
$$\left[(x^2 - x) + (x^3 - 1) \right] \cdot [x^3 - x^2 - (1 - x)]$$

b)
$$(a^{x+1} + b^{x-1} - a^{-x})^2$$

Desarrollo

Solución pregunta 1.a) $2n, n \in \mathbb{N}$ es el par natural, su sucesor es $2n+1$

Solución pregunta 1.b) $2n+1, n \in \mathbb{Z}$ es el impar entero, su antecesor es $2n$

Solución pregunta 1.c) Los factores de 104 son : 104, 52, 26, 13, 2, 4, 8, 1
Los factores de 24 son: 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1
factor común primo es el 2.

Solución pregunta 1.d)

36 es un divisor de 144, luego 36 es el máximo común divisor.

Solución pregunta 1.e)

12 es un divisor de 24, 5 es un primo entre sí con el 24 y el 16, luego

$$\begin{array}{r|l} 24 & 16 \\ \hline 12 & 8 \\ 6 & 4 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Luego el mcm = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

Solución pregunta 1.f) Si a es igual a la mitad de b, entonces $a = \frac{b}{2}$, luego

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{b} = \frac{1}{2}$$

Solución pregunta 2.

$$\begin{aligned} & \frac{10-2}{\frac{5}{4} + \frac{9-1}{4}} = \frac{\frac{8}{4}}{\frac{5}{4} + \frac{8}{4}} \\ & = \frac{\frac{8}{4}}{\frac{13}{4}} = \frac{8}{13} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \frac{8}{\frac{5}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{\frac{8}{4}}{\frac{13}{4}} \\ & = \frac{8}{13} \end{aligned}$$

Simplificando, y también multiplicando, tenemos

$$= \frac{2+2}{\frac{15}{2} + \frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{77}{40} \right) - \frac{85}{144} = \frac{4}{\frac{75+2}{10}} \cdot \frac{77}{40} - \frac{85}{144} = \frac{40}{77} \cdot \frac{77}{40} - \frac{85}{144} = 1 - \frac{85}{144} = \frac{144-85}{144} = \frac{59}{144}$$

Solución pregunta 3.

Multiplicando término a término y desarrollando los cuadrados, tenemos

$$= (2xy^2 - 7x^2y + 9xy - 2x^2y^2 + 7x^3y - 9x^2y) + 2x^2y^2 + 4xy + 2 - 7x^3y + 16x^2y - 13xy$$

Reduciendo términos semejantes, nos queda $= 2xy^2 + 2$

Demostración 4.

$$= \frac{(2^4)^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot (5^3)^{-3}}{(2^2)^2 \cdot 5^{-1} \cdot (3^2)^{-2}} + \frac{(5^2)^{-3} \cdot (2^2)^5 \cdot 2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^3}$$

$$= \frac{2^8 \cdot 5^2 \cdot 3^4 \cdot 5^{-9}}{2^4 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-4}} + \frac{5^{-6} \cdot 2^{10} \cdot 2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^3}$$

Aplicando propiedades de potencia, tenemos

$$= \frac{2^4 \cdot 3^8}{5^6} + \frac{2^4 \cdot 3^5}{5^6} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3}{5^4 \cdot 5^2} = \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot 3^4 + (2 \cdot 3)^4 \cdot 3}{5^4 \cdot 5^2}$$

$$= \frac{(2 \cdot 3)^4 [3^4 + 3]}{5^4 \cdot 5^2} = \frac{6^4 \cdot 84}{5^4 \cdot 5^2} = \left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot \frac{84}{25}$$

Solución pregunta 5.a)

$$[(x^2 - x) + (x^3 - 1)] \cdot [x^3 - x^2 - 1 + x] = [x^3 - 1 + (x^2 - x)] \cdot [x^3 - 1 - (x^2 - x)]$$

Aplicando suma por su diferencia, tenemos

$$(x^3 - 1)^2 - (x^2 - x)^2 = x^6 - 2x^3 + 1 - x^4 + 2x^3 - x^2$$

$$= x^6 + 1 - x^4 - x^2$$

Solución pregunta 5.b)

$$(a^{x+1} + b^{x-1} - a^{-x})^2 = a^{2(x+1)} + b^{2(x-1)} + a^{-2x} + 2a^{x+1}b^{x-1} - 2a^{x+1}a^{-x} - 2b^{x-1}a^{-x}$$

$$= a^{2(x+1)} + b^{2(x-1)} + a^{-2x} + 2a^{x+1}b^{x-1} - 2a - 2b^{x-1}a^{-x}$$

PRUEBA 1

1. Calcule el valor de la expresión:

$$\left(2 + \frac{3}{5}\right) \div \left(1 - \frac{2}{5}\right) + 6 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{-\left(-\frac{4}{5}+8\right)}{1-\frac{\frac{4}{5}-8}{-\frac{4}{5}-8}}$$

2. Sea a un número entero impar. Demuestre que $(a+1)^p + 18$ es número entero par, donde $p \in \mathbb{N}$.

3. Simplifique al máximo:

$$\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 4^{-1}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321}{0,004321} - \frac{960,3}{0,9603} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

4. Calcule el valor de:

$$E = \frac{\frac{\sqrt[3]{5^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3+1}}} - \frac{\sqrt[3]{5^5}}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} + 1}\right) - \frac{1}{5}}$$

5. Racionalice y simplifique:

$$\frac{2}{3 + \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

Desarrollo

Solución pregunta 1.

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{3}{5}\right) \div \left(1 - \frac{2}{5}\right) + 6 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{-\left(-\frac{4}{5}+8\right)}{1-\frac{\frac{4}{5}-8}{-\frac{4}{5}-8}} &= \left(\frac{13}{5}\right) \div \left(\frac{3}{5}\right) + 6 - \frac{7}{3} - \frac{-\left(\frac{36}{5}\right)}{1-\frac{\frac{36}{5}-\frac{44}{5}}{\frac{36}{5}}}} \\ &= \left(\frac{13}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + \frac{18-7}{3} - \frac{-\left(\frac{36}{5}\right)}{1-\frac{36}{5} \cdot \frac{5}{44}} \\ &= \left(\frac{13}{3} + \frac{11}{3}\right) - \frac{-\left(\frac{36}{5}\right)}{1-\frac{9}{11}} = \left(\frac{24}{3}\right) - \frac{-\left(\frac{36}{5}\right)}{\frac{2}{11}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 + \frac{36}{5} \cdot \frac{11}{2} = 8 + \frac{18 \cdot 11}{5} = 8 + \frac{198}{5} \\
&= \frac{40+198}{5} = \frac{238}{5}
\end{aligned}$$

Solución pregunta 2.

a entero impar $\Leftrightarrow a = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\text{Reemplazando } (a+1)^p + 18 &= (2k - 1 + 1)^p + 18 \\
&= (2k)^p + 18 \\
&= 2^p \cdot k^p + 18 \\
&= 2 \cdot 2^{p-1} \cdot k^p + 18 \\
&= 2 \cdot (2^{p-1} \cdot k^p + 9)
\end{aligned}$$

Sea $r = (2^{p-1} \cdot k^p + 9)$

Como $k \in \mathbb{Z}$ entonces $k^p \in \mathbb{Z}$, además $2^{p-1} \in \mathbb{Z} \wedge 9 \in \mathbb{Z}$, luego por la propiedad de clausura en la adición y multiplicación en $\mathbb{Z}$, se tiene que:

$$r = (2^{p-1} \cdot k^p + 9) \in \mathbb{Z}, \text{ donde } p \in \mathbb{N} \quad \therefore (a+1)^p + 18 = 2r \quad \text{es par.}$$

Solución pregunta 3.

Opción 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 4^{-1}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321}{0,004321} - \frac{960,3}{0,9603} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321 \cdot 10^0}{4,321 \cdot 10^{-3}} - \frac{9,603 \cdot 10^2}{9,603 \cdot 10^{-1}} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\left(\frac{6-1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{10^3 - 10^3 + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{16}{25} - 1}{\frac{1}{25}} = \frac{-\frac{9}{25}}{\frac{1}{25}} = -9
\end{aligned}$$

Opción 2:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 4^{-1}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321}{0,004321} - \frac{960,3}{0,9603} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321 \cdot 10^{-3}}{4,321 \cdot 10^{-6}} - \frac{9,603 \cdot 10^{-1}}{9,603 \cdot 10^{-4}} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(\frac{6-1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{10^3 - 10^3 + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{16}{25} - 1}{\frac{1}{25}} = \frac{-\frac{9}{25}}{\frac{1}{25}} = -9 \end{aligned}$$

Opción 3:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 4^{-1}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{4,321}{0,004321} - \frac{960,3}{0,9603} + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{\frac{\frac{4321}{1000}}{4321} - \frac{\frac{9603}{10}}{9603} + 1}{\frac{1000000}{10000}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{6-1}{4}\right)^{-2} - 1}{\left(\frac{1000 - 1000 + 1}{625}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\frac{16}{25} - 1}{\frac{1}{25}} = \frac{-\frac{9}{25}}{\frac{1}{25}} = -9 \end{aligned}$$

Solución pregunta 4.

Sean $\alpha = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3+1}}}$, $\beta = \frac{\sqrt[3]{5^5}}{5}$ y $\gamma = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}+1}$.

Así, $E = \alpha - \beta \cdot \gamma - \frac{1}{5}$.

Calculando α, β, γ :

$$\alpha = \frac{\frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} + 1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5+1}} = \frac{\frac{5+1}{\sqrt[3]{5}}}{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{6}} = \frac{6}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{6}{\sqrt[3]{5^2}} \quad \therefore \alpha = \frac{36}{5}$$

$$\beta = \frac{\sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2}}{5} = \frac{5 \sqrt[3]{5^2}}{5} \quad \therefore \beta = \sqrt[3]{5^2}.$$

Luego,

$$\beta \cdot \gamma = \sqrt[3]{5^2} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{5^2+3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{5+1}} \right) = \frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^2+3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{5+1}} = \frac{\sqrt[3]{5^4+3\sqrt{5}^3}}{\sqrt[3]{5+1}} = \frac{5\sqrt[3]{5+5}}{\sqrt[3]{5+1}} = \frac{5(\sqrt[3]{5+1})}{\sqrt[3]{5+1}}$$

$$\therefore \beta \cdot \gamma = 5.$$

Finalmente,

$$E = \alpha - \frac{1}{5} - \beta \cdot \gamma = \frac{36}{5} - \frac{1}{5} - 5 = \frac{35}{5} - 5 = 7 - 5 \quad \therefore E = 2.$$

Alternativa:

$$\gamma = \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5+1})}{\sqrt[3]{5+1}} = \sqrt[3]{5}. \quad \therefore \gamma = \sqrt[3]{5}$$

Entonces,

$$E = \alpha - \frac{1}{5} - \beta \cdot \gamma = \frac{36}{5} - \frac{1}{5} - \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \frac{35}{5} - \sqrt[3]{5^3} = 7 - 5 = 2 \quad \therefore E = 2.$$

Solución pregunta 5.

$$\text{Sea } \frac{2}{3+\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = (*) \text{ entonces}$$

$$(*) = \underbrace{\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}} \right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \right)}_{\text{}} - \underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \right)}_{\text{}}$$

$$(*) = \underbrace{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}_{\text{}} - \underbrace{\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}}_{\text{}} \text{ simplificando se tiene que:}$$

$$\left. \begin{aligned} (*) &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}-3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \\ \text{reduciendo tenemos que:} \\ \frac{2}{3+\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{3-4\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\}$$

PRUEBA 1

1. a) Si $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$, $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$. Ordene de menor a mayor.
- b) Agrupe los números racionales en un conjunto A y los números irracionales en un conjunto B.
 $\frac{2}{3}$; $-\sqrt{7}$; $0,4$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\sqrt{169}$; $\frac{21}{3}$; e ; $\sqrt{18}$; $\frac{-6}{5}$; -2 ; 0 ; $3,15193$
- c) Halle números primos entre 2 y 20, que se puedan expresar en la forma $6x-1$, $x \in \mathbb{N}$.

- 2.- a) Use la propiedad distributiva para calcular la siguiente expresión:

$$-\frac{4}{5} \left(5 - \frac{7}{4} \right)$$

- b) Por la conmutatividad de la adición, para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$ ¿a qué es igual la expresión: $a + (b - c)$?

- c) En $\mathbb{Z}$, indique, si es que existe, el inverso multiplicativo de -15 .

- 3.- a) Halle el mínimo común múltiplo del conjunto de enteros: $\{-3, 21, 48\}$

b) Calcule el valor de:

$$\left(2 + \frac{3}{5} \right) \div \left(1 - \frac{2}{5} \right) + 6 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{-\left(-\frac{5}{11} + 3 \right)}{\frac{4}{5} - 8} =$$

$$1 - \frac{\frac{5}{-4} - 8}{\frac{5}{5} - 8}$$

c) Calcule el valor de:

$$\frac{(8,3 - 0,05) - (4,25 - 3,15)}{0,04 : 0,4 + 0,006 : 0,6 + 7,04} =$$

Desarrollo

Solución pregunta 1.a)

$$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$$

$$y = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3-8}{12} = \frac{-5}{12}$$

$$z = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Orden:} \quad y < z < x \quad \Rightarrow \quad \frac{-5}{12} < \frac{1}{12} < \frac{5}{12}$$

Solución pregunta 1.b)

$$A = \left\{ \frac{2}{3}, 0, \bar{4}, -\sqrt{169}, \frac{21}{3}, \frac{-6}{5}, -2, 0, 3, 15193 \right\}$$

$$B = \left\{ -\sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{3}}, e, \sqrt{18} \right\}$$

Solución pregunta 1.c)

$$x = 1 \Rightarrow 6 \cdot 1 - 1 = 5$$

$$x = 2 \Rightarrow 6 \cdot 2 - 1 = 11$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 \cdot 3 - 1 = 17$$

$$x = 4 \Rightarrow 6 \cdot 4 - 1 = 23 \notin \{2, \dots, 20\}$$

Solución pregunta 2.a)

$$-\frac{4}{5} \left(5 - \frac{7}{4} \right) = \frac{-4}{5} \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{-7}{4} \right) = -4 + \frac{7}{5} = \frac{-20 + 7}{5} = \frac{-13}{5}$$

Solución pregunta 2.b)

$$a + (b - c) = (b - c) + a$$

Solución pregunta 2.c)

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

$$(-15) \cdot \left(\frac{1}{-15} \right) = 1 \quad \text{pero} \quad \frac{-1}{15} \notin \mathbb{Z}$$

Solución pregunta 3.a)

3, 21, 48	
1, 7, 16	3
1, 16	7
1	16

$$mcm = 3 \cdot 7 \cdot 16 = 21 \cdot 16 = 336$$

$$\therefore mcm = 336$$

Solución pregunta 3.b)

$$\left(2 + \frac{3}{5}\right) \div \left(1 - \frac{2}{5}\right) + 6 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{-\left(-\frac{5}{11} + 3\right)}{1 - \frac{\frac{4}{5} - 8}{-\frac{4}{5} - 8}} = \frac{13}{5} : \frac{3}{5} + 6 - \frac{7}{3} + \frac{\frac{28}{11}}{1 - \frac{-36}{-\frac{5}{44}}}$$

$$= \frac{13}{5} \cdot \frac{5}{3} + \frac{11}{3} + \frac{\frac{28}{11}}{1 - \frac{36}{44}} = \frac{24}{3} + \frac{\frac{28}{11}}{1 - \frac{9}{11}} = 8 + \frac{28}{11} \cdot \frac{11}{2} = 8 + 14 = 22$$

Solución pregunta 3.c)

$$\frac{(8,3 - 0,05) - (4,25 - 3,15)}{0,04 : 0,4 + 0,006 : 0,6 + 7,04} = \frac{8,25 - 1,1}{\frac{4}{100} \cdot \frac{10}{4} + \frac{6}{1000} \cdot \frac{10}{6} + 7,04}$$

$$= \frac{7,15}{0,1 + 0,01 + 7,04} = \frac{7,15}{7,15} = 1$$

PRUEBA 1

- 1.- a) Sea la ecuación $ax = b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. ¿Tiene siempre solución en $\mathbb{Z}$? Justifique claramente su respuesta.
- b) Indique las propiedades que cumple la multiplicación en $\mathbb{Q}$.
- c) La adición en los Irracionales, ¿cumple la propiedad de clausura? ¿Por qué?

- 2.- Resuelva y exprese el resultado en forma fraccionaria:

$$\frac{\frac{\frac{1}{4} + 0,2 + \frac{3}{10}}{0,25 + \frac{1}{2} + 0,3} \cdot 1\frac{18}{47}}{\left(0,3 + \frac{1}{9} + 0,13\overline{8}\right) : 0,58\overline{3}}$$

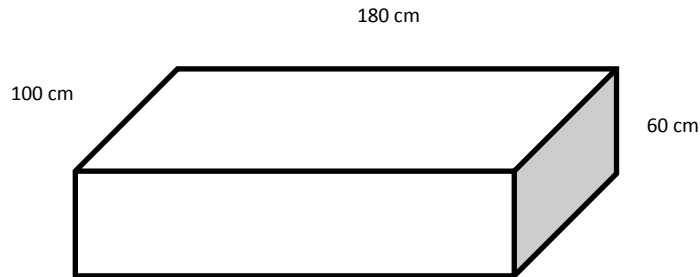
- 3.- Calcule e indique el resultado en notación científica.

$$\frac{1,8 \cdot 10^{-2} - 1,8 \cdot 10^{-1} + 18 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}$$

- 4.- Si a es un número entero par y b un entero impar, determine si la expresión $2ab + 3a^2 + b$ es un entero par o impar.

- 5.- En una Empresa constructora, se requiere cortar un paralelepípedo de madera, de 180 cm. de largo, 100 cm. de ancho y 60 cm. de alto, en cubos iguales.

- a) ¿Cuál debe ser la longitud máxima de la arista de cada cubo?
- b) ¿Cuántos cubos se obtienen del paralelepípedo de madera?



Desarrollo

Solución pregunta 1.a)

La ecuación $ax = b$ no siempre tiene solución en $\mathbb{Z}$, ya que:

- si b es múltiplo de a , hay solución en $\mathbb{Z}$, por ejemplo 3 es múltiplo de 18, luego la ecuación $3x = 18$ se satisface si existe $x = 6 \in \mathbb{Z}$ tal que $3 \cdot 6 = 18$.
- si b no es múltiplo de a , no hay solución en $\mathbb{Z}$.

Si $a = 5$ y $b = 18$ entonces no existe $x \in \mathbb{Z}$ que satisfaga la ecuación $5x = 18$.

Si $x = \frac{18}{5}$, $5 \cdot \frac{18}{5} = 18$, pero $\frac{18}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Solución pregunta 1.b)

Las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Q}$ son :

- Clausura: $\forall a, b \in \mathbb{Q} : (a \cdot b) \in \mathbb{Q}$
- Conmutatividad: $\forall a, b \in \mathbb{Q} : a \cdot b = b \cdot a$
- Asociatividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Existencia elemento neutro: :
 $\forall a \in \mathbb{Q} : \exists ! 1 \in \mathbb{Q} : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
- Existencia elemento inverso:
 $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} : \exists ! a^{-1} \in \mathbb{Q} : a \cdot a^{-1} = a = a^{-1} \cdot a$

Solución pregunta 1.c)

La adición en los Irracionales no cumple la propiedad de clausura.

Contra ejemplo: $\sqrt{3}, (-\sqrt{3}) \in Ir$, pero $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 \notin Ir$.

Solución pregunta 2.

$$\frac{\frac{\frac{1}{4} + 0,2 + \frac{3}{10}}{0,25 + \frac{1}{2} + 0,3} \cdot 1\frac{18}{47}}{\left(0,3 + \frac{1}{9} + 0,13\bar{8}\right) : 0,58\bar{3}} = \frac{\frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{9}} \cdot \frac{47 + 18}{47}}{\left(\frac{3}{9} + \frac{1}{9} + \frac{138 - 13}{900}\right) : \frac{583 - 58}{900}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\frac{5+4+6}{20} \cdot \frac{65}{47}}{9+18+12}}{\frac{36}{300+100+125} \cdot \frac{900}{525}} = \frac{\frac{\frac{15}{20} \cdot \frac{65}{47}}{39}}{\frac{36}{525} \cdot \frac{900}{525}} \\
&= \frac{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{13}{12}} \cdot \frac{65}{47}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{65}{47}} = \frac{45}{47}.
\end{aligned}$$

Solución pregunta 3.

$$\begin{aligned}
\frac{1,8 \cdot 10^{-2} - 1,8 \cdot 10^{-1} + 18 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}} &= \frac{1,8(10^{-2} - 10^{-1} + 10^{-3})}{10^3 \cdot 10^{-3} - (2,5 \cdot 8)10^{2-3}} \\
&= \frac{1,8\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1000}\right)}{1 - 20 \cdot 10^{-1}} = \frac{1,8 \cdot \frac{10-100+1}{1000}}{1-2} \\
&= \frac{1,8 \cdot \frac{-89}{1000}}{-1} = 1,8 \cdot 89 \cdot 10^{-3} \\
&= 160,2 \cdot 10^{-3} \\
&= (1,602 \cdot 10^2) \cdot 10^{-3} \\
&= 1,602 \cdot 10^{-1}.
\end{aligned}$$

Solución pregunta 4.

$$a \text{ es entero par} \Rightarrow a = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$b \text{ es entero impar} \Rightarrow b = 2q - 1, \quad q \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
\text{Luego, } 2ab + 3a^2 + b &= 2 \cdot 2p \cdot (2q - 1) + 3(2p)^2 + 2q - 1 \\
&= 4p(2q - 1) + 3 \cdot 4p^2 + 2q - 1 \\
&= 8pq - 4p + 12p^2 + 2q - 1 \\
&= 2(4pq - 2p + 6p^2 + q) - 1
\end{aligned}$$

Como $p, q \in \mathbb{Z}$ entonces $(4pq - 2p + 6p^2 + q) \in \mathbb{Z}$ por la propiedad de clausura de la Adición y multiplicación en $\mathbb{Z}$.

Sea $r = 4pq - 2p + 6p^2 + q$, luego:

$$2ab + 3a^2 + b = 2r - 1, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

$2ab + 3a^2 + b$ es un entero impar.

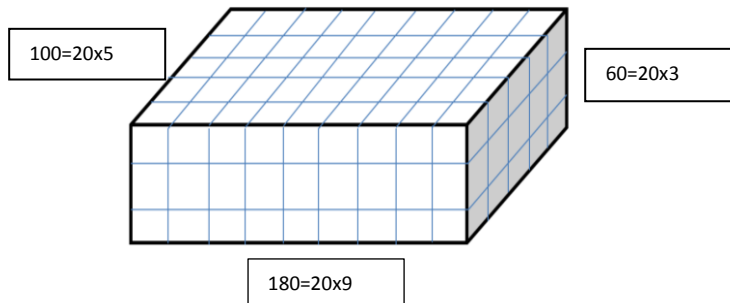
Solución pregunta 5.

- a) Para calcular la longitud máxima de la arista, debemos hallar el $MCD\{180,100,60\}$.

$$\left. \begin{array}{l} 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \right\} MCD: 2^2 \cdot 5 = 20.$$

La longitud máxima de la arista de cada cubo es de 20 cm.

- b)



La cantidad de cubos se obtiene de: $3 \cdot 5 \cdot 9 = 135$.

Del paralelepípedo se obtienen 135 cubos con arista de 20 cm cada uno.

PRUEBA 1

1.- Sean a, b, c y d números naturales, tales que:

- i) b y d son impares consecutivos cuya suma es 32.
- ii) $(b - 7)$ es múltiplo de 2 y $(d + 4)$ es múltiplo de 3.
- iii) c es un factor común de b y $(d - 7)$
- iv) a es el mcm entre $(b - c)$ y el sucesor de d .

Determine el valor de cada número.

2.- Sea a un número entero par y b un número entero impar. Determine si $a^2b + ab + 3$ es un número entero par o impar. Justifique claramente.

3.- Determine, en forma fraccionaria, el valor de:

$$\frac{\left[\left\{ \left[(0, \overline{6})^{-2} + 0,25 \right]^{-2} - 1, \overline{6} \cdot (0,6)^2 \right\} \cdot (-0, \overline{09}) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(1,5)^{-3} + 3^{-3} - 2 \cdot 0, \overline{4} \right]^{-1}}$$

4.- Determine el valor de:

$$\sqrt[3]{\left[\left(\frac{3}{2} \right)^{-2} + \left(\frac{3}{2} \right)^{-3} + \left(\frac{27}{4} \right)^{-1} \right]^{-2}} + \left(\frac{3}{7} \right)^6 \cdot \left(\frac{49}{9} \right)^9 \cdot \left(\frac{27}{343} \right)^4$$

Desarrollo

Solución pregunta 1.

I. Sean b y d números naturales impares consecutivos cuya suma es 32.

Si $b = 2k - 1$ y $d = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$b + d = (2k - 1) + (2k + 1) = 4k = 32,$$

$$\text{Así, } k = 8, \quad b = 2(8) - 1 = 15 \text{ y } d = 2(8) + 1 = 17.$$

II. $b - 7 = 15 - 7 = 8 = 2 \cdot 4$, es decir, $b - 7$ es múltiplo de 2.

$d + 4 = 17 + 4 = 21 = 3 \cdot 7$, es decir, $d + 4$ es múltiplo de 3.

III. c es un factor de $b = 15$ y $d - 7 = 17 - 7 = 10$.

Como los factores de 15 son: $\{1, 3, 5, 15\}$ y los factores de 10 son: $\{1, 2, 5, 10\}$, entonces

$c = 1$ ó $c = 5$.

IV. $a = m.c.m.(b - c, d + 1)$

Si $c = 1$, entonces $a = m.c.m.(14, 18)$. Luego,

$$\left\{ \begin{array}{l} 14 = 2 \cdot 7 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = m.c.m.(14, 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126.$$

Si $c = 5$, entonces $a = m.c.m.(10, 18)$. Así,

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = m.c.m.(10, 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90.$$

Respuesta:

- $a = 126, b = 15, c = 1, d = 17.$

ó

- $a = 90, b = 15, c = 5, d = 17.$

Solución pregunta 2.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con a un número par y b un número impar. Entonces se puede escribir $a = 2k$ y $b = 2m - 1$, con $k, m \in \mathbb{Z}$

Reemplazando en la expresión:

$$\begin{aligned}
a^2b + ab + 3 &= (2k)^2(2m - 1) + (2k)(2m - 1) + 3 \\
&= (4k^2)(2m - 1) + 2k(2m - 1) + 2 + 1 \\
&= 2(2k^2(2m - 1) + 2k(2m - 1) + 2 + 1) \\
&= 2[2k^2(2m - 1) + k(2m - 1) + 1] + 1 \\
&= 2[(2k^2 + k)(2m - 1) + 1] + 1
\end{aligned}$$

Sea $r = (2k^2 + k)(2m - 1) + 1$. Como $k \in \mathbb{Z}$, entonces por clausura aditiva y multiplicativa en $\mathbb{Z}$, $(2k^2 + k) \in \mathbb{Z}$. Como $m \in \mathbb{Z}$, entonces también por clausura aditiva y multiplicativa en $\mathbb{Z}$, $(2m - 1) \in \mathbb{Z}$. Luego, $r = [(2k^2 + k)(2m - 1) + 1] \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $a^2b + ab + 3 = 2r + 1$, por lo que es un número entero impar.

Solución pregunta 3.

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\left\{ \left[(0, \overline{6})^{-2} + 0,25 \right]^{-2} - 1, \overline{6} \cdot (0,6)^2 \right\} \cdot (-0,09) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(1,5)^{-3} + 3^{-3} - 2 \cdot 0,4 \right]^{-1}} &= \frac{\left[\left\{ \left[\left(\frac{6}{9} \right)^{-2} + \left(\frac{25}{100} \right) \right]^{-2} - \left(\frac{15}{9} \right) \cdot \left(\frac{6}{10} \right)^2 \right\} \cdot \left(-\frac{9}{99} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{15}{10} \right)^{-3} + \left(\frac{1}{3} \right)^3 - 2 \cdot \frac{4}{9} \right]^{-1}} \\
&= \frac{\left[\left\{ \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{-2} + \left(\frac{1}{4} \right) \right]^{-2} - \left(\frac{5}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right\} \cdot \left(-\frac{1}{11} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{3}{2} \right)^{-3} + \left(\frac{1}{3} \right)^3 - \frac{8}{9} \right]^{-1}} \\
&= \frac{\left[\left\{ \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right) \right]^{-2} - \left(\frac{3}{5} \right) \right\} \cdot \left(-\frac{1}{11} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{-3} + \left(\frac{1}{3} \right)^3 - \frac{8}{9} \right]^{-1}} \\
&= \frac{\left[\left\{ \left[\left(\frac{9}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) \right]^{-2} - \left(\frac{3}{5} \right) \right\} \cdot \left(-\frac{1}{11} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{8}{27} \right) + \left(\frac{1}{27} \right) - \frac{8}{9} \right]^{-1}} \\
&= \frac{\left[\left\{ \left[\frac{5}{2} \right]^{-2} - \frac{3}{5} \right\} \cdot \left(-\frac{1}{11} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[-\frac{15}{27} \right]^{-1}} \\
&= \frac{\left[\left\{ \frac{4}{25} - \frac{3}{5} \right\} \cdot \left(-\frac{1}{11} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[-\frac{5}{9} \right]^{-1} (2)} = \frac{\left[\left\{ -\frac{11}{25} \right\} \cdot \left(-\frac{1}{11} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[-\frac{9}{5} \right] (2)} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{25} \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[-\frac{9}{5} \right]} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Solución pregunta 4.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[3]{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{27}{4}\right)^{-1}\right]^{-2}} + \left(\frac{3}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{49}{9}\right)^9 \cdot \left(\frac{27}{343}\right)^4 \\
 &= \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{27}\right)\right]^{-2}} + \left(\frac{3}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{7^2}{3^2}\right)^9 \cdot \left(\frac{3^3}{7^3}\right)^4 \\
 &= \sqrt[3]{\left[\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{27}\right)\right]^{-2}} + \left(\frac{3^6}{7^6}\right) \cdot \left(\frac{7^{18}}{3^{18}}\right) \cdot \left(\frac{3^{12}}{7^{12}}\right) \\
 &= \sqrt[3]{\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{8}{27} + \frac{4}{27}\right)\right]^{-2}} + \frac{3^{18}}{7^{18}} \cdot \frac{7^{18}}{3^{18}} = \sqrt[3]{\left[\frac{4}{9} + \frac{12}{27}\right]^{-2}} + 1 \\
 &= \sqrt[3]{\left[\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right]^{-2}} + 1 = \sqrt[3]{\left[\frac{8}{9}\right]^{-2}} + 1 \\
 &= \sqrt[3]{\left[\frac{9}{8}\right]^2} + 1 = \sqrt[3]{\frac{81}{64}} + 1 \\
 &= \frac{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3}}{4} + 1 = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4} + 1 \\
 &= \frac{3\sqrt[3]{3} + 4}{4}
 \end{aligned}$$

PRUEBA 2

- 1.- Racionalice y simplifique: $\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$
- 2.- Aplicando productos notables, determine el valor de:
 $(a+b+c)(a+b-c) + (a+b-c)(a-b+c) + (a-b+c)(b+c-a) +$
 $(b-c+a)(b-c-a) - 4ab$
- 3.- Sea $P(x) = x^6 - x^5 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 2$. Determine si $P(x)$ es divisible por $(x+1)$.
- 4.- Demuestre la siguiente igualdad:
$$\frac{\frac{x^2+6x+9}{9-x^2} \cdot \frac{x^3-2x^4+15x^2}{x^3+3x^2}}{\frac{2x^2-3x-20}{2\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{8}\right)} : \frac{x^2-8x+16}{2x-8}} = 1$$
- 5.- Factorice las siguientes expresiones:
- a) $9x^2 + 3x - 12xy - 6 + 4y^2 - 2y$
- b) $8a^3 + 4ab + 4b^2 - 8b^3 + 4a^2$

Desarrollo

Solución pregunta 1.

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} &= \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} \cdot \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{\sqrt{6x^2+3}-3x} \\&= \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{(\sqrt{6x^2+3})^2-(3x)^2} = \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{(6x^2+3)-9x^2} \\&= \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x^2} = \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3(1-x)^2} \\&= \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3(1-x)(1+x)} = \frac{(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x}.\end{aligned}$$

Solución pregunta 2.

$$(a + b + c)(a + b - c) + (a + b - c)(a - b + c) + (a - b + c)(b + c - a) + (b - c + a)(b - c - a) - 4ab =$$

Asociando:

$$[(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c] + [a + (b - c)] \cdot [a - (b - c)] + [c + (a - b)] \cdot [c - (a - b)] + [(b - c) + a] \cdot [(b - c) - a] - 4ab =$$

Aplicando suma por diferencia queda:

$$(a + b)^2 - c^2 + \underbrace{a^2 - (b - c)^2 + c^2 - (a - b)^2 + (b - c)^2 - a^2}_{-4ab} - 4ab =$$

Cancelando: $(a + b)^2 - (a - b)^2 - 4ab =$

Desarrollando cuadrados de binomios:

$$\underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{(a+b)^2} - \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{(a-b)^2} - 4ab =$$

Cancelando: $4ab - 4ab = 0$

Solución pregunta 3.

Opción 1: Aplicando teorema del resto:

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^6 - (-1)^5 - 5(-1)^3 + 8(-1)^2 - 5(-1) + 2 \\ &= 1 + 1 + 5 + 8 + 5 + 2 = 22 \text{ Como } 22 \neq 0 \end{aligned}$$

P(x) no es divisible por (x+1)

Opción 2:

$$\begin{array}{r} (x^6 - x^5 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 2) : (x+1) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 15x - 20 \\ \underline{-(x^6 + x^5)} \\ -2x^5 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 2 \\ \underline{-(-2x^5 - 2x^4)} \\ 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 2 \\ \underline{-(2x^4 + 2x^3)} \\ -7x^3 + 8x^2 - 5x + 2 \\ \underline{-(-7x^3 - 7x^2)} \\ 15x^2 - 5x + 2 \\ \underline{-(15x^2 + 15x)} \\ -20x + 2 \\ \underline{-(-20x - 20)} \\ 22 \end{array}$$

P(x) no es divisible por (x+1) ya que $22 \neq 0$

Opción 3:

1	-1	0	-5	8	-5	2	-1
	-1	2	-2	7	-15	20	
1	-2	2	-7	15	-20	22	

$P(x)$ no es divisible por $(x+1)$ ya que $22 \neq 0$

Solución pregunta 4.

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 + 6x + 9}{9 - x^2} \cdot \frac{x^3 - 2x^4 + 15x^2}{x^3 + 3x^2} = \frac{(x+3)^2}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{x^2(x-2x^2+15)}{x^2(x+3)} \\
 & \frac{2x^2 - 3x - 20}{2\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{8}\right)} \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{2x - 8} = \frac{(2x+5)(x-4)}{2(1)} \cdot \frac{(x-4)^2}{2(x-4)} \\
 & = \frac{\frac{x-2x^2+15}{3-x}}{2x+5} = \frac{(3-x)(2x+5)}{(3-x)} \cdot \frac{1}{(2x+5)} = 1.
 \end{aligned}$$

Solución pregunta 5.a)

$$\begin{aligned}
 9x^2 + 3x - 12xy - 6 + 4y^2 - 2y &= (9x^2 - 12xy + 4y^2) + 3x - 2y - 6 \\
 &= (3x - 2y)^2 + (3x - 2y) - 6 \\
 &= (3x - 2y + 3)(3x - 2y - 2)
 \end{aligned}$$

Solución pregunta 5.b)

$$\begin{aligned}
 8a^3 + 4ab + 4b^2 - 8b^3 + 4a^2 &= 8(a^3 - b^3) + 4(a^2 + b^2) + 4ab \\
 &= 4[2(a^3 - b^3) + (a^2 + b^2 + ab)] \\
 &= 4[2(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a^2 + ab + b^2)] \\
 &= 4(a^2 + ab + b^2)(2(a-b) + 1)
 \end{aligned}$$

PRUEBA 2

I.- 1.- Racionalice y simplifique:

a) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6x^3}}$

b) $\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1-a^2}}$

2.- Realice las operaciones aplicando propiedades y simplifique:

$$\frac{\sqrt[4]{a^3b^2} \cdot \sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4} \cdot \sqrt{ab}}$$

II.- 1.- Dado el polinomio $p(x) = 4x^4 + x^2 + 3x - 2$

a) Determine las raíces racionales del polinomio

b) Factorice el polinomio en $\mathbb{R}$.

2.- Encuentre los valores de a y b en el polinomio $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ para que éste sea divisible por $x^2 - 1$.

III.- 1.- Determine para qué valores de a , no está definida la expresión racional:

$$\frac{(a^2 - 2)(a^4 + 1)}{16a^2 + 9a^6 - 25a^4}$$

2.- Efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

$$\frac{1 + \frac{b-3}{b+3}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{3}} : \frac{\frac{b+3}{b-3} - 1}{\frac{b+3}{b} - \frac{b+3}{3}}$$

Desarrollo

Solución Ítem I

$$1.a) \quad \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6x^3}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 3^2}}{\sqrt{6 \cdot x \cdot x^2}} = \frac{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{6x}}{x\sqrt{6x} \cdot \sqrt{6x}} = \frac{3\sqrt{30x}}{x \cdot 6x} = \frac{\sqrt{30x}}{2x^2}.$$

$$\begin{aligned} 1.b) \quad \frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1-a^2}} &= \frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2})^2}{(1+a^2) - (1-a^2)} \\ &= \frac{(1+a^2) - 2\sqrt{(1+a^2)(1-a^2)} + (1-a^2)}{2a^2} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{1-a^4}}{2a^2} = \frac{1 - \sqrt{1-a^4}}{a^2}. \end{aligned}$$

Solución Ítem I. 2.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{a^3b^2} \cdot \sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4} \cdot \sqrt{ab}} &= \frac{\sqrt[12]{(a^3b^2)^3} \cdot \sqrt[12]{(a^4b^5)^4}}{\sqrt[12]{(a^5b^4)^2} \cdot \sqrt[12]{(ab)^6}} = \frac{\sqrt[12]{a^9b^6 \cdot a^{16}b^{20}}}{\sqrt[12]{a^{10}b^8 \cdot a^6b^6}} \\ &= \sqrt[12]{\frac{a^{25}b^{26}}{a^{16}b^{14}}} = \sqrt[12]{a^9b^{12}} = b \sqrt[12]{a^9}. \end{aligned}$$

Solución Ítem II

1.a) Dado el polinomio $p(x) = 4x^4 + x^2 + 3x - 2$ sus raíces pueden determinarse por teorema del resto:

$$p(-1) = 4(-1)^4 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 4 + 1 - 3 - 2 = 0. \quad \therefore (-1), \text{ es una raíz}$$

Dividiendo en forma sintética se tiene:

4	0	1	3	-2	-1
	-4	4	-5	2	
q(x): 4	-4	5	-2	0	

$$q\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 4 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{5}{2} - 2 = 0.$$

$\therefore \frac{1}{2}$ es una raíz

Dividiendo en forma sintética se tiene:

4	-4	5	-2	1/2
	2	-1	2	
4	-2	4	0	

$q_1(x)$: 4 -2 4 0 $q_1(x)$: $4x^2 - 2x + 4$ las raíces de este cuociente no son reales. Luego, las raíces racionales del polinomio son -1 y $\frac{1}{2}$,

1.b) Expresado en Factores: $p(x) = (x + 1)(2x - 1)(4x^2 - 2x + 4)$

Solución Ítem III. 1.

$$\begin{aligned}
 \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{16a^2+9a^6-25a^4} &= \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{9a^6-25a^4+16a^2} = \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2(9a^4-25a^2+16)} \\
 &= \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2([9a^4-24a^2+16]-a^2)} = \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2[(3a^2-4)^2-a^2]} \\
 &= \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2(3a^2-4+a)(3a^2-4-a)} = \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2(3a^2+a-4)(3a^2-a-4)} \\
 &= \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2(a+1)(3a-4)(a-1)(3a+4)}.
 \end{aligned}$$

Otra forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{16a^2+9a^6-25a^4} &= \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{9a^6-25a^4+16a^2} = \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2(9a^4-9a^2-16a^2+16)} \\
 &= \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2[9a^2(a^2-1)-16(a^2-1)]} = \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2(a^2-1)(9a^2-16)} \\
 &= \frac{(a^2-2)(a^4+1)}{a^2(a+1)(a-1)(3a+4)(3a-4)}
 \end{aligned}$$

Los valores de a que indeterminan la expresión racional son: $0, \pm 1, \pm \frac{4}{3}$.

Solución Ítem III 2.

$$\begin{aligned}
 \frac{1+\frac{b-3}{b+3}}{\frac{1-\frac{1}{b}}{\frac{b+3}{3}}} : \frac{\frac{b+3}{b-3}-1}{\frac{b+3}{b}-\frac{b+3}{3}} &= \frac{1+\frac{b-3}{b+3}}{\frac{1-\frac{1}{b}}{\frac{b+3}{3}}} \cdot \frac{\frac{b+3}{b}-\frac{b+3}{3}}{\frac{b+3}{b-3}-1} \\
 &= \frac{\frac{b+3+b-3}{3-b}}{\frac{3-b}{3b}} \cdot \frac{\frac{3(b+3)-b(b+3)}{(b+3)-(b-3)}}{\frac{3b}{b-3}} \\
 &= \frac{\frac{2b}{3-b}}{\frac{3b}{3b}} \cdot \frac{\frac{3b+9-b^2-3b}{6}}{\frac{3b}{b-3}} \\
 &= \frac{2b}{b+3} \cdot \frac{2b}{3-b} \cdot \frac{9-b^2}{3b} \cdot \frac{b-3}{6} \\
 &= \frac{b^2-3b}{3}
 \end{aligned}$$

Prueba 2

1. Factorizar las siguientes expresiones:

a) $9a^2 + 8cd - c^2 + 12ab + 4b^2 - 16d^2$

b) $x^2 - 63 + 2xy - 2y + y^2 - 2x$

2. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\frac{(5x-y)^2}{y-5x} - \frac{4x^2-y^2}{y-2x} + \frac{49x^2-14x+1}{1-7x} - 2y+10x$

b) $\left(\frac{3x^2-x-2}{9x^3+3x^2-24x+12} \div \frac{5}{6x-4} \right)$

3. a) Determinar la solución de la ecuación:

$$\frac{2x^2-x-3}{2x^2+x-6} - \frac{x^3-8}{3x^2-5x-2} + \frac{x^2+4}{3x+1} = 1$$

b) Encontrar los valores de m para que la ecuación:

$$x^2 + m^2 + 8m + 4mx = 2 - x \text{ tenga raíces reales e iguales.}$$

4. El largo de un jardín rectangular es el cuádruplo de su ancho. Si el largo se disminuye en $1m$ y su ancho se aumenta en $5m$, el jardín tendrá una área de $88m^2$. Hallar las dimensiones del jardín.

Desarrollo

Solución pregunta 1.a)

$$9a^2 + 8cd - c^2 + 12ab + 4b^2 - 16d^2 =$$

Asociando,

$$(9a^2 + 12ab + 4b^2) - (c^2 - 8cd + 16d^2) =$$

Factorizando cuadrados de binomios,

$$(3a + 2b)^2 - (c - 4d)^2 =$$

Factorizando diferencia de cuadrados, $[(3a + 2b) + (c - 4d)][(3a + 2b) - (c - 4d)]$.

Solución pregunta 1.b)

$$x^2 - 63 + 2xy - 2y + y^2 - 2x =$$

Asociando,

$$(x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) - 63 =$$

Factorizando cuadrados de binomios, $(x + y)^2 - 2(x + y) - 63 =$

Luego, $[(x + y) - 9][(x + y) + 7]$

Solución pregunta 2.a)

$$\frac{(5x-y)^2}{y-5x} - \frac{4x^2-y^2}{y-2x} + \frac{49x^2-14x+1}{1-7x} - 2y + 10x =$$

Factorizando, $\frac{(5x-y)^2}{-(5x-y)} - \frac{(2x+y)(2x-y)}{-(2x-y)} + \frac{(7x-1)^2}{-(7x-1)} + 2(5x-y) =$

Simplificando, $-(5x-y) + (2x+y) - (7x-1) + 2(5x-y) =$

Reduciendo, $5x - y + 2x + y - 7x + 1 = 1.$

Solución pregunta 2.b)

$$\frac{3x^2-x-2}{9x^3+3x^2-24x+12} : \frac{5}{6x-4} =$$

Factorizando, $\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(3x-2)(3x+6)} \cdot \frac{2(3x-2)}{5} =$

Simplificando $\frac{2(3x+2)}{3(x+2) \cdot 5} = \frac{2(3x+2)}{15(x+2)}$

Solución pregunta 3.a)

Factorizando, $\frac{(2x-3)(x+1)}{(2x-3)(x+2)} - \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(3x+1)} + \frac{x^2+4}{3x+1} = 1, \quad x \neq \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \pm 2.$

Simplificando, $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x^2+2x+4}{3x+1} + \frac{x^2+4}{3x+1} = 1$

$$\frac{x+1}{x+2} + \left(-\frac{x^2+2x+4}{3x+1} + \frac{x^2+4}{3x+1} \right) = \frac{x+1}{x+2} + \left(\frac{-x^2-2x-4+x^2+4}{3x+1} \right) = 1$$

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{2x}{3x+1} = 1 \quad / \quad (x+2)(3x+1)$$

$$(x+1)(3x+1) - 2x(x+2) = (x+2)(3x+1)$$

$$3x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 4x = 3x^2 + 7x + 2$$

$$2x^2 + 7x + 1 = 0$$

Usando fórmula cuadrática, los valores de x son: $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{4}$

Solución pregunta 3.b)

Para que la ecuación tenga raíces reales e iguales, se ordena la ecuación y se calcula el discriminante igualado a cero:

$$x^2 + (4m + 1)x + (m^2 + 8m - 2) = 0$$

Luego, $(4m + 1)^2 - 4(m^2 + 8m - 2) = 0$

Resolviendo y reduciendo, $16m^2 + 8m + 1 - 4m^2 - 32m + 8 = 0$

$$12m^2 - 24m + 9 = 0 \quad / : 3$$

$$4m^2 - 8m + 3 = 0$$

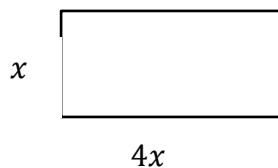
$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} \quad \therefore \quad m = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + m^2 + 8m + 4mx = 2 - x$$

Solución pregunta 4.

Sea x el ancho del jardín

$4x$ el largo



$x + 5$



$4x - 1$

$$A: (x + 5)(4x - 1) = 88$$

$$4x^2 + 19x - 5 - 88 = 0$$

$$4x^2 + 19x - 93 = 0$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 4 \cdot 4 \cdot (-93)}}{8}$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{1849}}{8} = \frac{-19 \pm 43}{8} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -\frac{62}{8} \end{array}$$

Respuesta: el jardín mide 3 m de ancho y 12 m de largo.

PRUEBA 3

- 1.- Hallar todas las raíces del polinomio, sabiendo que r es una de ellas:

$$t(x) = 2x^3 + 5x^2 - 28x - 15, \quad r = -\frac{1}{2}$$

- 2.- El polinomio $p(x) = x^4 - ax^3 + bx$, tiene como raíces $x = 3$ y $x = -1$. Hallar los valores de a y b .

- 3.- Resuelva las siguientes ecuaciones, indicando el conjunto solución:

a)
$$\frac{ax}{b} - \frac{b(x-b)}{a} = a$$

b)
$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x}$$

- 4.- Resuelva los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} (x+3)(y+5) - (x+1)(y+8) = 0 \\ (x-10)(y-1) + (x-9)(3-y) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2,4x + 1,8y = 30 \\ 3,6x + 5,4y = 61,2 \end{cases}$$

- 5.- Resuelva los siguientes problemas:

- a) La edad de una mujer era, hace 10 años, cinco veces la de su hija, y dentro de 11 años será solamente el doble. ¿Qué edades tienen actualmente?
- b) Una persona tiene \$8.000 en 200 monedas de \$10 y de \$50. Cuántas monedas de \$10 y de \$50 tiene?

Desarrollo

Solución pregunta 1.

$$t(x) = 2x^3 + 5x^2 - 28x - 15,$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

Usando división sintética

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -28 & -15 & -\frac{1}{2} \\ & -1 & -2 & 15 & \\ \hline 2 & 4 & -30 & 0 & \end{array} \quad \therefore q(x) = 2x^2 + 4x - 30$$

$$\text{Factorizando} \quad q(x) = 2x^2 + 4x - 30 = 2(x + 5)(x - 3)$$

Luego, las otras raíces son: -5 y 3

Solución pregunta 2.

$$p(x) = x^4 - ax^3 + bx, \text{ tiene como raíces } x = 3 \text{ y } x = -1, \text{ Hallar } a \text{ y } b$$

Usando Teorema del resto:

$$\begin{aligned} p(3) &= 3^4 - 3^3a + 3b = 0 \\ -27a + 3b &= -81 \quad /: (-3) \\ 9a - b &= 27 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^4 + a - b = 0 \\ a - b &= -1 \quad (2) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{array}{l|l} 9a - b = 27 \\ a - b = -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{aligned} 8a &= 28 \\ a &= \frac{28}{8} = \frac{7}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{7}{2} - b = -1 \rightarrow \frac{7}{2} + 1 = b \rightarrow \boxed{b = \frac{9}{2}}$$

Solución pregunta 3.a)

$$\frac{ax}{b} - \frac{b(x-b)}{a} = a \quad / ab$$

$$a^2x - b^2(x-b) = a^2b$$

$$a^2x - b^2x + b^3 = a^2b$$

$$(a^2 - b^2)x = a^2b - b^3$$

$$x = \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2}$$

$$x = b \quad S = \{b\}$$

Solución pregunta 3.b)

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x} \quad , x \neq 0, \pm 1$$

$$x(x-1) = x^2 - 1$$

$$x^2 - x = x^2 - 1$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

$$\text{Pero } x \neq 1 \quad \therefore S = \emptyset$$

Otra forma:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x} \quad , x \neq 0, \pm 1$$

$$\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}$$

$$x = x + 1$$

$$0 = 1 \quad \text{Falso} \quad \therefore S = \emptyset$$

Solución pregunta 4.a)

$$\begin{array}{l} (x+3)(y+5) - (x+1)(y+8) = 0 \\ (x-10)(y-1) + (x-9)(3-y) = 0 \end{array} \quad \Bigg|$$

$$\begin{array}{l} xy + 5x + 3y + 15 - xy - 8x - y - 8 = 0 \\ xy - x - 10y + 10 - xy - 27 + 3x + 9y = 0 \end{array} \quad \Bigg|$$

$$\begin{array}{r|l} -3x + 2y = -7 & \\ 2x - y = 17 & \end{array} \bigg| \cdot 2$$

$$\begin{array}{r|l} -3x + 2y = -7 & \\ 4x - 2y = 34 & \end{array} \bigg| \rightarrow x = 27$$

$$2 \cdot 27 - y = 17$$

$$54 - 17 = y \rightarrow y = 37$$

$$\therefore S = \{(27, 37)\}$$

Solución pregunta 4.b)

$$\begin{array}{r|l} 2,4x + 1,8y = 30 & \\ 3,6x + 5,4y = 61,2 & \end{array} \bigg| \cdot (-3)$$

$$\begin{array}{r|l} -7,2x - 5,4y = -90 & \\ 3,6x + 5,4y = 61,2 & \end{array} \bigg|$$

$$(-7,2 + 3,6)x = (-90 + 61,2)$$

$$-3,6x = -28,8$$

$$3,6x = 28,8$$

$$x = 8$$

$$2,4 \cdot 8 + 1,8y = 30$$

$$19,2 + 1,8y = 30$$

$$1,8y = 30 - 19,2$$

$$1,8y = 10,8 \rightarrow y = 6 \quad \therefore S = \{(8, 6)\}$$

Solución pregunta 5.a)

x : edad de una mujer en la actualidad

y : edad actual de la hija

$x - 10$: edad de una mujer hace 10 años

$x + 11$: edad de la mujer en 11 años más.

$$\left| \begin{array}{l} x - 10 = 5(y - 10) \\ x + 11 = 2(y + 11) \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{l} x - 5y = -40 \\ x - 2y = 11 \end{array} \right| \rightarrow -3y = -51 \rightarrow y = 17$$

$$x = 11 + 2 \cdot 17 \rightarrow x = 11 + 34 \rightarrow x = 45$$

Respuesta:

Edad actual de la madre es 45 años.

Edad actual de la hija es 17 años.

Solución pregunta 5.b)

x : cantidad de monedas de \$10

y : cantidad de monedas de \$50

$$\left| \begin{array}{l} 10x + 50y = 8000 \\ x + y = 200 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{l} x + 5y = 800 \\ x + y = 200 \end{array} \right| / \cdot (-1)$$

$$4y = 600$$

$$y = 150$$

$$x = 50$$

La persona tiene 50 monedas de \$10 y 150 monedas de \$50

PRUEBA 3

- 1.- Efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

$$\frac{\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} \cdot (a^{-2}+b^{-2})}{\frac{(a+b)^2-ab}{(a-b)^2+ab} \cdot (b^{-1}-a^{-1})}$$

- 2.- Resuelva la ecuación para x,

$$\frac{2(a+x)}{b} - \frac{3(b-x)}{a} = \frac{6(a^2-2b^2)}{ab}$$

- 3.- Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{3}{y+1} + \frac{7}{x-1} = 4 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+1} = -1 \end{cases}$$

- 4.- Encuentre el valor de K para que la ecuación:

$$kx^2 + 2kx + 3k = 1 - x^2 - 3x ; \text{ tenga raíces reales e iguales.}$$

- 5.- Determine las raíces de la ecuación, sabiendo que una de las raíces es la recíproca de la otra:

$$5mx^2 - 9x + 6 + 3m = 4m^2x - 2x^2$$

Desarrollo

Solución pregunta 1.

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} \cdot (a^{-2}+b^{-2})}{\frac{(a+b)^2-ab}{(a-b)^2+ab} \cdot (b^{-1}-a^{-1})} = \frac{\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}{\frac{a^2+2ab+b^2-ab}{a^2-2ab+b^2+ab} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} \\ & = \frac{\frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)} \cdot \left(\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}\right)}{\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} \cdot \left(\frac{a-b}{ab}\right)} = \frac{(a-b)^2}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{a-b} = \frac{a-b}{ab} \end{aligned}$$

Solución pregunta 2.

$$\frac{2(a+x)}{b} - \frac{3(b-x)}{a} = \frac{6(a^2-2b^2)}{ab} \quad / \cdot ab$$

$$2a(a+x) - 3b(b-x) = 6a^2 - 12b^2$$

$$2a^2 + 2ax - 3b^2 + 3bx = 6a^2 - 12b^2$$

$$(2a+3b)x = 6a^2 - 2a^2 + 3b^2 - 12b^2$$

$$(2a+3b)x = 4a^2 - 9b^2$$

$$x = \frac{(2a+3b)(2a-3b)}{2a+3b} \quad \boxed{x = 2a - 3b}$$

Solución pregunta 3.

Usando incógnitas auxiliares:

$$\begin{cases} \frac{3}{y+1} + \frac{7}{x-1} = 4 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+1} = -1 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{y+1}, \quad b = \frac{1}{x-1} \quad \text{con } y \neq -1, \quad x \neq 1$$

$$\begin{array}{l} 3a + 7b = 4 \\ 3b + 4a = -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} / \cdot 4 \\ / \cdot (-3) \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} 12a + 28b = 16 \\ -12a - 9b = 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 19b = 19 \\ \boxed{b = 1} \end{array}$$

$$3a + 7b = 4$$

$$3a + 7 = 4$$

$$3a = -3 \quad \boxed{a = -1}$$

$$\text{Luego } a = \frac{1}{y+1} = -1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 = -y - 1 \\ \boxed{y = -2} \end{array}$$

$$\text{Luego } b = \frac{1}{x-1} = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 = x - 1 \\ \boxed{2 = x} \end{array}$$

$$\therefore S = \{(2, -2)\}$$

Solución pregunta 4.

$$kx^2 + 2kx + 3k = 1 - x^2 - 3x, \quad \text{ordenando}$$

$$(k+1)x^2 + (2k+3)x + (3k-1) = 0,$$

Para tener raíces iguales, el discriminante es igual a cero

$$\Delta = (2k+3)^2 - 4(k+1)(3k-1) = 0$$

$$\begin{aligned}
4k^2 + 12k + 9 - 4(3k^2 - k + 3k - 1) &= 0 \\
4k^2 + 12k + 9 - 12k^2 - 8k + 4 &= 0 \\
-8k^2 + 4k + 13 &= 0 \\
8k^2 - 4k - 13 &= 0 \\
k &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(8)(-13)}}{16} \\
k &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 416}}{16} \\
k &= \frac{4 \pm 12\sqrt{3}}{16}, \quad k_1 = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{4} \quad y \quad k_2 = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Solución pregunta 5.

$$\begin{aligned}
5mx^2 - 9x + 6 + 3m &= 4m^2x - 2x^2 \\
(5m + 2)x^2 - (9 + 4m^2)x + (3m + 6) &= 0
\end{aligned}$$

Sean las raíces r_1, r_2 con $r_2 = \frac{1}{r_1}$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow r_1 \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{r_1}{r_1} = \frac{c}{a} \text{ entonces}$$

$$\frac{c}{a} = 1 = \frac{3m+6}{5m+2} \Rightarrow 5m + 2 = 3m + 6 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

Reemplazando en la ecuación se tiene:

$$12x^2 - 25x + 12 = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4 \cdot 144}}{24} \Rightarrow x = \frac{25 \pm 7}{24} \begin{cases} \nearrow \frac{32}{24} = \frac{4}{3} \\ \searrow \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Las raíces son $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{4}$

PRUEBA 3

- 1.- a) Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$2 - 2 \cdot (x + 1) - \frac{x-3}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

- b) Calcule el valor de a para que la siguiente igualdad se verifique:

$$\frac{ax^3}{3} + \frac{x(x^2-3)}{3} + 2x = 0, \quad \text{si } x \text{ toma el valor } \sqrt{3}.$$

- 2.- Resuelva para x e y , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} + y = 2b \\ \frac{x}{b} - y = a - b \end{array} \right|$$

- 3.- Determine el área de un rectángulo, sabiendo que: Su perímetro es de 24 cm y su base es el triple de su altura.
- 4.- Expresé la ecuación que traduce la siguiente situación: Tener \$42 mil en billetes de \$2 mil y de \$5 mil. Determine dos soluciones posibles.

Desarrollo

Solución pregunta 1.a)

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cdot (x + 1) - \frac{x-3}{2} &= \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x \quad / \cdot 12 \\ 24 - 24(x + 1) - 6(x - 3) &= 8x - (5x - 3) + 36x \\ 24 - 24x - 24 - 6x + 18 &= 8x - 5x + 3 + 36x \\ -30x + 18 &= 39x + 3 \\ -69x &= -15 \\ x &= \frac{15}{69} \\ \boxed{x = \frac{5}{23}} \end{aligned}$$

Solución pregunta 1.b)

$$\frac{ax^3}{3} + \frac{x(x^2-3)}{3} + 2x = 0, \quad \text{si } x = \sqrt{3} \text{ entonces}$$

$$\frac{a(\sqrt{3})^3}{3} + \frac{(\sqrt{3})(3-3)}{3} + 2(\sqrt{3}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a3\sqrt{3}}{3} + 2(\sqrt{3}) = 0$$

$$a(\sqrt{3}) + 2(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (a + 2)\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

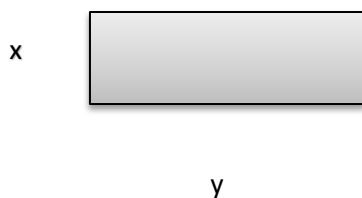
Solución pregunta 2.

$$\begin{array}{l} \frac{x}{a} + y = 2b \\ \frac{x}{b} - y = a - b \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{-}{a} \\ \frac{-}{b} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x + ay = 2ab \\ x - by = ab - b^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} (-1) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} ay + by = 2ab - ab + b^2 \Rightarrow (a + b)y = ab + b^2 \Rightarrow \\ (a + b)y = b(a + b) \Rightarrow \boxed{y = b} \end{array}$$

$$x + ab = 2ab \Rightarrow \boxed{x = ab}$$

Solución pregunta 3.



$$\begin{array}{l} y = 3x, \quad P: 2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12 \\ \Rightarrow x + 3x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 3} \\ \therefore \boxed{y = 9} \end{array}$$

$$\text{Luego el área del rectángulo es } \boxed{A = 27}$$

Solución pregunta 4.

Sea x la cantidad de billetes de \$2000

y la cantidad de billetes de \$5000

La ecuación es de la forma $2000x + 5000y = 42000$ / :1000

$$\boxed{2x + 5y = 42}$$

$$\begin{array}{l} \text{Algunas soluciones } x = 6, \quad y = 6 \Rightarrow (6,6) \\ x = 11, \quad y = 4 \Rightarrow (11,4) \end{array}$$

PRUEBA 3

- 1) Resolver las siguientes ecuaciones, indicando el conjunto solución:

a) $\frac{(2x+3)^2 - 12x}{x^2 + 2x} = x^2 - 2x$

b) $\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \frac{8}{\sqrt{x+5}}$

- 2) a) Sea $4x^2 - 4mx + 4m^2 - 12m - 15 = 0$. Determine “m” de modo que sus raíces no sean reales.

b) Si una raíz de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es el doble de la otra, demuestre que: $2b^2 = 9ac$

- 3) Plantee y resuelva los problemas siguientes:

a) La diagonal de un rectángulo es 8cm mayor que su ancho y 4 cm mayor que su largo. Determine las dimensiones del rectángulo.

b) La suma de las áreas de dos cuadrados es 40 cm^2 y la diferencia de sus perímetros es 16 cm. Determine el lado de cada cuadrado.

- 4) Aplicando propiedades de logaritmos,

a) Desarrolle la siguiente expresión: $A = \log_a 2b \sqrt{\frac{a}{b}}$,

b) Exprese como un logaritmo único:

$$B = \log p - \log(p+q) + 5\log p - 6\log(p+q)$$

c) Demuestre que: $\log_{16} (x+1)^2 = \log_2 \sqrt{x+1}$

Desarrollo

Solución pregunta 1.a)

$$\frac{(2x+3)^2 - 12x}{x^2 + 2x} = x^2 - 2x \quad ; \text{ restricción } x \neq 0, x \neq -2$$

$$4x^2 + 12x + 9 - 12x = x(x-2) \cdot x(x+2)$$

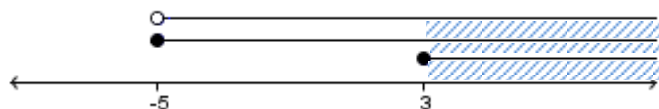
$$\begin{aligned}
4x^2 + 9 &= x^2(x^2 - 4) \\
4x^2 + 9 - x^4 + 4x^2 &= 0 \\
-x^4 + 8x^2 + 9 &= 0 \\
x^4 - 8x^2 - 9 &= 0 \\
(x^2 - 9)(x^2 + 1) &= 0 \\
x^2 - 9 = 0 &\rightarrow x = \pm 3 \\
x^2 + 1 \in \mathbb{R}^+, &\text{ para todo } x
\end{aligned}$$

Solución pregunta 1.b)

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \frac{8}{\sqrt{x+5}} \quad / \cdot \sqrt{x+5} \text{ restricción}$$

$$\begin{aligned}
x+5 &\geq 0 \rightarrow x \geq -5 \\
5x-15 &\geq 0 \rightarrow x \geq 3 \\
x+5 &> 0 \rightarrow x > -5
\end{aligned}$$

$$x+5 - \sqrt{(x+5)(5x-15)} = 8$$



$$x-3 = \sqrt{5x^2 + 10x - 75} \quad / (\quad)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 5x^2 + 10x - 75$$

$$4x^2 + 16x - 84 = 0$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x+7)(x-3) = 0$$

$$x = -7 \notin U$$

$$x = 3 \in U$$

$$\therefore S = \{3\}$$

Solución pregunta 2.a)

$$4x^2 - 4mx + 4m^2 - 12m - 15 = 0$$

Ordenando

$$4x^2 - 4mx + (4m^2 - 12m - 15) = 0$$

Discriminante es menor que cero para que las raíces no sean reales

$$D = (4m)^2 - 4 \cdot 4(4m^2 - 12m - 15) < 0$$

$$16m^2 - 16(4m^2 - 12m - 15) < 0 \quad / : 16$$

$$m^2 - 4m^2 + 12m + 15 < 0$$

$$3m^2 - 12m - 15 > 0 \quad / : 3$$

$$m^2 - 4m - 5 > 0$$

$$(m-5)(m+1) > 0$$

$$\therefore S = (-\infty, -1) \cup (5, \infty).$$

Solución pregunta 2.b)

$ax^2 + bx + c = 0$, una raíz es el doble de la otra

$$r_1 = 2r_2$$

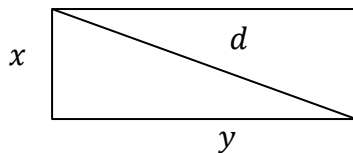
Se sabe que

$$\left. \begin{array}{l} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right| \rightarrow 3r_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow r_2 = -\frac{b}{3a}$$

$$\text{Reemplazando: } r_2 \cdot \left(-\frac{b}{3a}\right) = \frac{c}{a} \rightarrow r_1 = \frac{3c}{-b}$$

Luego: $r_1 = 2r_2$

$$\frac{3c}{-b} = 2 \cdot \frac{-b}{3a} \rightarrow 2b^2 = 9ac$$

Solución pregunta 3.a)

x : ancho
 y : largo
 d : diagonal

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} d = x + 8 \\ d = y + 4 \end{array} \right\} \rightarrow x + 8 = y + 4 \rightarrow x = y - 4$$

$$d^2 = x^2 + y^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + 16x + 64$$

$y^2 = 16x + 64$, como $x = y - 4$, se tiene

$$y^2 = 16(y - 4) + 64$$

$$y^2 = 16y - 64 + 64$$

$$y^2 - 16y = 0$$

$$y(y - 16) = 0$$

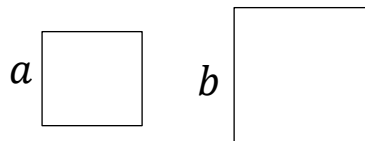
$y = 0$ No es solución

$y = 16$ Es solución $\rightarrow x = 16 - 4$

$$x = 12$$

$\therefore$ Largo del rectángulo mide 16 cm

Ancho del rectángulo mide 12 cm

Solución pregunta 3.b)

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 40 \\ 4a - 4b = 16 \end{array} \right| \rightarrow a = 4 + b$$

$$(4 + b)^2 + b^2 = 40$$

$$16 + 8b + b^2 + b^2 = 40$$

$$b^2 + 4b - 12 = 0$$

$$(b + 6)(b - 2) = 0$$

$$b = -6 \text{ No es solución}$$

$$b = 2 \text{ Es solución} \rightarrow a = 6$$

$\therefore$ Los lados de los cuadrados son: uno de 6 cm y el otro de 2 cm.

Solución pregunta 4.a)

$$\begin{aligned} A &= \log_a 2b \sqrt{\frac{a}{b}} \\ &= \log_a 2 + \log_a b + \frac{1}{2} \log_a a - \frac{1}{2} \log_a b \\ &= \log_a 2 + \log_a b - \frac{1}{2} \log_a b + \frac{1}{2} \\ &= \log_a 2 + \frac{1}{2} \log_a b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solución pregunta 4.b)

$$\begin{aligned} B &= \log p - \log(p + q) + 5 \log p - 6 \log(p + q) \\ &= (\log p + 5 \log p) - (\log(p + q) + 6 \log(p + q)) \\ &= 6 \log p - 7 \log(p + q) \\ &= \log p^6 - \log(p + q)^7 \\ &= \log \frac{p^6}{(p + q)^7} \end{aligned}$$

Solución pregunta 4.c)

Demostración

$$\begin{aligned} \log_{16}(x + 1)^2 &= 2 \log_{16}(x + 1) = 2 \frac{\log_2(x + 1)}{\log_2 16} = 2 \cdot \frac{\log_2(x + 1)}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_2(x + 1) = \log_2(x + 1)^{1/2} = \log_2 \sqrt{x + 1} \end{aligned}$$

PRUEBA 4

1. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3^{3-x} \cdot 2^{5x} = 3^{x+5} \cdot 2^{3x}$

b) $\log_2(x+1) - 2 \log_4 x = 3 - 3 \log_8(x+3)$

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \log x - \log y = -2 + \log 75 \end{cases}$$

3. Demuestre que:

$$\ln \sqrt{x^2 + x - 2} + \ln \sqrt{(3x+4)^3} + \ln \sqrt{\frac{3}{x-1} - \frac{x+1}{x^2 + x - 2} + \frac{1}{x+2}} = \ln (3x+4)^2$$

4. Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de " x " baldosas por lado sobran 27, y si se toman " $x + 1$ " baldosas por lado faltan 40. Hallar el número de baldosas.

Desarrollo

Solución pregunta 1.a)

$$3^{3-x} \cdot 2^{5x} = 3^{x+5} \cdot 2^{3x}$$

$$\frac{3^{3-x}}{3^{x+5}} = \frac{2^{3x}}{2^{5x}}$$

$$3^{-2x-2} = 2^{-2x} \quad / \log$$

$$(-2x - 2) \log 3 = -2x \log 2$$

$$-2x \log 3 - 2 \log 3 = -2x \log 2$$

$$-2x \log 3 + 2x \log 3 = 2 \log 3$$

$$x(2 \log 2 - 2 \log 3) = 2 \log 3$$

$$x = \frac{2 \log 3}{2 \log 2 - 2 \log 3} = \frac{2 \log 3}{2(\log 2 - \log 3)}$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3}$$

Solución pregunta 1.b)

$\log_2(x+1) - 2\log_4 x = 3 - 3\log_8(x+3)$, usando propiedad de **cambio de base**

$$\log_2(x+1) - 2\frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3 - 3\frac{\log_2(x+3)}{\log_2 8}$$

$$\log_2(x+1) - 2\frac{\log_2 x}{2} = 3 - 3\frac{\log_2(x+3)}{3}$$

$$\log_2(x+1) - \log_2 x = 3 - \log_2(x+3)$$

$$\log_2(x+1) - \log_2 x + \log_2(x+3) = 3$$

$$\log_2 \frac{(x+1)(x+3)}{x} = 3 \rightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{x} = 2^3, \quad x \neq 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8x \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0 \rightarrow x = 3, x = 1 \quad \therefore S = \{1, 3\}$$

Solución pregunta 2.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ \log x - \log y = -2 + \log 75 \end{array} \right| \rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ \log \frac{x}{y} = -\log 100 + \log 75 \end{array} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ \log \frac{x}{y} = \log \frac{1}{100} + \log 75 \end{array} \right| \rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ \log \frac{x}{y} = \log \frac{75}{100} \end{array} \right|$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{3y}{4}$$

$$\frac{9y^2}{16} + y^2 = 100 \quad / \cdot 16$$

$$25y^2 = 1600 \quad / \sqrt{\square}$$

$$5y = \pm 40$$

$$\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 100$$

$$9y^2 + 16y^2 = 1600$$

$$5y = 40 \rightarrow y = 8 \rightarrow x = 6 \quad \text{Solución}$$

$$5y = -40 \rightarrow y = -8 \rightarrow x = -6 \quad \text{No es solución}$$

$$\therefore S = \{(6, 8)\}$$

Solución pregunta 3.

Demuestre que

$$\ln \sqrt{x^2 + x - 2} + \ln \sqrt{(3x + 4)^3} + \ln \sqrt{\frac{3}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x+2}} = \ln(3x+4)^2$$

$$\ln \sqrt{x^2 + x - 2} + \ln \sqrt{(3x + 4)^3} + \ln \sqrt{\frac{3}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x+2}} =$$

$$\ln \sqrt{x^2 + x - 2} \cdot \sqrt{(3x + 4)^3} \cdot \sqrt{\frac{3}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x+2}} =$$

$$\ln \sqrt{(x+2)(x-1)(3x+4)^3 \cdot \frac{3(x+2) - (x+1) + (x-1)}{(x+2)(x-1)}} =$$

$$\ln \sqrt{(3x+4)^3(3x+6-x-1+x-1)} = \ln \sqrt{(3x+4)^3(3x+4)} = \ln(3x+4)^{\frac{4}{2}}$$

$$= \ln(3x+4)^2.$$

Solución pregunta 4.

n : Total de baldosas

$$n = x^2 + 27, \quad n = (x+1)^2 - 40$$

$$x^2 + 27 = x^2 + 2x + 1 - 40$$

$$-2x = -39 - 27 \Rightarrow 2x = 66 \Rightarrow \boxed{x = 33}$$

Reemplazando para calcular n , se tiene $33^2 + 27 = n$, $n = 34^2 - 40$

Total de baldosas $n = 1116$

PRUEBA 4

1.- Resuelva las ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{x-1} + 4 = \frac{4x^2}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1}$

b) $\frac{x}{2a} - \frac{1-x}{a^2} = \frac{1}{2a}$

c) $\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \frac{8}{\sqrt{x+5}}$

2.- a) Determine el valor de K de modo que la ecuación $9x^2 - kx + 1 = 0$ tenga raíces reales e iguales.

b) Determinar el valor de m para que el producto de las raíces de la ecuación $(m-2)x^2 - 5x + 2m = 0$, sea 6

3.- a) Calcule el valor de: $-\log_8 \log_4 \log_2 16$

b) Resuelva la ecuación logarítmica: $\frac{1}{3} + \log x = \frac{1}{\log x} + 3$

c) Resuelva la ecuación exponencial: $\frac{15^{2x+1}}{5^{x+3}} = 3^{x+3}$

4.- Resuelva el siguiente sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y = 12 \\ \log_y x + \log_x y = 2 \end{cases}$$

Desarrollo

Solución pregunta 1.a)

$$\frac{x+1}{x-1} + 4 = \frac{4x^2}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq \pm 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} + 4 = \frac{4x^2}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} \quad | \cdot (x+1)(x-1)$$

$$(x+1)^2 + 4(x+1)(x-1) = 4x^2 + (x-1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 4 = 4x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad \text{pero } x \neq \pm 1 \quad \therefore S = \emptyset$$

Solución pregunta 1.b)

$$\frac{x}{2a} - \frac{1-x}{a^2} = \frac{1}{2a}, \quad a \neq 0$$

$$\frac{x}{2a} - \frac{1-x}{a^2} = \frac{1}{2a} \quad | \cdot 2a^2 \Rightarrow ax - 2(1-x) = a \Rightarrow ax - 2 + 2x = a$$

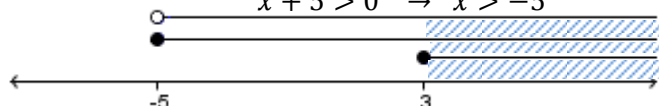
$$ax + 2x = a + 2 \Rightarrow (a+2)x = a+2 \Rightarrow x = 1 \quad \therefore S = \{1\}.$$

Solución pregunta 1.c)

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{5x-15} = \frac{8}{\sqrt{x+5}} \quad / \cdot \sqrt{x+5} \quad \text{Restricción} \quad x+5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5$$

$$5x-15 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$$

$$x+5 > 0 \rightarrow x > -5$$



$$x+5 - \sqrt{(x+5)(5x-15)} = 8$$

$$x-3 = \sqrt{5x^2+10x-75}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 5x^2 + 10x - 75 \quad / (\square)^2$$

$$4x^2 + 16x - 84 = 0$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x+7)(x-3) = 0$$

$$x = -7 \notin U$$

$$x = 3 \in U \quad \therefore S = \{3\}$$

Solución pregunta 2.a)

En la ecuación $9x^2 - kx + 1 = 0$, para tener raíces reales e iguales, el discriminante debe ser igual a cero.

$$\Delta = k^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow k = \pm 6$$

Solución pregunta 2.b)

En la ecuación: $(m-2)x^2 - 5x + 2m = 0$, el producto de las raíces debe ser 6, entonces, $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = 6$. Reemplazando se tiene: $\frac{2m}{m-2} = 6 \Rightarrow 2m = 6m - 12 \Rightarrow$

$$\therefore m = 3$$

Solución pregunta 3.a)

$$-\log_8 \log_4 \log_2 16 = -\log_8 \log_4 (\log_2 2^4) = -\log_8 (\log_4 4) = -\log_8 1 = 0$$

Solución pregunta 3.b)

$$\frac{1}{3} + \log x = \frac{1}{\log x} + 3$$

$$\log x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1,$$

$$\frac{1}{3} + \log x = \frac{1}{\log x} + 3 \quad | \cdot 3 \log x \Rightarrow \log x + 3(\log x)^2 = 3 + 9 \log x$$

$3(\log x)^2 - 8 \log x - 3 = 0$, resolviendo la ecuación cuadrática se tiene:

$$\log x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6}, \text{ de donde}$$

$$\log x = \frac{8+10}{6} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 10^3 = 1000}$$

$$\log x = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = 10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}}$$

Solución pregunta 3.c)

$$\frac{15^{2x+1}}{5^{x+3}} = 3^{x+3} \Rightarrow 15^{2x+1} = 3^{x+3} \cdot 5^{x+3} \Rightarrow 15^{2x+1} = 15^{x+3}$$

$$\text{Luego } 2x + 1 = x + 3 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Solución pregunta 4.

$$\begin{cases} x^2 + y = 12 \\ \log_y x + \log_x y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Haciendo cambio de base se tiene: } \left. \begin{array}{l} x^2 + y = 12 \\ \log_y x + \frac{\log_y y}{\log_y x} = 2 \end{array} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y = 12 \\ (\log_y x)^2 + 1 = 2 \log_y x \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y = 12 \\ (\log_y x)^2 - 2 \log_y x + 1 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y = 12 \\ (\log_y x - 1)^2 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \log_y x - 1 = 0 \Rightarrow x - 1 = y^0 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\text{Reemplazando en la primera ecuación se tiene: } 4 + y = 12 \Rightarrow \boxed{y = 8}$$

$$\therefore S = \{ (2, 8) \}$$

PRUEBA 4

- 1.- Resolver: $\frac{x^4+4x^2}{(x-2)(x-3)} = \frac{36-3x}{(x-2)(x-3)} - \frac{x}{x-2}$
- 2.- Determine el conjunto solución de la ecuación exponencial:
- $$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- 3.- Determine el conjunto solución de la ecuación logarítmica:

$$\frac{1 + \log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})} = 1$$

- 4.- Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \\ \log_2(3^y - 1) = x \end{cases}$$

- 5.- Plantee y resuelva el problema siguiente:
Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus Cuadrados es 580. Determine los números.

Desarrollo

Solución pregunta 1.

Restricciones: $x \neq 2$, $x \neq 3$

$$\frac{x^4+4x^2}{(x-2)(x-3)} = \frac{36-3x}{(x-2)(x-3)} - \frac{x}{x-2} \quad / \quad (x-2)(x-3)$$

$$x^4 + 4x^2 = 36 - 3x - x(x-3)$$

$$x^4 + 4x^2 = 36 - 3x - x^2 + 3x$$

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

$$\text{Sea: } x^2 = t$$

$$t^2 + 5t - 36 = 0$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$t_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{matrix} \quad \text{¡Restricción!}$$

$$t_2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -9 \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$$

Solución pregunta 2

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(e^x - e^{-x}) &= e^x + e^{-x} \quad /e^x \\ \sqrt{3}(e^{2x} - 1) &= e^{2x} + 1\end{aligned}$$

$$(\sqrt{3}-1)e^{2x} = 1 + \sqrt{3}$$

$$e^{2x} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$e^{2x} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}$$

$$e^{2x} = 2 + \sqrt{3} \quad / \ln$$

$$2x = \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$x = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\therefore S = \left\{ \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \right\}$$

Solución pregunta 3.

$$\frac{1 + \log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})} = 1$$

$$1 + \log_2(x-4) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})$$

$$\log_2 2 + \log_2(x-4) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}); \quad 1 = \log_2 2$$

$$\log_2[2(x-4)] = \frac{\log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{\log_2 \sqrt{2}}; \quad \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_2 2$$

$$\log_2(2x-8) = 2 \log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})$$

$$\begin{aligned}\log_2(2x-8) &= \log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})^2 \\ 2x-8 &= (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})^2\end{aligned}$$

$$2x-8 = x+3 - 2\sqrt{x^2-9} + x-3$$

$$-8 = -2\sqrt{x^2-9}$$

$$\begin{aligned} 4 &= \sqrt{x^2 - 9} & /()^2 \\ 6 &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \pm 5 & ; x = -5 \text{ no es solución} \\ \therefore S &= \{5\} \end{aligned}$$

Solución pregunta 4.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \\ \log_2(3^y - 1) = x \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $\log_2(3^y - 1) = x \rightarrow 2^x = 3^y - 1$

(Restricción: $3^y - 1 \neq 0 \rightarrow 3^y \neq 1 \rightarrow y \neq 0$)

Reemplazando en la primera ecuación:

$$3(3^y - 1) - 2 \cdot 3^y = 6$$

$$3 \cdot 3^y - 3 - 2 \cdot 3^y = 6$$

$$3^y = 9 \Rightarrow 3^y = 3^2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\text{Luego: } \log_2(3^y - 1) = x \Rightarrow x = \log_2(9 - 1) = \log_2 8 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$\therefore S = \{(3, 2)\}$$

Solución pregunta 5

Planteamiento: Sean x e y los números naturales, con $x > y$.

Se diferencian en 2 unidades: $x - y = 2$

La suma de sus cuadrados es 580: $x^2 + y^2 = 580$

$$\text{Nos queda el sistema de ecuaciones: } \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 580 \end{cases}$$

Resolución del Sistema de ecuaciones:

Despejar x en la primera ecuación: $x = y + 2$

Reemplazar en la segunda ecuación: $x^2 + y^2 = 580$

$$(y + 2)^2 + y^2 = 580 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 = 580$$

$$2y^2 + 4y - 576 = 0 \quad / \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 + 2y - 288 = 0$$

$$(y - 16)(y + 18) = 0 \Rightarrow y = 16, y = -18$$

$$\text{Pero } y = -18 \notin \mathbf{N} \quad \therefore y = 16$$

Reemplazando $y = 16$ en $x = y + 2$ se obtiene el valor de x :

$$\therefore x = 16 + 2 = 18$$

Respuesta, los números naturales son $x = 18$, $y = 16$.

PRUEBA 4

1. Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}} - \frac{1}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}} = \frac{1}{4}$$

2. Resolver la ecuación exponencial:

$$2^{x+2} + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x+1} = \frac{27}{16}$$

3. Resolver la ecuación logarítmica:

$$\log \sqrt{x} - \sqrt{\log x} = 0$$

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} e^{x-y} - e^{27} &= 0 \\ \log_3(x+y) + \log_3(x-y) &= \log_{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{\sqrt{5}} \right)^5 \end{aligned} \right|$$

5. Plantear y resolver el siguiente problema:

La diferencia entre las edades de un padre y su hijo, excede en 6 al doble de la edad del hijo, y la suma entre el cuadrado de la edad del hijo y un tercio de la edad del padre, es igual a 92. Hallar las edades del padre y del hijo.

Desarrollo

Solución pregunta 1.

$$\frac{1}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}} - \frac{1}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}} = \frac{1}{4} \quad / \quad 4(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})$$

$$4(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}) - 4(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}) = (\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})$$

$$4(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}) = (5+x) - (5-x)$$

$$4(2\sqrt{5-x}) = 2x \quad / :2,$$

$$4\sqrt{5-x} = x \quad / ()^2$$

$$16(5-x) = x^2$$

$$x^2 + 16x - 80 = 0$$

$$(x + 20)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = -20, \quad x_2 = 4$$

Reemplazando en la ecuación original

$$x = -20 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5-20}-\sqrt{5+20}} - \frac{1}{\sqrt{5-20}+\sqrt{5+20}} = \frac{1}{4},$$

Pero $\sqrt{5-20} \notin \mathbb{R} \quad \therefore x = -20, \quad \text{no es solución}$

$$x = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5+4}-\sqrt{5-4}} - \frac{1}{\sqrt{5+4}+\sqrt{5-4}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \therefore x = 4 \text{ es solución}$$

Solución pregunta 2.

$$2^{x+2} + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x+1} = \frac{27}{16}$$

$$2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2 = \frac{27}{16}$$

$$2^x \cdot 4 + 2^x \cdot \frac{1}{2} + 2^x \cdot \frac{1}{4} + 2^x \cdot 2 = \frac{27}{16}$$

$$2^x \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2\right) = \frac{27}{16}$$

$$2^x \left(\frac{16+2+1+8}{4}\right) = \frac{27}{16}$$

$$2^x \left(\frac{27}{4}\right) = \frac{27}{16} \quad \Rightarrow \quad 2^x = \frac{27 \cdot 4}{16 \cdot 27} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -2}$$

Solución pregunta 3.

$$\log \sqrt{x} - \sqrt{\log x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \log \left(x^{\frac{1}{2}}\right) - (\log x)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log x = (\log x)^{\frac{1}{2}} \quad / \quad ()^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot (\log x)^2 = \log x$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 4 \cdot \log x$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 - 4 \cdot \log x = 0$$

$$\Rightarrow \log x (\log x - 4) = 0$$

Luego se tiene: $\log x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$$\log x = 4 \Rightarrow x = 10^4 \Rightarrow \boxed{x = 10000}$$

Solución pregunta 4.

$$\begin{array}{l} e^{x-y} - e^{27} = 0 \\ \log_3(x+y) + \log_3(x-y) = \log_{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{\sqrt{5}} \right)^5 \end{array} \quad \Bigg|$$

$$\begin{array}{l} e^{x-y} = e^{27} \\ \log_3(x+y) \cdot (x-y) = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^5 \end{array} \quad \Bigg|$$

$$\begin{array}{l} e^{x-y} = e^{27} \\ \log_3(x+y) \cdot (x-y) = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^5 \end{array} \quad \Bigg|$$

$$\begin{array}{l} x-y = 27 \quad * \\ \log_3(x+y) \cdot (x-y) = 5 \end{array} \quad \Bigg|$$

$$\begin{array}{l} x-y = 3^3 \\ (x+y) \cdot (x-y) = 3^5 \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow (x+y) \cdot 3^3 = 3^5 \Rightarrow (x+y) = 3^2 = 9 **$$

$$\begin{array}{l} x-y = 27 \\ x+y = 9 \end{array} \quad \Bigg| + \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow \boxed{x = 18} \Rightarrow \boxed{y = -9}$$

$\therefore S = \{(18, -9)\}$

Solución pregunta 5.

Sea x : edad del padre, y : edad del hijo.

$$\begin{array}{l} x-y = 2y+6 \\ y^2 + \frac{1}{3}x = 92 \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \boxed{x=3y+6}$$

$$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{3}(3y+6) = 92 \Rightarrow y^2 + y - 90 = 0$$

$$(y+10)(y-9) = 0 \Rightarrow y = -10 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$y = 9 \Rightarrow x = 33$$

Respuesta: La edad del padre es 33 años y la del hijo, 9 años.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- 1) Prado & otros. Precálculo, enfoque de resolución de problemas. Pearson. México, 2006
- 2) Stewart, J. Precálculo. Matemática para el cálculo. Thomson Internacional. México, 2007.
- 3) Swokowski, Earl W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México Cengage Learning, 2002

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- 4) Baldor, J.A. Álgebra. Editorial cultural y centroamericana. 2007
- 5) Carreño, Ximena & Cruz, Ximena. Álgebra. Editorial Arrayan. Chile 2003.
- 6) Cisternas, Marlene. & Medina, Martín. Tópicos de cálculo: Números Reales, Funciones de una...Apuntes, Universidad de Tarapacá, 2003.
- 7) Keedy / Bittinger. Álgebra y trigonometría. Editorial Fondo Educativo Interamericano, 1981.
- 8) Lehmann Charles M. Álgebra. Limusa, México, 1981
- 9) Miller, Heeren, Hornsby. Matemática: razonamiento y aplicaciones. Editorial Pearson Prentice Hall /Addison Wesley Longman Hall. Impreso en México, 8^{va} edición, 1999.
- 10) Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo. Álgebra. Editorial Pearson Educación, México, 2003
- 11) Peterson, John C. Matemáticas básicas: Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Editorial CECSA (compañía editorial continental), México 2001.
- 12) Pröschle, F. W. Curso de matemáticas elementales : Álgebra. Chile, 1997
- 13) Sullivan. Álgebra y Trigonometría. Séptima edición. Pearson. México, 2006.
- 14) Taylor & Wade. Matemática Básica. Limusa, México, 1966

SÍMBOLOS UTILIZADOS

$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\exists!$	Existe un único
$\nexists$	No existe
$\neq$	Distinto, no es igual
$\therefore$	Por lo tanto, luego
$/$	Tal que
$\emptyset$	Conjunto vacío
∞	Infinito, indeterminado
$:$	Tal que
$\subset$	Subconjunto o inclusión
$\vee$	o
$\wedge$	y
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\in$	Pertenece a
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	Si y solo si
$>$	mayor
$\geq$	Mayor o igual
$<$	Menor
$\leq$	Menor o igual